UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01347600 7

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING L[illegible] 1925

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

ZWEITER BAND:
ANALYSIS.

Math D
563

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

ZWEITER BAND IN DREI TEILEN.

ANALYSIS.

REDIGIERT VON

H. BURKHARDT†, W. WIRTINGER
(1898–1914) IN WIEN (1905–1912)
UND
R. FRICKE
IN BRAUNSCHWEIG.

ERSTER TEIL.
ERSTE HÄLFTE.

75582
24.9.09
194535
24.2.25

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899—1916.

QA
36
E62
Bd. 2
T. 1
Hfte. 1

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorrede zum zweiten Bande.

Der zweite Band der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften behandelt die Gebiete der reinen Mathematik von vornehmlich analytischem Charakter und sollte dem ursprünglichen Plane nach in zwei Teilen erscheinen, deren erster die Analysis der reellen Größen umfassen sollte, während der zweite für die Analysis der komplexen Größen bestimmt war. Der sehr umfängliche Stoff des Bandes war bereits nach der ersten, schon vor 1900 aufgestellten Disposition in 17 Referate eingeteilt, von denen drei wieder in mehrere selbständige Teilreferate zerlegt waren. Da nach den allgemeinen für die Bearbeitung der Referate aufgestellten Grundsätzen die verschiedenen, mannigfach ineinander greifenden Referate unter Vermeidung von Wiederholungen zu einem zusammenhängenden Ganzen zu gestalten waren, so erschien es geboten, nur erst mit der Bearbeitung einer kleinen Zahl solcher Referate zu beginnen, welche der Disposition nach den Beginn der beiden Teile bilden sollten, und an welche sich dann die später zu bearbeitenden Referate anzuschließen hatten.

Die anfangs vielleicht unterschätzte Größe der Arbeit bei jenen zunächst in Angriff genommenen Referaten brachte es nun aber mit sich, daß sich die Zeit für ihre Vollendung weit länger dehnte, als man ursprünglich erwartet hatte. Inzwischen ist gerade in unserem Gebiete der Mathematik vornehmlich infolge des immer herrschender werdenden Einflusses der Mengenlehre eine Zeit sehr lebhafter Fortentwicklung eingetreten; und hier war es eine allgemein eingehaltene Regel für die Abfassung der Referate, solche Fortschritte noch in die Darstellung aufzunehmen, damit die Encyklopädie sich wenigstens bei ihrem Erscheinen noch zur Jugend rechnen könne. Darin ist es begründet, daß den beiden zunächst geplanten Teilen im Laufe der Zeit ein dritter angereiht wurde, der vornehmlich der neueren Fortentwicklung der Analysis gewidmet ist. Zugleich sind in diesem Teile noch einige Referate untergebracht, die früher als selbständige noch nicht geplant waren, deren Hinzufügung sich indessen im Laufe der Zeit

als notwendig erwies. Endlich wird der dritte Teil noch die Beendigung eines im ersten Teile unvollendet gebliebenen Referates bringen.

Noch ein zweiter Umstand hat wandelnd in die Gestalt unseres Bandes II eingegriffen. Nach den allgemeinen für die Abfassung der Referate ursprünglich aufgestellten Leitsätzen sollte man sich tunlichst auf die Bezeichnung der Begriffe und Hauptsätze, in der Regel mit Unterdrückung der Beweise, beschränken. Bei dem Versuche, diese Anweisung einzuhalten, bekamen die Referate gelegentlich eine fast lexikographische Kürze. Jedenfalls ist bei den Referaten des zweiten Bandes jener Standpunkt sehr früh verlassen, und zwar um so mehr, als auch aus dem Leserkreise der Encyklopädie der Wunsch nach einer etwas ausführlicheren Darstellung geäußert wurde. Auch soll doch trotz allen Strebens nach Einheit gerade in der Form der Abfassung der einzelnen Referate je nach Neigung und Anlage der Mitarbeiter eine persönliche Note zum Ausdruck gelangen. War bereits ohnehin der erste Teil weit stärker belastet als der zweite, so hat der genannte Umstand zur Folge gehabt, daß der erste Teil schon der Handlichkeit wegen in zwei gesonderten Bänden zur Ausgabe gelangt. Beim zweiten und voraussichtlich auch beim dritten Teile wird sich indessen eine erneute Unterteilung nicht als nötig erweisen.

Über die Zeit des Erscheinens der einzelnen Hefte des ersten Teiles ist in den beiden Teilbänden je am Schlusse der Inhaltsverzeichnisse eine tabellarische Zusammenstellung gegeben, aus der das Nähere zu ersehen ist. Übrigens ist hierbei zu bemerken, daß der Abschluß eines Referates keineswegs immer unmittelbar dem Ausgabetermine des betreffenden Heftes vorangeht. Es ist deshalb, wenn auch nicht gleich von Anfang an, so doch späterhin jedesmal am Schlusse des einzelnen Referates der Termin seines Abschlusses ausdrücklich angegeben.

Den Herren Verfassern der einzelnen Referate spricht der Unterzeichnete namens aller bei der Redaktion Beteiligten für ihre hingebungsvolle und tatkräftige Arbeit Dank und Anerkennung aus; ihrer entsagungsreichen und dem allgemeinen Ziele sich unterordnenden Tätigkeit wird es vornehmlich zu danken sein, wenn unser Unternehmen die große ihm innewohnende Bedeutung zu verwirklichen imstande ist. Aufrichtigen Dank schuldet die Redaktion der akademischen Kommission, welcher die Leitung der Encyklopädie anvertraut ist. Ganz besonders ist es *F. Kleins* nimmer ermüdende Tätigkeit, der auch der zweite Band der Encyklopädie die reichste Förderung verdankt. Die Tätigkeit *Kleins* hat sich keineswegs auf den engeren Wirkungskreis der akademischen Kommission beschränkt, son-

dern über das gesamte Arbeitsgebiet auch dieses Bandes der Encyklopädie erstreckt, überall helfend und anregend, voll wärmsten Interesses ebensowohl für die großen Ziele der Encyklopädie wie für die kleinen Fragen der Drucklegung und der Herausgabe der einzelnen Hefte. Aber der Kreis der Freunde und Förderer der Encyklopädie ist noch ein weit größerer. Immer mehr ist es im Laufe der letzten Jahre Brauch geworden, hervorragende Vertreter unseres Faches bei der Korrektur der Druckbogen um Rat und Tat zu bitten. Rühmend darf hier ausgesprochen werden, daß diese Bitten stets das förderndste Entgegenkommen gefunden haben; auch von seiten der Redaktion soll hier allen Herren Fachgenossen, die durch sachkundigen Rat die Vollständigkeit und Richtigkeit der Referate gefördert haben, und die keineswegs immer alle bei den Referaten genannt worden sind, in angelegentlichster Weise gedankt sein.

Es ist für den Unterzeichneten eine schmerzliche Pflicht gewesen, an Stelle seines aus einer reichen wissenschaftlichen Tätigkeit abberufenen Freundes *Heinrich Burkhardt* dem Bande II der Encyklopädie dieses Geleitwort mitgeben zu müssen. In der Tat ist ja die Redaktion insbesondere des ersten Teiles von Band II der Encyklopädie ganz vornehmlich *Burkhardts* Werk. Ich will hier nur nebenher der ausgezeichneten Beiträge, vor allem des in seiner Art wohl einzig dastehenden, von tiefdringender historischer Forschung und Gelehrsamkeit getragenen Referates „Trigonometrische Reihen und Integrale“ gedenken. Was ich aber hier zum ehrenden Andenken an *Burkhardt* besonders hervorheben möchte, ist seine mehr im verborgenen gebliebene Tätigkeit für die Redaktion der Encyklopädie, in die er schon 1895 eingetreten war. Zusammen mit *Fr. Meyer*, dem die erste Idee zur Schöpfung unseres Werkes zu danken ist*), hat *Burkhardt* die Redaktion der drei ersten, der reinen Mathematik gewidmeten Bände übernommen und gleich anfangs mit *Meyer* die beiden Probereferate „Flächen dritter Ordnung“ und „Potentialtheorie“ verfaßt, die sowohl nach innerem Aufbau als nach äußerer Gestalt vorbildlich für die ganze Encyklopädie geworden sind. Fast bis zum Abschluß des ersten Teiles vom Bande II hat *Burkhardt* die Redaktion dieses Teiles in der Hand gehabt, dessen Abschluß er leider nicht mehr erleben sollte.

Wenn trotz des schweren Verlustes, den die Encyklopädie durch Burkhardts Tod erlitten hat, die Herausgabe des vorliegenden Teiles I ohne erhebliche Verzögerung vollzogen werden konnte, so ist dies in

*) Man vergleiche hierüber die Ausführungen, die *W. von Dyck* im „Einleitenden Berichte über das Unternehmen der Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ am Anfang des Bandes I gegeben hat.

erster Linie dem tatkräftigen Eintreten der Herren Fachgenossen in München zu danken. *W. v. Dyck*, dessen erfahrener und wirksamer Führung die Encyklopädie so viel verdankt, hat zusammen mit *R. Kleeberg* die mühsame Sichtung und Ordnung des Burkhardtschen Nachlasses vollzogen und hat zugleich durch Rat und Tat der Herausgabe des ersten Teiles jede Förderung gewidmet. Ganz besonderen Dank schuldet die Redaktion *Kleeberg*, der die letzten Druckbogen des Burkhardtschen Referates „Trigonometrische Reihen und Integrale" korrigiert hat und selbständig das Register zum vorliegenden Teile I von Band II verfaßte. Die uneigennützige und sorgfältige Mitarbeit *Kleebergs* weiß die Redaktion um so höher einzuschätzen, als sie selbst noch in eine Zeit hineinreichte, da *Kleeberg* durch höhere Pflicht zum Schutze des Vaterlandes in eine andere Tätigkeit berufen wurde. Die von *Kleeberg* selbst begonnene Korrektur des Registers vollendete in dankenswerter Weise *W. Meierhöfer* mit Unterstützung von *A. Rosenthal*.

Die verehrte und um die Verbreitung unserer Wissenschaft so verdiente Verlagsbuchhandlung *B. G. Teubner* hat auch bei der Drucklegung des vorliegenden ersten Teiles von Band II trotz aller vielfältigen Schwierigkeiten ihr bewährtes Entgegenkommen aufs neue bewiesen. Aufrichtiger Dank sei ihr auch an dieser Stelle hierfür ausgesprochen.

Der zweite Teil vom Bande II ist so weit gefördert, daß sein Erscheinen etwa in Jahresfrist in ziemlich sichere Aussicht gestellt werden kann. Während längerer Jahre hat an diesem Teile *W. Wirtinger* zusammen mit *Burkhardt* die Pflichten der Redaktion getragen, trotzdem er bereits als Vertreter der Wiener Akademie der Leitung und als Verfasser mehrerer grundlegender Referate der Mitarbeiterschaft der Encyklopädie angehörte. In letzterer Hinsicht hat sich *Wirtinger* besonders um das schwierige Referat „Elliptische Funktionen" verdient gemacht; auf Grund der Vorarbeiten, welche *Wirtinger* und *J. Harkness* für dieses Referat geschaffen hatten, konnte es der Unterzeichnete wagen, an die Verfassung dieses Referates heranzugehen. Das Nähere darüber ist am Schlusse des genannten Referates mitgeteilt. Wenn sich auch *Wirtinger* infolge der vielseitigen Pflichten seines Amtes vor einigen Jahren genötigt sah, seine Tätigkeit in der Leitung der Encyklopädie auf die Mitgliedschaft in der akademischen Kommission zu beschränken, so ist um so erfreulicher, daß *Wirtingers* wissenschaftliche Kraft im vollem Umfange der Encyklopädie erhalten geblieben ist; wir hoffen, das Referat „Abelsche Funktionen und Thetafunktionen" aus seiner und *A. Krazers* Feder binnen kurzem vollendet vorlegen zu können.

In ferneren zwei bis drei Jahren soll der dritte Teil des Bandes II vollendet vorliegen. Wie schon oben angedeutet, ist dieser Teil vornehmlich der neuesten Fortentwicklung der Analysis gewidmet. Eine Reihe hervorragender jüngerer Fachgenossen, die selbst tätigen Anteil am Ausbau der Analysis nehmen, sind als Mitarbeiter gewonnen, und die Arbeit schreitet in ihren Händen rüstig voran. Für einen kleinen Rest von Referaten ist die Redaktion eben in Unterhandlungen für die Gewinnung weiterer Mitarbeiter eingetreten. So hat sich in unserem Bande II der Encyklopädie das Alter des neunzehnten Jahrhunderts mit der Jugend des zwanzigsten vereint, um ein Werk zu schaffen, das rückblickend ein Zeuge der reichen Ergebnisse der analytischen Mathematik einer vergangenen Zeit sein will, und das zugleich vorblickend an seinem Teile der künftigen Forschung die Tore öffnen hilft.

Bad Harzburg, den 3. Oktober 1915.

Robert Fricke.

Inhaltsverzeichnis zu Band II, 1. Teil, 1. Hälfte.

A. Analysis der reellen Größen.

1. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre. Von A. Pringsheim in München.

I. Funktionen einer Veränderlichen.

Seite

1. Veränderliche und Funktionen: Historisches 3
2. Fortsetzung: Der Eulersche Funktionsbegriff 4
3. Fortsetzung: Der allgemeinste (Dirichletsche) Funktionsbegriff und derjenige der Funktionentheorie im engeren Sinne 5
4. Reelle Veränderliche 8
5. Allgemeinste eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen 9
6. Obere (untere) Grenze und Schwankung einer Funktion 12
7. Grenzwerte und Unbestimmtheitsgrenzen 12
8. Unendlich große Werte der Funktionen und des Arguments 16
9. Die stetige Funktion 17
10. Die differenzierbare Funktion 20
11. Die abteilungsweise monotone und die „gewöhnliche" Funktion 22
12. Die unbeschränkt differenzierbare und die analytische Funktion 23
13. Uneigentliche Funktionswerte. Die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ etc. . 24
14. Unstetigkeiten (Diskontinuitäten) 28
15. Singuläre Stellen 31
16. Definition von Funktionen durch Grenzwerte. Gleichmäßige Konvergenz 32
17. Gleichmäßige Konvergenz unendlicher Reihen 34
18. Kondensation von Singularitäten 36
19. Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten (in endlichen Intervallen) 39
20. Stetige Funktionen mit unendlich vielen Singularitäten (in endlichen Intervallen) 42

II. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

21. Bereiche von n Veränderlichen 44
22. Funktionen von n Veränderlichen. Stetigkeit 47
23. Simultane und sukzessive Grenzübergänge 49
24. Gleichmäßige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion 52

(Abschluß des Druckes im April 1899.)

2. Differential- und Integralrechnung. Von A. Voss in Würzburg (jetzt in München).

A. Literaturnachweise.

B. Einleitung.

1. Historisches 58

C. Differentialrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

Seite
2. Vordere und hintere Derivierte 60
3. Die Derivierten der elementaren Funktionen 62
4. Existenz der Derivierten 63
5. Die vier Derivierten der Funktion eines stetigen Argumentes 64
6. Die höheren Derivierten 65
7. Der Mittelwertsatz von Cauchy, Darboux und Weierstraß 65
8. Die Differentiale 69

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

9. Die partiellen Derivierten und das totale Differential 70
10. Die höheren partiellen Derivierten 73

III. Anwendungen.

11. Die Taylorsche Entwicklung für Funktionen einer Variabeln 74
12. Ausdehnung auf mehrere Variabele 77
13. Verallgemeinerungen 77
14. Die Taylorsche Reihe 78
15. Analytische Funktionen einer reellen Variabeln 80
16. Maximum und Minimum einer Funktion 80
17. Extreme der Funktionen einer Variabeln 82
18. Extreme bei mehreren unabhängigen Variabeln 82
19. Der semidefinitive Fall von Peano und Scheeffer 83
20. Die Arbeiten von Stolz 84
21. Die Arbeiten von v. Dantscher 84
22. Bedingte Extreme 85
23. Definitive homogene Formen 86
24. Independente Darstellung höherer Derivierten 87

D. Integralrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

a) Das unbestimmte Integral.

25. Die unbestimmte Integration 88
26. Die rationalen Funktionen 90
27. Transzendente Funktionen 92
28. Algebraische Funktionen vom Geschlechte Null 92
29. Methode von Aronhold 93
30. Schlußbemerkung 94

b) Das bestimmte Integral.

31. Das bestimmte Integral nach Cauchy, Riemann und Darboux 95
32. Integrable Funktionen 96
33. Eigenschaften des bestimmten Integrals 97
34. Der erste Mittelwertsatz 97
35. Der zweite Mittelwertsatz 98
36. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung und die Integrationsoperationen 99
37. Uneigentliche Integrale 102

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

38. Das n-fache Integral 103
39. Ermittlung desselben durch sukzessive Integration 104
40. Integrale geometrischer und mechanischer Größen 106
41. Transformation der mehrfachen Integrale 107
42. Der Diskontinuitätsfaktor von Dirichlet 108

III. Anwendungen.

Seite
43. Integration totaler Differentiale 110
44. Integrabilität der Differentialausdrücke 112
45. Der Satz von Green in der Ebene 113
46. Der Satz von Stokes 114
47. Der Satz von Green und seine Anwendungen 115
48. Die Differentiation zu allgemeinem Index; ältere Arbeiten 116
49. Die Arbeiten von Riemann, Grünwald, Most u. a. 118
50. Die mechanische Quadratur 119
51. Die elementaren Summationsmethoden 120
52. Die Gaußsche Methode, Jacobis und Christoffels Arbeiten 121
53. Erweiterungen von Heine, Mehler u. a. 124
54. Markoffs Darstellung 126
55. Erweiterung auf mehrfache Integrale 127

E. Anhang.

56. Planimeter und Integratoren 128
57. Das Amslersche Planimeter 129
58. Die Präzisionsplanimeter 130
59. Die Integraphen 131
60. Harmonische Analysatoren 133
61. Die graphischen Methoden 134

(Abschluß des Druckes im Juni 1899.)

3. Bestimmte Integrale. Von G. Brunel † (in Bordeaux).

1. Eigentliche bestimmte Integrale 136
2. Uneigentliche bestimmte Integrale 137
3. Kennzeichen der absoluten Konvergenz der bestimmten Integrale . . . 139
4. Nicht absolut-konvergente bestimmte Integrale. Nicht monotone Integranden 142
5. Eigenschaften der uneigentlichen bestimmten Integrale. 143
6. Integration unendlicher Reihen 144
7. Bestimmte Integrale, die einen Parameter enthalten 144
8. Mehrfache bestimmte Integrale. 145
9. Verschiedene Methoden zur Auswertung der bestimmten Integrale:
   a) Bestimmte Integrale aus unbestimmten abgeleitet. 148
   b) Auswertung bestimmter Integrale mit Hilfe ihrer Definition als Grenzwerte von Summen 149
   c) Substitution neuer Variabeln 149
   d) Teilweise Integration 150
   e) Differentiation unter dem Integralzeichen 151
   f) Integration unter dem Integralzeichen 151
   g) Auflösung einer Gleichung 152
   h) Integration von Differentialgleichungen 153
   i) Zerlegung des Integrationsintervalles 154
   k) Reihenentwicklung unter dem Integralzeichen 155
10. Der Satz von Cauchy 155
11. Integration rationaler Brüche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. 156
12. Γ-Funktion:
   a) Verschiedene Definitionen der Γ-Funktion 157
   b) Eigenschaften der Γ-Funktion 160
   c) Reihenentwicklung von $\log \Gamma$ 161
   d) Die Funktion $\psi(a)$. 162
   e) Die Funktion $\chi(a)$. 164
   f) Angenäherte Berechnung von $\Gamma(a)$ für große Werte des Arguments 165
   g) Die Funktion $\bar{\omega}(a)$ 167
   h) Berechnung der Γ-Funktion 169

Seite
13. Die Eulersche Konstante 171
14. Integrallogarithmus 174
15. Betafunktionen 175
16. Andere Integrale, welche auf Gammafunktionen zurückführbar sind . . 177
17. Anwendungen der bestimmten Integrale in der Reihenlehre 180
18. Bernoullische Zahlen 181
19. Besondere bestimmte Integrale 186
20. Gaußsche Summen 187

(Abschluß des Druckes im Juli 1899.)

4a. Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. Von P. Painlevé in Paris.

1. Definitionen und Fundamentalprobleme 190
2. Stand der Theorie vor Cauchy 192

Methode von Cauchy-Lipschitz.

3. Prinzip der Methode 192
4. Vervollkommnung durch Lipschitz 193
5. Genaue Bestimmung des Konvergenzintervalles 194
6. Erste Integrale eines Differentialsystems 195
7. Anwendung der Methode auf das komplexe Gebiet 196
8. Fall stetiger Differentialquotienten, die der Lipschitzschen Bedingung nicht genügen 197

Methode der sukzessiven Annäherungen.

9. Prinzip und Resultate der Methode 198
10. Korollare 200

Methode des calcul des limites.

11. Prinzipien und Resultate dieser Methode 200
12. Fortbildung der Methode 202
13. Eindeutige Bestimmung der Integrale durch die Anfangsbedingungen . 203
14. Erweiterung des Konvergenzbereichs der Methode 204

15. Methode der Variation der Konstanten 204

16. Methode der Aufsuchung erster Integrale 205

Gewöhnliche singuläre Anfangsbedingungen.

17. Anfangswerte, für welche einige der f_i meromorph und unendlich sind 206
18. Anfangswerte, für welche einige der f_i algebraisch verzweigt sind . . 206
19. Algebraische Differentialsysteme 208
20. Anwendung auf Gleichungen erster Ordnung 209
21. Algebraische Gleichungen erster Ordnung 210
22. Vergleichung mit der Theorie der Enveloppen. Historisches 211
23. Ausdehnung auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung 214

Außergewöhnliche Anfangsbedingungen bei Gleichungen 1. Ordnung.

24. Untersuchungen von Briot und Bouquet über die Gleichung $xy' = ax + by + \cdots$ 215
25. Allgemeiner Fall, in dem y meromorph und von der Form 0/0 ist . . 216
26. Untersuchungen von Picard 217
27. Methode von Poincaré; Ergänzungen 218
28. Fall eines algebroiden f 220
29. Anwendung auf das reelle Gebiet 221
30. Untersuchungen von Bendixon und Horn 221
31. Picards Untersuchungen der Gleichungen zweiten Grades in y' 223

Außergewöhnliche Anfangsbedingungen bei beliebigen Differentialsystemen.

Seite
32. Allgemeiner Satz von Poincaré 223
33. Ergänzungen 225
34. Bestimmung besonderer Klassen von Integralen in Ausnahmefällen . . 226
35. Allgemeiner Fall meromorpher Differentialkoeffizienten 227
36. Anwendung auf das reelle Gebiet 227
37. Reelle asymptotische Lösungen 228

(Abschluß des Druckes im Februar 1900.)

4b. Gewöhnliche Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden. Von E. Vessiot in Lyon.

1. Fundamentale Probleme. Definitionen 232
2. Historischer Überblick; formale Integrationstheorien 233
3. Einführung neuer Variabeln. Äquivalenzprobleme. Rationelle Integrationstheorien 235

Gleichungen erster Ordnung.

4. Methode der Trennung der Variabeln 236
5. Methode des Euler'schen Multiplikators 237
6. Methode von Lie 238
7. Diskussion. Vergleichung der Transzendenten. Algebraische Integration 239
8. Jacobi'sche und Riccati'sche Gleichung 240
9. Unaufgelöste Gleichung. Integration durch Differentiation 242
10. Geometrische Interpretationen, Verwendung homogener Koordinaten . . 244

Systeme von Gleichungen 1. Ordnung; allgemeine Theorien.

11. Multiplikatorensysteme 245
12. Der Jacobi'sche Multiplikator 247
13. Methode von Lie: Integration von Systemen mit bekannter Transformationsgruppe 249
14. Integration von Systemen, von denen man Differential- oder Integralinvarianten kennt 253
15. Variationssyteme 254

Spezielle Theorien für Gleichungen n^{ter} Ordnung.

16. Methode des Eulerschen Multiplikators 255
17. Fälle der Graderniedrigung 257
18. Lie'sche Theorie. Gleichungen, die Gruppen von Punkttransformationen gestatten. Verallgemeinerungen 258
19. Unaufgelöste Gleichungen. Typen integrabeler Gleichungen 259

Spezielle Klassen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

a) Die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung.

20. Allgemeine Begriffe; Fundamentalsysteme von Lösungen 260
21. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Gleichungen von Lagrange. Methode von d'Alembert 262
22. Gleichungen mit zweitem Glied. Methode der Variation der Konstanten 263
23. Erniedrigung der Ordnung der Gleichung. Gemeinsame Lösungen zweier linearer Gleichungen 265
24. Gleichung mit gegebenem Fundamentalsystem. Symbolische Methoden 266
25. Rationale Differentialfunktionen der Lösungen eines Fundamentalsystems. Invariante Funktionen. Transformation 267
26. Assoziierte Gleichungen. Adjungierte Gleichung 269
27. Gleichungen zweiter Ordnung 271

b) Lineare Systeme.

Seite
28. Ausdehnung der vorhergehenden Theorien auf Systeme linearer Gleichungen 272

c) Liesche Systeme und Verallgemeinerungen.

29. Liesche Systeme. Ihre verschiedenen Definitionen. Ihre Integrationstheorie 275
30. Allgemeinste Systeme mit Fundamentallösungen. Gleichungen höherer Ordnung mit Fundamentalsystemen erster Integrale. Verallgemeinerung der Lieschen Systeme 278
31. Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen. Anwendungen 279
32. Verschiedene Klassen von Gleichungen 281

Äquivalenzprobleme.

33. Formulierung des Problems. Einführung der Differentialinvarianten. Allgemeine Methoden 282
34. Invarianten der linearen Gleichungen 284
35. Invarianten verschiedener Klassen von Gleichungen 285

Rationelle Integrationstheorien.

36. Rationalitätsbereich. Irreduzibilität 288
37. Rationale Integrationstheorie der linearen Gleichungen 289
38. Ausdehnung der Theorie auf die Lieschen Systeme. Theorie von J. Drach für beliebige Gleichungen 1. Ordnung 292

(Abschluß des Druckes im März 1900.)

5. Partielle Differentialgleichungen. Von E. v. Weber in München (jetzt in Würzburg).

I. Allgemeine Eigenschaften der Differentialsysteme.

1. Existenz der Lösungen 296
2. Fortsetzung; passive Systeme 299
3. Mayersche Systeme 301
4. Das allgemeine Integral 301
5. Singuläre Integrale 303
6. Intermediäre Integrale 304
7. Vollständige Integrale 305
8. Verschiedene Formen des allgemeinsten Differentialsystems 306
9. Lies Verallgemeinerung des Integralbegriffs 307
10. Transformationen der Differentialsysteme 310

II. Die linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer Unbekannten.

11. Die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung 312
12. Der Jacobische Multiplikator 314
13. Vollständige Systeme 315
14. Systeme totaler Differentialgleichungen 317
15. Jacobis Integrationsmethode 319
16. Die Hauptintegrale 320
17. Die Lie-Mayersche Transformation 321

III. Das Pfaffsche Problem.

18. Historisches; Pfaffs Reduktionsmethode 322
19. Graßmanns Methode; das Fundamentaltheorem 324

Seite

20. Integraläquivalente; die allgemeinste Normalform 326
21. Transformationen eines Pfaffschen Ausdruckes 327
22. Reduktionsmethoden von Clebsch und Lie 328
23. Methode von Frobenius 329
24. Die Theorie der Berührungstransformationen als Spezialfall des Pfaffschen Problems 333
25. Die Jacobische und die Mayersche Identität 335
26. Verallgemeinerung der Frobeniusschen Theorie 335
27. Beziehungen zwischen Pfaffschen Ausdrücken und infinitesimalen Transformationen 336

IV. Die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten.

28. Methoden von Lagrange und Pfaff 337
29. Methode von Cauchy 339
30. Jacobis erste Methode 340
31. Die Hamilton-Jacobische Theorie 343
32. Variation der Konstanten; die charakteristischen Kurven 346
33. Singuläre Integrale 348
34. Charakteristische Streifen; Abbildung und Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung 349
35. Homogene Elementkoordinaten 353
36. Jacobis zweite Methode 354
37. Lies Verallgemeinerung von Jacobis zweiter Methode 356
38. Involutionssysteme 356
39. Spezielle Involutionssysteme 360
40. Funktionengruppen 361
41. Funktionengruppen, Fortsetzung 363
42. Die Bäcklundsche Theorie 366

V. Höhere Differentialprobleme.

1. Differentialsysteme mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

43. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinsichtlich ihrer Charakteristiken erster Ordnung 366
44. Erste Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung 369
45. Fortsetzung 370
46. Die Charakteristiken höherer Ordnung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung 372
47. Fortsetzung 373
48. Die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung 374
49. Beziehungen zwischen zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 375
50. Darbouxsche Systeme; Involutionssysteme 377
51. Die Darboux-Levysche Integrationstheorie und ihre Verallgemeinerungen 379
52. Differentialsysteme erster Ordnung mit mehreren Unbekannten 382
53. Die Methode von Laplace und ihre Verallgemeinerungen 384
54. Verwertung des Gruppenbegriffs für Differentialgleichungen 387

2. Differentialsysteme mit m unabhängigen Veränderlichen.

55. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. 389
56. Involutionssysteme mit einer Unbekannten 390
57. Verallgemeinerung der Monge-Ampère'schen Theorie 392
58. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten 394
59. Nichtlineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten; Normalsysteme 395
60. Systeme Pfaffscher Gleichungen 396

(Abschluß des Druckes im März 1900)

6. Kontinuierliche Transformationsgruppen. Von L. Maurer in Tübingen und H. Burkhardt † (in Zürich, später in München).

Seite
1. Einleitung 402
2. Definition 403
3. Die grundlegenden Differentialgleichungen 405
4. Umformung der Differentialgleichungen. Infinitesimale Transformationen 407
5. Integrabilitätsbedingungen. Zusammensetzung 410
6. Untergruppen 411
7. Isomorphismus 412
8. Ähnlichkeit 413
9. Transformation einer Gruppe in sich 414
10. Reziproke Gruppen 415
11. Transitivität. Primitivität 416
12 Invarianten 418
13. Differentialinvarianten. 419
14. Parametergruppen 422
15 Adjungierte Gruppen 424
16. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Variabeln- und Parameterzahl 425
17. Bestimmung aller Typen der Zusammensetzung einer Gruppe. 426
18. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Zusammensetzung 429
19. Über den analytischen Charakter der Funktionen $f_\nu(x|a)$. 432
20. Besondere Arten von endlichen kontinuierlichen Gruppen 433
21. Gemischte Gruppen 434
22. Unendlich kontinuierliche Gruppen 435

(Abschluß des Druckes im Mai 1900.)

7a. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Von M. Bocher in Cambridge, Mass.

1. Die fundamentalen Fragestellungen und ihre Entstehung aus der mathematischen Physik 437
2. Die grundlegende Abhandlung von Sturm und das Oszillationstheorem im Falle eines Parameters 442
3. Weiteres über den Fall eines Parameters 444
4. Ausdehnung der Sturmschen Resultate auf Differentialgleichungen höherer Ordnung 448
5. Das Oszillationstheorem im Falle mehrerer Parameter 450
6. Exkurs über polynomische Lösungen 454
7. Die seit 1890 von partiellen auf gewöhnliche Differentialgleichungen übertragenen Methoden 457

(Abschluß des Druckes im Juni 1900.)

7b. Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung). Von H. Burkhardt † (in Zürich, später in München) und Fr. Meyer in Königsberg, Ostpr.

1. Definition des Potentials 466
2. Die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung 467
3. Stetigkeit. Verhalten im Unendlichen 469
4. Abgeleitete Potentiale 470
5. Flächenpotentiale. 470
6. Potential einer Doppelschicht 471
7. Potential von Linien und Punkten 473
8. Logarithmisches Potential 473
9. Analytische Fortsetzung. 474
10. Niveauflächen und Kraftlinien 476
11. Verallgemeinerungen des Potentialbegriffes 477

Seite
12. Greensche Formeln 477
13. Gauß' allgemeine Lehrsätze 479
14. Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen 480
15. Potential von Kugel und Ellipsoid 482
16. W. Thomsons elektrische Bilder 485
17. Randwertaufgaben; Eindeutigkeits- und Existenztheorem 486
18. Greensche Funktion 488
19. Die Poissonschen Integrale 489
20. Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen 490
21. Entwicklung nach Kugelfunktionen 491
22. Allgemeinere Entwicklungen 492
23. Gauß' Versuch, das Existenztheorem zu beweisen 492
24. Thomson-Dirichletsches Prinzip 493
25. Kritik des Thomson-Dirichletschen Prinzips 494
26. Methode der Approximation durch Polygone bzw. Polyeder 495
27. Die Methode des arithmetischen Mittels 496
28. Kombinatorische Methoden 499
29. Spezielle Methoden für analytische Randkurven 501
30. Hilfssätze zu Konvergenzbeweisen 501
31. Die Balayagemethode 502

(Abschluß des Druckes im Juni 1900.)

7c. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Von A. Sommerfeld in Aachen (jetzt in München).

1. Abgrenzung des Gegenstandes 505

I. Allgemeine Theorie der Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variabeln.

2. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der elliptische, hyperbolische und parabolische Typus 508
3. Der Greensche Satz und die Greenschen Funktionen 513
4. Eindeutigkeitsfragen, vornehmlich bei elliptischen Differentialgleichungen 520
5. Existenz der Lösungen bei Differentialgleichungen des elliptischen Typus für hinreichend kleine Gebiete. Die Methode der sukzessiven Approximationen 523
6. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des elliptischen Typus für beliebige Gebiete. Alternierende Methode, Methode der ringförmigen Gebietserweiterung, Auskehrungsmethode etc. 526
7. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des hyperbolischen Typus 530
8. Über den analytischen Charakter der durch partielle Differentialgleichungen definierten Funktionen 533

II. Randwertaufgaben bei besonderen Differentialgleichungen.

9. Die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ 540
10. Die Existenz der ausgezeichneten Lösungen. Exakter Nachweis derselben bei H. A. Schwarz und H. Poincaré 546
11. Die Gleichung $\Delta u - k^2 u = 0$ 551
12. Die Gleichung $\Delta u = k e^u$ $(k > 0)$ 553
13. Die Gleichung der schwingenden Saite und ihre Verallgemeinerungen 557
14. Die Wärmeleitungsgleichung 562
15. Schlußbemerkungen betr. die Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung und mehr als zwei unabhängigen Variabeln . . 566

(Abgeschlossen im April 1900.)

8. Variationsrechnung.

Von A. Kneser in Berlin (jetzt in Breslau).

1. Begriff der Variationsrechnung 572
2. Infinitesimalbetrachtungen von Euler 573

Seite
3. Einführung des Zeichens δ durch Lagrange 574
4. Allgemeine Variationsformel von Euler; reine und gemischte Variationen 575
5. Spezielle Variation durch Änderung eines Parameters 576
6. Notwendige Bedingung für $\delta J_n = 0$ 577
7. Theorie der Integrabilität 578
8. Eulers Multiplikatormethode für $\delta U_n = 0$, $m = 1$ 579
9. Der Multiplikator bei isoperimetrischen Aufgaben 580
10. Die Multiplikatoren und notwendigen Bedingungen für $\delta U_n = 0$ . . . 582
11. Formale Entwicklungen; Jacobi-Hamiltonsche Methode 584
12. Zweite Variation von J_1 nach Legendre 586
13. Transformation von $\delta^2 J_n$ nach Jacobi 588
14. Beweis der formalen Sätze von Jacobi durch Hesse und Frobenius . . 590
15. Transformation von $\delta^2 U_n$ nach Spitzer, Clebsch, Mayer, Lipschitz. . . 591
16. Das Vorzeichen von $\delta^2 U_n$ nach Mayer; konjugierte Punkte. 595
17. Die auf konjugierte Punkte bezügliche notwendige Bedingung des Extremums von J_1 nach Erdmann 599
18. Scheeffers neue Methode; Ausdehnung des Satzes von Erdmann . . . 600
19. Kritische Untersuchungen; Inbegriff der Variationen 602
20. Hinreichende Bedingungen des Extremums von J_1 nach Scheeffer. . . 604
21. Hinreichende Bedingungen nach Weierstraß; das isoperimetrische Problem im engeren Sinne 606
22. Höhere Variationen; hinreichende Bedingungen bei variabelen Grenzen 609
23. Steiners Sätze über Figuren extremen Flächeninhaltes; diskontinuierliche Lösungen 611
24. Mehrfache Integrale; Transformation der ersten Variation 614
25. Zweite Variation und hinreichende Bedingungen des Extremums von Doppelintegralen 616
26. Übersicht der Beispiele und Anwendungen 620

(Abgeschlossen im September 1900.)

8a. Weiterentwicklung der Variationsrechnungen in den letzten Jahren.

Von E. Zermelo in Göttingen (jetzt in Zürich) und H. Hahn in Göttingen (jetzt in Czernowitz).

1. Die Grundlagen der Weierstraßschen Theorie 626
2. Notwendige und hinreichende Bedingungen im einfachsten Falle . . . 628
3. Isoperimetrische Probleme 631
4. Allgemeinere Probleme 633
5. Beispiele und Anwendungen 635
6. Existenzfragen 638

(Abgeschlossen im Januar 1904.)

9. Trigonometrische Interpolation.

(Mathematische Behandlung periodischer Naturerscheinungen.) Von H. Burkhardt † (in Zürich, später in München).

1. Bezeichnungen 643
2. Hilfsformeln 644
3. Vorgeschichte 646

I. Erscheinungen mit einer bekannten Periode.

4. Die Begründung der trigonometrischen Interpolation für äquidistante Argumente durch Fr. W. Bessel 647
5. Trigonometrische Interpolation für beliebige Argumente 651
6. Trigonometrische Interpolation für sehr zahlreiche Argumente 652
7. Das Verfahren von Leverrier 653
8. Interpolation ausgefallener Beobachtungen 654
9. Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Erscheinung 655
10. Behandlung der Extrema bei trigonometrischer Interpolation 656

Seite

11. Berechnung des Ganges einer periodischen Erscheinung während einer längeren Periode aus Mittelwerten für kürzere Zeiträume 657
12. Verwendung der trigonometrischen Interpolation zu mechanischer Quadratur. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen aus möglichst wenig Beobachtungen 659
13. Trigonometrische Interpolation von Funktionen zweier Argumente . . 662

II. Separation mehrerer bekannter Perioden.

14. Vorbemerkungen, insbesondere über theoretische und praktische Kommensurabilität 663
15. Elimination von säkularen Störungen 664
16. Separation zweier Perioden von gleicher Größenordnung 666
17. Verfahren in komplizierten Fällen. Die harmonische Analyse der Gezeiten 668
18. Bestimmung der Komponenten aus Beobachtungen der Extrema allein 669
19. Abgekürztes Verfahren 672
20. Zusammenfassung mehrerer periodischer Terme zu einem einzigen von veränderlicher Amplitude und Phase 673

III. Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

21. Die Methode von Lagrange 675
22. Die Sätze von Nervander und Buys-Ballot 677
23. Pulling und pushing 679
24. Andere neuere Ansätze 681
25. Kritik vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung 682

IV. Hilfsmittel zur Ausführung der Rechnungen.

26. Rechenschemata für spezielle Werte der Anzahl der Beobachtungen . 685
27. Graphische Methoden, Tabellen, Schablonen 688
28. Instrumentelle Hilfsmittel zum Rechnen mit den Formeln 689
29. Harmonische Analysatoren 690
30. Hilfsmittel zur Trennung verschiedener Perioden und zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten 692

(Abgeschlossen im April 1904.)

Übersicht
über die in der vorliegenden ersten Hälfte von Band II, Teil I zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

A. Analysis der reellen Größen.

Heft 1. 10. VIII. 1899.	1. Pringsheim: Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre. 2. Voss: Differential- und Integralrechnung. 3. Brunel: Bestimmte Integrale. (Erster Teil.)
Heft 2 und 3. 10. IV. 1900.	3. Brunel: Bestimmte Integrale. (Schluß.) 4a. Painlevé: Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. 4b. Vessiot: Gewöhnliche Differentialgleichungen; Elementare Integrationsmethoden. 5. v. Weber: Partielle Differentialgleichungen.
Heft 4. 31. VII. 1900.	6. Maurer und Burkhardt: Kontinuierliche Transformationsgruppen. 7a. Bôcher: Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. 7b. Burkhardt und Meyer: Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung). 7c. Sommerfeld: Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. (Erster Teil.)
Heft 5. (erster Teil). 6. VIII. 1904.	7c. Sommerfeld: Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. (Schluß.) 8. Kneser: Variationsrechnung. 8a. Zermelo und Hahn: Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren. 9. Burkhardt: Trigonometrische Interpolation (mathematische Behandlung periodischer Naturerscheinungen).

Übersicht
über die in der vorliegenden zweiten Hälfte von Band II, Teil I zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

A. Analysis der reellen Größen (Fortsetzung).

Heft 5. (zweiter Teil). 6. VIII. 1904.	10. Wangerin: Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, insbesondere der Laméschen und Besselschen (Theorie spezieller, durch lineare Differentialgleichungen definierter Funktionen).
Heft 6. 27. III. 1906.	11. Pincherle: Funktionaloperationen und -gleichungen.
Heft 7. 16. VI. 1914.	12. Burkhardt: Trigonometrische Reihen und Integrale (bis etwa 1850). (Erster Teil.)
Heft 8. 12. IX. 1915.	12. Burkhardt: Trigonometrische Reihen und Integrale (bis etwa 1850). (Schluß.)
Heft 9. 6. IV. 1916.	Fricke: Vorrede zum zweiten Bande. Kleeberg: Register zu Band II, Teil I. Inhaltsverzeichnisse von Band II, Teil I, 1. und 2. Hälfte.

II A 1. GRUNDLAGEN DER ALLGEMEINEN FUNKTIONENLEHRE

VON

ALFRED PRINGSHEIM

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

I. Funktionen einer Veränderlichen.

1. Veränderliche und Funktionen: Historisches.
2. Fortsetzung: Der *Euler*'sche Funktionsbegriff.
3. Fortsetzung: Der allgemeinste (*Dirichlet*'sche) Funktionsbegriff und derjenige der Funktionentheorie im engeren Sinne.
4. Reelle Veränderliche.
5. Allgemeinste eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen.
6. Obere (untere) Grenze und Schwankung einer Funktion.
7. Grenzwerte und Unbestimmtheitsgrenzen.
8. Unendliche Werte der Function und des Arguments.
9. Die stetige Funktion.
10. Die differenzierbare Funktion.
11. Die abteilungsweise monotone und die gewöhnliche Funktion.
12. Die unbeschränkt differenzierbare und die analytische Funktion.
13. Uneigentliche Funktionswerte. Die unbestimmten Darstellungsformen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ etc.
14. Unstetigkeitspunkte.
15. Singuläre Stellen.
16. Definition von Funktionen durch Grenzwerte. Gleichmässige Konvergenz.
17. Gleichmässige Konvergenz unendlicher Reihen.
18. Kondensation von Singularitäten.
19. Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten.
20. Stetige Funktionen mit unendlich vielen Singularitäten.

II. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

21. Bereiche von n Veränderlichen.
22. Funktionen von n Veränderlichen. — Stetigkeit.
23. Simultane und successive Grenzübergänge.
24. Gleichmässige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion.

Litteratur.

Lehrbücher.

Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum. I. Lausannae 1748. Deutsch von *Michelsen* (Berlin 1788) und *H. Maser* (Berlin 1885).

Augustin Cauchy, Cours d'analyse de l'école polytechnique. — I. Analyse algébrique. Paris 1821. Dtsch. von *B. Huzler*, Kgsb. 1828; *C. Itzigsohn*, Berlin 1885.

Charles Méray, Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872.

„ „ Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale. I. Paris 1894.

Rudolf Lipschitz, Lehrbuch der Analysis. I. II. Bonn, 1877. 1880.

Ulisse Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878. Dtsch. Bearb. von *J. Lüroth* und *A. Schepp* u. d. Titel: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse. Leipzig 1892*).

J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Halle 1880. Zweite Aufl. Halle 1898.

Axel Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881.

Moritz Pasch, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1882.

Angelo Genocchi, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Pubblicato con aggiunte di *G. Peano*, Tor. 1884; dtsch. v. *G. Bohlmann-A. Schepp*, Lpz. 1898.

Otto Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. I. Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. Leipzig 1885. (Citiert als: Arithm. 1.)

Otto Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 1. Reelle Veränderliche und Funktionen. Leipzig 1893. (Citiert als: Grundz. 1.)

Jules Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1886.

Ph. Gilbert, Cours d'analyse infinitésimale. Partie élém. 4. éd. Paris-Brux. 1892.

Harry Gravelius, Lehrbuch der Differentialrechnung. Berlin 1893.

G. Peano, Lezioni di analisi infinitesimale. I. II. Torino 1893.

Cam. Jordan, Cours d'analyse de l'éc. polyt. I. Calcul différentiel. 2. éd. Paris 1893.

Ernesto Pascal, Esercizî e note critiche di calcolo infinitesimale. Milano 1895.

Giulio Vivanti, Corso di calcolo infinitesimale. Messina 1899**).

Monographien.

Bernhard Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag 1817.

Bernhard Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, hsg. v. Fr. Prihonski. Lpz. 1851.

Bernhard Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonom. Reihe. Habil.-Schr. von 1854, publ. Gött. Abh. 13, 1867. (Ges. W. 1876, p. 213—253.)

Hermann Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Funktionen. Univ.-Programm, Tübingen 1870; Math. Ann. 20 (1882), p. 63—112. (Die Citate beziehen sich auf diesen Wiederabdruck.)

Paul Du Bois-Reymond, Die allgemeine Funktionentheorie. I (einz.). Tübingen 1882.

Emile Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Paris 1898.

*) Die schlechthin mit *Dini* und *Paragraphen*zahlen bezeichneten Citate passen auf *beide* Ausgaben. Stellen, die sich nur in der *deutschen* Ausgabe finden, sind mit *Dini-Lüroth* und *Seiten*zahlen citiert.

**) Von den Lehrbüchern sind hier nur diejenigen angeführt, welche sich ausführlicher mit den *Grundlagen* der Funktionenlehre beschäftigen. Vgl. im übrigen die Litteratur von II A 2.

I. Funktionen einer Veränderlichen.

1. Veränderliche und Funktionen: Historisches[1]). Der Begriff der *veränderlichen Grössen* (*Variablen*) und der *Funktionen* einer oder mehrerer Veränderlichen verdankt seine Entstehung und erste Ausbildung der *Koordinatengeometrie*. Die von *Descartes*[2]) und *Fermat*[3]) begründete Methode, jeden einzelnen Punkt einer Ebene durch zwei *Koordinaten*, d. h. schliesslich durch zwei bestimmte *Zahlen* eindeutig zu charakterisieren, liefert als arithmetisches Abbild einer ebenen Kurve ein unendliches System von (reellen) Zahlenpaaren (x, y) derart, dass jedem in betracht kommenden Werte x ein oder mehrere Werte y als „*Funktion*" von x zugeordnet erscheinen, und diese Anschauung hat umgekehrt dazu geführt, ein durch irgendwelche arithmetische Beziehung in (x, y) definiertes y in seiner Eigenschaft als „*Funktion*" von x zu untersuchen, d. h. die *Wertveränderungen* ins Auge zu fassen, welche y bei *veränderlichem* x erleidet. Die von den älteren Analysten angeblich[4]) als synonym mit *Potenz* gebrauchte Bezeichnung *Funktion* findet sich zuerst bei *Gottfr. Wilh. Leibniz* als Ausdruck für solche *Längen* (wie Abscisse, Ordinate, Tangente, Normale, Krümmungsradius und „*unzählige andere*"), die zu den einzelnen (als veränderlich gedachten) Punkten einer Kurve in bestimmten Beziehungen stehen[5]). In diesem Sinne zunächst von *Jac. Bernoulli*[6]) übernommen, wird sie bald darauf etwas allgemeiner von *Joh. Bernoulli*[7]) angewendet und gewinnt schliesslich bei letzterem die Bedeutung einer „*aus einer Veränderlichen und irgendwelchen Konstanten zusammengesetzten Grösse*"[8])

1) Vgl. *Klügel*, Math. Wörterb. 2 (1805), p. 272. — *M. Cantor*, Gesch. der Math. 3, p. 348. — *Hermann Hankel*, Math. Ann. 20 (1882), p. 63. — *A. Brill* und *M. Noether*, Jahresb. d. D. M. V. 3 (1894), p. 127. 140.

2) *René Descartes*, Géométrie, Paris 1637.

3) *Pierre de Fermat*, Ad locos planos et solidos isagoge (Zeit der Abfassung unbekannt: M. Cantor, a. a. O. 2, p. 745): Varia op. math., Tolosae 1679, p. 1.

4) S. z. B. *J. L. Lagrange*, Théorie des fonctions analytiques (Paris 1797), § 1 (Oeuvres 9, p. 16); *S. F. Lacroix*, Traité de calc. diff. et intégr. 1 (Paris 1797 bezw. 1810), p. 1. Eine wirkliche Bestätigung dieser Angabe habe ich bisher nicht auffinden können.

5) Acta erud. 1692, p. 170; 1694, p. 316 (Opera, ed. Dutens 3, p. 266, 300, 302).

6) Acta erud. 1694, p. 391 (Opera 1, p. 618. Vgl. auch: 2, p. 788).

7) In einer zunächst an *Leibniz* im J. 1698 mitgeteilten Abhandlung (vgl. Comm. epist. 1, p. 386), publiziert: Par. Mém. 1706, p. 235 (Opera 1, p. 424), spricht *Joh. Bernoulli* schon von „*beliebigen Funktionen der Ordinaten*".

8) Par. Mém. 1718, p. 106 (Opera 2, p. 241).

oder, noch etwas prägnanter bei *Leonh. Euler*[9]), eines aus den genannten Bestandteilen zusammengesetzten *„analytischen Ausdrucks"*.

2. Fortsetzung: Der Euler'sche Funktionsbegriff. Die zuletzt erwähnte Definition erscheint an der Spitze von *Euler's Introductio*[10]), der ersten zusammenhängenden Darstellung einer *elementaren Funktionenlehre;* sie umfasst zunächst nur den Begriff der sog. *expliciten* Funktion und wird von *Euler* alsbald dahin erweitert, dass y auch dann noch eine *Funktion* von x, und zwar eine *implicite* gegebene heisst, wenn zwischen x und y eine (*eventuell nicht algebraisch auflösbare*) *algebraische Gleichung* besteht[11]).

Im übrigen teilt *Euler* je nach der Beschaffenheit des *definierenden Ausdrucks* die Funktionen in *algebraische* und *transcendente*, sodann in *eindeutige* und *mehrdeutige*. Eine Funktion y heisst *algebraisch*, wenn sie aus x durch eine *begrenzte* Anwendung von Elementaroperationen (vier Spezies) und Radicierungen gewonnen werden kann, oder allgemeiner, wenn zwischen x und y eine algebraische Gleichung: $\sum_0^n \sum_0^m a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0$ vorliegt[12]); sie heisst *transcendent*, wenn *transcendente Operationen*, d. h. nach *Euler*: „Logarithmen, Exponentialgrössen und unzählige andere durch Integration resultierende" in dem definierenden Ausdrucke vorkommen[13]). Auch wenn man von der Unvollständigkeit dieser letzteren Definition absieht[14]), so ist gegen diese Einteilung zweierlei zu bemerken, nämlich: 1) Eine *Funktion* im *Euler*'schen Sinne, d. h. ein bestimmter analytischer Ausdruck kann

9) Die *Zeichen* $f(x)$, $f(ax+b)$ etc. wurden ebenfalls von *Euler* eingeführt: Comm. Petrop. 7 (ad 1734/35), p. 186bis (d. h. eigentlich 196, da falsch paginiert). Ähnliche Bezeichnungen (wie Πx, Φx, Δx) ungefähr gleichzeitig bei *Alexis Clairaut:* Par. Mém. 1734, p. 197. — Über die von *Leibniz* und *Joh. Bernoulli* angewendeten Funktionsbezeichnungen s. *M. Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 438.

10) Cap. I, § 4.

11) A. a. O. § 8.

12) Ist $n=1$, so heisst y *rational*; reduziert sich zugleich der Faktor von y auf eine *Constante,* so heisst die *rationale* Funktion eine *ganze,* sonst eine *gebrochene* (a. a. O. § 8, § 9).

13) In noch speziellerem Sinne hat *Joh. Bernoulli* den Ausdruck *transcendente Funktionen* gebraucht: Par. Mém. 1730, p. 79 (Opera 3, p. 174). Allgemeiner hat *Leibniz* als auf *„quantitates transcendentes"* führend solche *„problemata"* charakterisiert, *„quae omnem aequationem algebraicam transcendant"* (Acta erud. 1686; Opera 3, p. 190).

14) *Vollständig* lässt sich dieselbe in Wahrheit nicht anders als *negativ* fassen, etwa: Eine Funktion heisst in der Nähe irgend eines Wertes x *transcendent,* wenn sie daselbst *nicht algebraisch* ist.

in verschiedenen Intervallen teils *algebraisch*, teils *transcendent* sein[15]). 2) Der *algebraische* oder *transcendente* Charakter einer Funktion lässt sich überhaupt nicht erschöpfend durch den besonderen Typus des als Definition zulässigen *analytischen Ausdrucks* bezeichnen. Insbesondere können Ausdrücke, welche eine *unbegrenzte* Anzahl von Elementaroperationen in sich schliessen, auch *algebraische* Funktionen definieren[16]), sodass andererseits auch ihre etwaige *Transcendenz* in jedem Falle erst besonders bewiesen werden muss[17]). Nur soviel steht *a priori* fest, dass lediglich die Werte einer *rationalen* Funktion für *jeden* einzelnen Wert x durch eine *begrenzte* Anzahl von Anwendungen der vier Spezies berechnet werden können, alle übrigen Funktionen *im allgemeinen*[18]) nur durch eine *unbegrenzte* Anzahl (also mit *Hülfe* von *Grenzübergängen*, sonst nur *näherungsweise*)[19]).

3. Fortsetzung: Der allgemeinste (Dirichlet'sche) Funktionsbegriff und derjenige der Funktionentheorie im engeren Sinne. Der Anstoss zur weiteren Ausbildung des Funktionenbegriffes ging zunächst von der Physik aus. Durch Untersuchungen über das Problem der schwingenden Saiten, die von *Jean Lerond d'Alembert* begonnen wurden[20]) und an denen sich sodann *Euler*, *Dan. Bernoulli* und *Louis Lagrange* beteiligten[21]), wurde insbesondere *Euler* dazu geführt, sog. *willkürliche Funktionen*, z. B. lediglich *graphisch gegebene* (d. h. innerhalb eines Cartesischen Koordinatensystems durch eine aufs Geratewohl gezeichnete Kurve repräsentirte) *Abhängigkeiten* in die Lösungen einer gewissen partiellen Differentialgleichung einzuführen[22]). Da die entsprechenden Lösungen bei *Dan. Bernoulli* in der Form *trigonometrischer Reihen* erschienen[23]), so ergab sich die Alternative,

15) Vgl. 3.

16) *Beispiel:* $y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{6^6} - \cdots = +\sqrt{1+x^2}$ für $|x| \leqq 1$.

17) z. B. diejenige von $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x}{3} - \cdots = \lg(1+x^2)$ für $|x| \leq 1$.

18) D. h. mit eventuellem Ausschlusse *besonderer* Werte von x (solche sind z. B. für $y = \sqrt{x}$ die Quadrate rationaler Zahlen, für $y = 2^x$ die ganzen Zahlen).

19) Die Auffindung solcher, lediglich die Anwendung der vier Spezies (in unbegrenzter Anzahl) erfordernder Ausdrücke (z. B. unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche — vgl. I A 3) zur Berechnung der nicht-rationalen Funktionen ist die eigentliche Fundamentalaufgabe der Analysis.

20) Berl. Mém. Année 1747, p. 214.

21) Näheres darüber in *Bernh. Riemann*'s Habil.-Schrift: Werke p. 214 ff.

22) Berl. Mém. Année 1748, p. 69.

23) Ibid. Année 1753, p. 147.

dass entweder *jede willkürliche Abhängigkeit* durch eine solche *Reihe* darstellbar sein müsse, oder dass die *Bernoulli*'sche Lösung nicht die volle Allgemeinheit besitze[24]). Naturgemäss neigte man sich zunächst der *letzteren Ansicht* zu, und nur *Lagrange* machte einen (unzulänglichen) Versuch, die Richtigkeit der *ersteren* wenigstens *in beschränktem Umfange*[25]) zu beweisen. Erst durch *Jean Bapt. Jos. Fourier* wurde dieselbe mit schärfster Betonung des *willkürlichen* (etwa graphischen) Charakters der darzustellenden Funktion *ausgesprochen* und durch formale Aufstellung der (nach ihm benannten) Reihenentwickelung, d. h. durch wirkliche Angabe der betreffenden *Reihenkoeffizienten* (in Form bestimmter Integrale)[26]) *annehmbar gemacht*[27]), schliesslich durch Hinzufügung des (sehr wesentlichen) *Konvergenzbeweises* von *G. Lejeune-Dirichlet* definitiv erwiesen[28]).

Durch die Erkenntnis, dass jede (mit gewissen Einschränkungen[29]) *willkürlich vorgeschriebene*, z. B. eine *graphisch* gegebene oder in *verschiedenen* Intervallen durch *verschiedene* Rechnungsvorschriften[30]) definierte Abhängigkeit durch eine trigonometrische Reihe, also *durch einen bestimmten analytischen Ausdruck im Sinne Euler*'s darstellbar sei, war sowohl die Möglichkeit einer *Erweiterung*, als auch die Notwendigkeit einer *Einschränkung* des *Euler*'schen Funktionsbegriffes gegeben.

Denn einmal lag nun kein Grund mehr vor, die Definition der Funktion an die *Präexistenz* eines einheitlichen *analytischen* (besser: *arithmetischen*) *Ausdruckes* zu knüpfen, insofern ja ein solcher im all-

24) *Euler*, ibid. p. 196.

25) *Nämlich* Darstellbarkeit einer *analytisch* gegebenen Funktion: Misc. Taur. 3 (1762—65), p. 221 (Oeuvres 1, p. 514); *dagegen* nur *näherungsweise* Darstellbark. einer *graphisch* gegebenen Abhängigkeit: Misc. Taur. 3, p. 261 (Oeuvres 1, p. 552). Vgl. auch *Riemann*'s Bemerkungen über die letztere Stelle (a. a. O. p. 219).

26) Die fragliche Integraldarstellung der Koeffizienten findet sich übrigens schon bei *Euler* in einer Abh. aus dem J. 1777 (publ. 1798, N. A. Petrop. 11, p. 114).

27) In der Hauptsache schon in einem 1807 der Par. Akademie vorgelegten Mémoire, von dem nur ein Auszug (von *S. D. Poisson*) gedruckt worden ist: Bull. soc. philom. 1 (1808), p. 112 (*Fourier*, Oeuvres 2, p. 215); ausführlicher in einer Abhandlung von 1811 (publ. Par. Mém. 1819/20; vgl. insbes. p. 281, 326), deren Inhalt fast unverändert in die „Théorie analytique de la chaleur" (1822) übergegangen ist: Chap. III, Sect. VI (Oeuvres 1, p. 187 ff., vgl. insbes. p. 209, 230).

28) J. f. Math. 4 (1829), p. 157; Repert. Phys. 1 (1837), p. 152 (Werke 1, p. 119. 135).

29) Vgl. II A 8.

30) Derartige Abhängigkeiten in geometrischer Deutung wurden von *Euler* als *„curvae discontinuae, mixtae vel irregulares"* bezeichnet (Introd. 2, Cap. I, § 9). — Über Ausdrücke wesentlich einfacherer Natur, welche nach Art der F.'schen Reihen solche *„curvae mixtae"* darstellen können, vgl. I A 3, **39**, Fussn. 283.

gemeinen[29]) *a posteriori* stets herstellbar erscheint[31]). Infolge dessen definierte *Dirichlet*[32]) *y als eine (eindeutige) Funktion von x im Intervalle (a, b), wenn jedem Werte $a \leq x \leq b$ ein bestimmter Wert y entsprieht,* ohne Rücksicht darauf, in welcher Weise die Zuordnung der y-Werte zu den einzelnen x bewerkstelligt wird.

Andererseits bietet aber, wie die F.'sche Reihe lehrt, die Definition einer Funktion durch einen *analytischen Ausdruck* keinerlei Garantie für die Existenz gesetzmässiger, verschiedenen x-Intervallen gemeinsamer Eigenschaften (etwa nach Art der algebraischen Funktionen). Hatte man es bisher als selbstverständlich angesehen, dass zwei Reihen, welche, in *verschiedenen* Gebieten konvergierend, die nämliche *algebraische* Funktion zur Summe haben[33]), als Darstellungen *einer einzigen* Funktion gelten müssten, so fehlte in Wahrheit jedes allgemeine Kriterium dafür, unter welchen Umständen *irgend* zwei *verschiedene*, lediglich in *verschiedenen* einander ausschliessenden Intervallen einen bestimmten Sinn besitzende Ausdrücke als zu *einer* Funktion gehörig anzusehen seien; und was man unter der *„Fortsetzung"* einer Funktion verstehen solle, die zunächst nur durch einen Ausdruck mit *beschränktem* Existenzgebiet definiert erscheint. Diese Schwierigkeiten wurden erst durch die prinzipielle Einführung *komplexer* Veränderlicher und eine damit verbundene passende *Einschränkung* des Funktionsbegriffes gehoben. Die so geschaffenen speziellen Funktionsbegriffe, nämlich der *Cauchy-Riemann*'sche der im komplexen Sinne *differenzierbaren*[34]) und der *Lagrange-Weierstrass*'sche der durch Potenzreihen darstellbaren *analytischen* Funktion, welche trotz der

31) Hierbei ist man keineswegs auf die F.'sche Reihe oder verwandte *„Darstellungsformeln"* (vgl. II A 8) angewiesen. Nicht selten lassen sich Funktionen, welche von dem ursprünglichen *Euler*'schen Funktionsbegriffe sehr weit entfernt zu sein scheinen, durch verhältnismässig einfache Grenzwertbildungen analytisch fixieren; so z. B. die von *Dirichlet* (Werke 1, p. 132) angeführte Funktion y, welche für alle *rationalen* x: $= c$, für alle *irrationalen:* $= d$ wird, durch: $y = (c - d) \lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} \cos n! \pi x^m + d$. Andere Darstellungsmittel s. 9, 18.

32) Werke 1, p. 135. — Eine dem Wortlaute nach ähnliche Definition bei *Lacroix* (a. a. O. p. 1) ist, wie die angeführten Beispiele erkennen lassen, noch keineswegs in dem allgemeinen *Dirichlet*'schen Sinne zu verstehen.

33) *Beispiel:* $+\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^8}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^{12}}{6} - \cdots$ für $|x| \leqq 1$,

$$+\sqrt{1+x^4} = x^2\left\{1 + \frac{x^{-4}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-8}}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^{-12}}{6} - \cdots\right\} \text{ für } |x| \geqq 1.$$

34) Bei *Aug. Cauchy* (Exerc. d'anal. 4 [1847], p. 346) als *monogene* Funktion, bei *Riemann* (Dissert. [1851] § 12; Werke, p. 23) schlechthin als *Funktion* (einer komplexen Veränderlichen) bezeichnet.

gänzlich verschiedenen Definitionsform im wesentlichen sich als äquivalent erweisen[35]), bilden den ausschliesslichen Untersuchungsgegenstand der gewöhnlich als *Funktionentheorie* schlechthin bezeichneten Disziplin[36]). Dagegen hat die *allgemeine Funktionenlehre*, unter Beschränkung auf *reelle* Veränderliche, die genaue Durchforschung des allgemeinsten (*Dirichlet*'schen) Funktionsbegriffes und der durch ihn geschaffenen Möglichkeiten sich zur Aufgabe gemacht[37]).

4. Reelle Veränderliche[38]). Unter einer *reellen Veränderlichen* (*Variablen*) versteht man ein *Zeichen*, gewöhnlich einen der letzten Buchstaben des Alphabetes[39]), dem successive *verschiedene Zahlenwerte* (z. B. alle möglichen zwischen zwei bestimmten, alle rationalen, alle ganzzahligen) beigelegt werden. Die Gesamtmenge der letzteren, welche *endlich*, *abzählbar-unendlich* oder *von der Mächtigkeit des Linearcontinuums*[40]) sein kann, wird der *Bereich* der Veränderlichen genannt und mag, wenn diese selbst x heisst, mit (x) bezeichnet werden. Da mit Annahme des *Cantor-Dedekind*'schen *Axioms*[41]) das Gebiet der reellen Zahlen ein-eindeutig den Punkten einer Geraden zugeordnet werden kann, so erscheint eine gewisse lineare *Punktmenge* als geometrisches Abbild eines solchen *Bereiches*. Die Bezeichnungen *Punkt* oder *Stelle* x werden infolge dessen als synonym mit *Zahlenwert* x gebraucht, und zur Charakterisierung der möglichen Gestalten eines *Bereiches* bedient man sich mit Vorteil der in der *Cantor*'schen Mengenlehre geschaffenen Terminologie[42]).

---

35) Gewisse Zweifel, welche die *Cauchy-Riemann*'sche Definition bezüglich des *Fortsetzungsbegriffes* noch übrig lässt (vgl. *Herm. Hankel*, a. a. O. p. 105, 109), sind freilich erst durch *K. Weierstrass* auf Grund *seines* Funktionsbegriffes definitiv erledigt worden: Berl. Ber. 1880, p. 729 (Werke 2, p. 210). — Vgl. auch: *Ph. L. Seidel*, J. f. Math. 73 (1871), p. 300.

36) Vgl. II B 1.

37) Die durch Fourier'sche Reihen darstellbaren, innerhalb sehr weiter Grenzen *willkürlichen reellen Funktionen* lassen sich als *Grenzfälle analytischer Funktionen* auffassen: vgl. *Hankel*, a. a. O. p. 109; *S. Pincherle* (nach *Weierstrass*): Giorn. di mat. 18 (1880), p. 254. Im übrigen vgl. II B 1 („*Dirichlet*'*sches Prinzip*").

38) Die in dieser Nummer zusammengestellten Definitionen und Sätze, deren Ursprung im einzelnen sich wohl kaum genau feststellen lässt, dürften im wesentlichen aus *Weierstrass*' Vorlesungen in die Litteratur übergegangen sein.

39) Seit *Descartes* (Fussn. 2). Noch *Fermat* (Fussn. 3) schreibt (nach dem Vorgange von *Franc. Vieta* [1540—1603], welcher allgemein *Vokale* zur Bezeichnung von *Unbekannten* benützte) *A*, *E* statt x, y.

40) Vgl. I A 5, **2**.

41) Vgl. I A 3, **3**, **4**.

42) Vgl. insbes. **11**, **15**, **16**; I A 5.

Der Bereich (x) heisst *endlich*, wenn sämtliche $|x|$ unter einer bestimmten positiven Zahl liegen. In diesem Falle besitzen die x in dem analogen Sinne wie die Terme einer abzählbaren Menge (Zahlenfolge)[43]) eine bestimmte *obere* und *untere Grenze* G, g (welche aber nicht notwendig dem Bereiche (x) anzugehören brauchen)[44]) und, wenn die Menge der x unendlich ist, *mindestens eine* (ebenfalls nicht notwendig zu (x) gehörige) *Häufungsstelle* (einen *Grenzpunkt*) *a.*[45]) Gehört G (bezw. g) zu (x), so haben die x ein (*reales*)[46]) *Maximum* (bezw. *Minimum*); andernfalls ist G (bezw. g) allemal ein a (was in dem zuvor erwähnten Falle gleichfalls *möglich*, aber *nicht notwendig* ist).

Gehören zu (x) Werte, die *jede* positive Zahl A übersteigen, so heisst die *obere* Grenze der x-Werte $+\infty$; da alsdann bei beliebig grossem A stets *unendlich viele* x der Beziehung $x > A$ genügen müssen, so sagt man wohl auch: die „*Stelle*“ $+\infty$ sei eine Häufungsstelle der x.[47]) Das analoge gilt bezüglich der *unteren* Grenze und $-\infty$.[48])

Die vorstehenden Definitionen und Sätze gelten sowohl für *unabhängige* als für *abhängige Veränderliche* (s. 5).

5. Allgemeinste eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen. Der in 3 erwähnte *Dirichlet*'sche Funktionsbegriff bedarf, um arithmetisch brauchbar zu sein, auch wenn man grösstmögliche Allgemeinheit anstrebt, immerhin noch einer gewissen Einschränkung. Zunächst würde nach dem dort gesagten eine für irgend einen Bereich (x) bestehende Beziehung von der Form: $y = f(x)$ lediglich eine Art tabellarischer Zuordnung der einzelnen y zu den einzelnen x bedeuten. Sieht man aber von dem (kein besonderes Interesse gewährenden) Falle ab, dass (x) nur aus einer *endlichen* Zahlenmenge besteht, so kann die fragliche, nunmehr stets *unendlich viele* Data umfassende Zuordnung immer nur durch eine allgemeine *arithmetische*

---

43) Vgl. I A 3, **16**.

44) Dieser von *Weierstrass* (s. *Pincherle*, a. a. O. p. 242) besonders betonte Satz schon bei *Bernh. Bolzano:* Rein analyt. Beweis etc., p. 41 (vgl. *Stolz*, Math. Ann. 18 [1881], p. 257; auch Allg. Arithm. 1, p. 149. *Stolz* hebt hervor [p. 151], dass der Beweis kein Mittel liefert, um G, g zu *bestimmen* oder auch nur die *Endlichkeit* von G, g festzustellen). *M. Pasch* (Math. Ann. 30 [1887], p. 133) bezeichnet $G(g)$ als obere (untere) *Schranke* und gebraucht den Ausdruck *Grenze* für *Häufungsstelle* (ferner: obere [untere] *Grenze* für oberen [unteren] *Limes;* s. 7).

45) *Pincherle*, a. a. O. p. 237. — Vgl. auch: I A 5, **1**.

46) Vgl. I A 3, **16**, Fussn. 123.

47) *Pincherle*, a. a. O. p. 241.

48) Eine andere Auffassung des Unendlichen s. 8.

Definition, d. h. durch eine geeignete *Rechenvorschrift*[49]) im weitesten Sinne bewerkstelligt werden. Die letztere kann übrigens für *verschiedene Intervalle* oder *Zahlklassen* von (x) *verschieden* sein, sogar aus einer abzählbar-unendlichen Menge von Einzelvorschriften bestehen[50]).

Andererseits kann eine lediglich *graphisch* gegebene Abhängigkeit nur dann zur vollkommenen Definition einer Funktion $y = f(x)$ dienen, wenn ihre Herstellung auf einem (geometrischen oder mechanischen) *Gesetze* beruht[51]), welches in eine *Rechenvorschrift* transformiert werden kann[52]). Dagegen definiert eine *aufs Geratewohl gezeichnete* Kurve in Wahrheit überhaupt keine bestimmte Funktion[53]); denn durch blosse *Messung* ihrer *Abscissen* und der zugehörigen *Ordinaten* können die Zahlenwerte der x und y bei der Unvollkommen-

49) Die Rechenvorschrift muss so beschaffen sein, dass $f(x)$ für einen *irrationalen* Wert $x = a$ nicht von der speziellen Wahl der zur Definition von a benützten Zahlenfolge (a_ν) abhängt: *E. Heine*, J. f. Math. 74 (1872), p. 180. Vgl. auch p. 181, Anm.

50) Setzt man z. B. fest, dass

$$\text{für: } 1 \geqq x > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \geqq x > \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \geqq x > \frac{1}{n+1} \cdots \cdots x = 0,$$

$$y = x, \qquad y = \frac{x}{2} \quad \cdots \quad y = \frac{x}{n} \qquad \cdots \cdots y = 0,$$

(wo n jede natürliche Zahl bedeutet), so ist durch diese abzählbare Vorschriftenmenge y für *jeden* Wert des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ eindeutig definiert. — Eine ausführliche Untersuchung der bezüglich der Definition von y bestehenden Möglichkeiten hat neuerdings *T. Brodén* angestellt: Acta Lund. 8 (1897), p. 1—7.

51) Dahin gehören die ebenen *geometrischen Örter* von Punkten, welche gewissen geometrischen Forderungen genügen, die *trigonometrischen Funktionen* der elementaren Trigonometrie, die von den Punkten irgendwelcher Mechanismen beschriebenen *Bewegungscurven*.

52) Das Erzeugungsgesetz darf also eventuell auch in eine abzählbare Menge von Einzelgesetzen zerfallen.

53) Dem widerspricht nicht, dass die Ordinaten einer „gewöhnlichen" (vgl. **11**), etwa für $-\pi < x < +\pi$ willkürlichen Kurve mit Hülfe einer Fourierschen Reihe (*scheinbar*) *arithmetisch* als Funktionen der Abscissen x dargestellt werden können. Denn die als Koefficienten auftretenden Integrale: $\int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (nx) \cdot dx$ sind in Wahrheit *keine Zahlen*, sondern lediglich Repräsentanten *geometrisch* (und für $n \geqq 1$ sogar nur *approximativ*) gegebener *Flächenstücke* (aus der blossen *Zeichnung* der Kurve $y = f(x)$ kann nämlich diejenige von $y_n = f(x) \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (nx)$ nur *näherungsweise* hergestellt werden). Für die Existenz der entsprechenden *Flächenzahlen* (vgl. I A 3, **12**) ist allemal die *arithmetische* Bestimmtheit von y für jedes einzelne x des Intervalls $-\pi < x < +\pi$ erforderlich.

heit geometrischer Anschauung immer nur *approximativ* bestimmt werden[54]). Hiernach gelangt man etwa zu folgender Definition:

> y heisst eine im Bereiche (x) *eindeutige Funktion* von x, wenn für jeden einzelnen zu (x) gehörigen Wert x ein bestimmter Wert y *arithmetisch definiert* ist[55]).

Man nennt sodann x die *unabhängige Veränderliche* oder das *Argument* der Funktion $y = f(x)$, welche auch als *abhängige Veränderliche* bezeichnet wird.

Die Ausdrucksweise: x *konvergiere* gegen einen gewissen Wert a — in Zeichen: $\lim x = a$ — besagt: x durchläuft die Werte irgend einer dem Bereiche (x) angehörigen Zahlenfolge mit dem Grenzwerte a,[56]) diesen selbst *ausgeschlossen*. Findet die Annäherung an a ausschliesslich von der Seite der *grösseren* bezw. *kleineren* Zahlen statt, so schreibt man nach dem Vorgange von *Dirichlet* (s. 7, Fussn. 68): $\lim x = a + 0$ bezw. $x = a - 0$.[57])

Die unabhängige Veränderliche x heisst *stetig im Intervalle* (x_0, X), wenn sie *alle* reellen Zahlenwerte $x_0 \leq x \leq X$ annimmt; sie heisst *stetig im Innern des Intervalls* (x_0, X) oder auch[58]): *im Intervalle* $(x_0 + 0, X - 0)$, wenn sie nur alle Werte $x_0 < x < X$ annimmt[59]). Unter der *Umgebung* einer im Innern von (x_0, X) liegenden Stelle a versteht man sämtliche Zahlenwerte eines beliebig kleinen Intervalls $(a - \delta, a + \delta)$, wo $x_0 \leq a - \delta < a + \delta \leq X$. Als *rechts-* bezw. *linksseitige Umgebung* wird sodann ein Intervall von der Form $(a, a + \delta)$ bezw. $(a - \delta, a)$ bezeichnet. Ist $a = x_0$ bezw. $a = X$, so kommt als *Umgebung* schlechthin immer nur die *rechts-* bezw. *linksseitige* in Betracht.

---

54) Vgl. *F. Klein*, Erl. Ber. 1873, abgedr. Math. Ann. 22 (1883), p. 249.

55) Entsprechend für *mehrdeutige* Funktionen. — Im folgenden soll unter *Funktion* schlechthin immer eine *eindeutige* Funktion in dem oben angegebenen Sinne verstanden werden.

56) Vgl. I A 3, **13.**

57) Entsprechende Bedeutung besitzen die Bezeichnungen: $\lim x = +\infty$, $\lim x = -\infty$.

58) Nach *Pasch*, a. a. O. p. 133. Entsprechende Bedeutung kommt den Bezeichnungen $(x_0 + 0, X)$, $(x_0, X - 0)$ zu.

59) Ist $\lim x_0 = -\infty$, $\lim X = +\infty$, so wird x auch *unbeschränkt veränderlich* genannt (*Weierstrass*). — *Bolzano* (vgl. *Stolz*, a. a. O. p. 257) bezeichnet ein im Intervalle (x_0, X) *stetig* veränderliches x als *frei* veränderlich und nennt andererseits x *stetig* veränderlich, falls (x) Eigenschaften besitzt, die nicht nur (wie B. fälschlich annimmt) jeder *überall-dichten*, sondern auch gewissen *imperfecten in sich dichten* Mengen zukommen (vgl. I A 5, **11**).

6. Obere (untere) Grenze und Schwankung einer Funktion. Ist $y = f(x)$ *für jede einzelne Stelle* des Intervalls (x_0, X) als *bestimmte endliche Zahl* definiert, so braucht $f(x)$ noch keineswegs *„im Intervalle endlich"* zu sein, d. h. für $x_0 \leq x \leq X$ *numerisch unter einer festen Schranke* zu bleiben[60]). Ist aber diese Bedingung erfüllt, so besitzen die y (nach **5**) eine bestimmte *obere* und *untere Grenze* G, g; wenn *nicht*, so erscheinen je nach Umständen wieder die Symbole $+\infty$ bezw. $-\infty$ als *obere* bezw. *untere Grenze* der y. Im *ersten* Falle heisst die (niemals negative) Differenz $D = G - g$ die *Schwankung*[61]) von $f(x)$ im Intervalle (x_0, X); im *zweiten* bezeichnet man die *Schwankung* von $f(x)$ als *unendlichgross* $(D = +\infty)$.

Die obere (untere) Grenze braucht, auch wenn sie *endlich* ist, für keinen einzigen Wert $x = a$ von der Funktion y wirklich *erreicht* zu werden[62]); vielmehr gilt lediglich der folgende, von *Weierstrass*[63]) herrührende Satz: *Ist* Γ *(wo* $\Gamma = G$ *bezw.* $= +\infty$*) die obere Grenze der* y *im Intervalle* (x_0, X)*, so giebt es daselbst eine, bezw. eine erste Stelle* a*, sodass für eine beliebig kleine Umgebung von* a *die obere Grenze der* y *den Wert* Γ *hat. — Das analoge gilt bezüglich der unteren Grenze.*

Der Satz lässt sich auch auf den Fall übertragen, dass y nur für *irgendeine* dem Intervalle (x_0, X) angehörige *Punktmenge* definiert ist[64]).

7. Grenzwerte und Unbestimmtheitsgrenzen. Es sei $f(x)$ definiert für einen gewissen (stetigen oder unstetigen) Bereich (x) mit der *unteren Grenze* und *Häufungsstelle* a; ob für a selbst, ist gleichgültig. Alsdann bestehen folgende Möglichkeiten:

I. Es existiert eine bestimmte Zahl b, sodass bei *beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$:

(1) $\quad |b - f(x)| < \varepsilon$, wenn: $x - a < \delta$ (d. h. *hinlänglich klein*).

Man sagt in diesem Falle, $f(x)$ habe für $\lim x = a + 0$ (vgl. **5**)

60) Schon von *C. F. Gauss* bemerkt: Dissert. 1799 (Werke 3, p. 10). — *Beispiel:* $f(x) = (1 - x^2) \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{(1+x)^n - 1}{(1+)\, x^n + 1}$ im Intervalle $(-1, +1)$. Man hat $G = +1$, $g = -1$, welchen Werten $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ beliebig nahe kommt, während $f(0) = 0$ ist. Vgl. dagegen **9**, Satz II.

61) Nach *Riemann:* Werke, p. 226. Die Schwankung im Intervalle $(x_0 + 0, X - 0)$ bezeichnet *Pasch* (a. a. O. p. 139) als *innere* Schwankung.

62) *Beispiel:* $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{nx}{nx^2 + 1}$ in jedem die Stelle $x = 0$ enthaltenden Intervalle.

63) *Pincherle,* a. a. O. p. 249.

64) Vgl. *Pasch,* a. a. O. p. 134. — Andere Verallgemeinerung des betr. Grundgedankens s. *Pasch,* Diff.-R. p. 46.

den *Grenzwert* (*Limes*) b, oder auch: $f(x)$ habe bei $x = a$ den *rechtsseitigen* (*rechten, vorwärts gebildeten*)[65] *Grenzwert* b;[66] in Zeichen:

(2) $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = b$,[67] oder kürzer[68]: (2a) $f(a+0) = b$.

Die *notwendige und hinreichende* Bedingung für das Eintreten dieses Falles lautet[69]:

(3) $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, wenn: $x_2 - a < x_1 - a < \delta$.

II. Man hat, wie *gross* auch $A > 0$ angenommen werden möge:

(4) $f(x) > A$ bez. $< -A$, wenn: $x - a < \delta$.

Alsdann bezeichnet man $+\infty$ bezw. $-\infty$ als den fraglichen Grenzwert, in Zeichen:

(5) $\lim\limits_{x=a+0} f(x) \equiv f(a+0) = +\infty$ bezw. $= -\infty$.

Eine *hinreichende* Bedingung für das Eintreten des Falles I oder II bildet das *monotone*[70] Verhalten von $f(x)$ bei abnehmendem x. Bleibt zugleich $|f(x)|$ unter einer endlichen Schranke, so hat man allemal den Fall I[70].

---

65) Ich vermeide die vielfach (namentlich für Differentialquotienten) üblich gewordenen Ausdrücke *vorderer* (*hinterer*) Grenzwert, da dieselben nach dem Vorgange von *P. du Bois-Reymond* (Math. Ann. 16 [1880], p. 120) eine dem natürlichen Sprachgebrauche *genau entgegengesetzte* Bedeutung gewonnen haben. Man bezeichnet nämlich darnach den *in der Richtung nach vorwärts* gebildeten (*rechten*) Limes als *vorderen*, während ein Unbefangener darunter kaum etwas anderes, als den „*auf der Vorderseite*", d. h. auf der Seite der *kleineren* Zahlen (*links*) gebildeten verstehen könnte. Von diesem letzteren Gesichtspunkte aus nennt z. B. *C. Jordan* (Cours d'anal. 1, p. 59) „*discontinuité antérieure*" eine *links* auftretende, nach dem obigen Usus also „*hintere*" Unstetigkeit.

66) Der Begriff des *Grenzwertes* einer *Funktion* ist wohl zuerst von *Weierstrass* mit genügender Schärfe definiert worden: vgl. *Stolz*, Arithm. 1, p. 339, Anm. 4 zu IX. — Eine allgemeinere Definition, welche den Begriff der „*Unbest.-Grenzen*" und des „*Wertvorrats*" (s. Fussn. 72) mit umfasst, hat *G. Peano* aufgestellt: Riv. di mat. 2 (1892), p. 77; Lezioni d'anal. 1, p. 259.

67) Der Sinn von Gl. (2) kann auch auf den Fundamentalbegriff des Limes einer *monotonen Zahlenfolge* (I A 3, **12**, **13**) zurückgeführt werden: „Die Gleichung $\lim\limits_{x=a+0} f(x) = b$ besagt, dass für *jede* aus der Menge (x) herausgehobene monoton abnehmende Folge (x_ν), für welche $\lim\limits_{\nu=\infty} x_\nu = a$, die Beziehung besteht: $\lim\limits_{\nu=\infty} f(x_\nu) = b$."

68) Die Bezeichnungen $f(a+0)$, $f(a-0)$ stammen von *Dirichlet:* Werke 1, p. 156. — Im Falle $a = 0$ schreibt man: $f(+0)$, $f(-0)$.

69) Über Bedeutung und Beweis dieses Satzes („*des allgemeinen Konvergenzprinzips*") s. I A 3, **13**.

70) Vgl. I A 3, **13**.

III. In *jedem* Falle besitzen die y für alle dem Bereiche (x) angehörigen Werte eines gewissen Intervalls $(a+0,\ a+h)$, wo $h>0$, eine (im allgemeinen von h abhängige) endliche oder unendlich grosse *untere* und *obere Grenze* y_h, Y_h. Da bei *Verkleinerung* von h offenbar y_h *niemals ab-*, Y_h *niemals zunimmt*, so *existieren* die Grenzwerte:

$$\lim_{h=+0} y_h = \underline{B},\quad \lim_{h=+\infty} Y_h = \overline{B},^{71}) \tag{6}$$

(wo $\underline{B}$, $\overline{B}$ eventuell auch $\pm\infty$ bedeuten). Alsdann heissen $\underline{B}$, $\overline{B}$ die *rechtsseitigen* (*rechten*, *vorwärts gebildeten*) *Unbestimmtheitsgrenzen*[72]) oder *Limites* (*Grenzwerte*) *von* $f(x)$ für $x=a$ und zwar $\underline{B}$ *der untere*, $\overline{B}$ *der obere Limes*, in Zeichen[73]):

$$\lim_{x=a+0} f(x) = \underline{B},\quad \overline{\lim_{x=a+0}}\ f(x) = \overline{B}, \tag{7}$$

wofür ich (nach Analogie von (2a)) kürzer schreibe:

$$\underline{f(a+0)} = \underline{B},\quad \overline{f(a+0)} = \overline{B}. \tag{8}$$

Der Sinn dieser Beziehungen kann auch folgendermassen erklärt werden: Aus dem Bereiche (x) lassen sich zwei monoton abnehmende Folgen (x_ν'), (x_ν'') mit dem Grenzwerte a so herausheben, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} f(x_\nu') = \underline{B},\quad \lim_{\nu=\infty} f(x_\nu'') = \overline{B}, \tag{9}$$

dagegen *keine* monot. abn. Folge (x_ν) mit dem Grenzwerte a, welche einen *kleineren* oder *grösseren* $\lim\limits_{\nu=\infty} f(x_\nu)$ liefert[74]). Nimmt man also

71) Man kann mit *Pasch* (a. a. O. p. 134) $\underline{B}$ auch als die *obere Grenze* der y_h, $\overline{B}$ als die *untere Grenze* der Y_h bei unbegrenzt abnehmendem h (0 *excl.*) definieren. Diese Definition hat den Vorteil, dass man unmittelbar den *allgemeinen* Fall III behandeln kann, ohne (wie im Text bei Gl. (6)) auf I, II zu rekurrieren. Andererseits scheint mir die im Text gegebene Herleitung (vgl. *Stolz*, Arithm. 1, p. 162) die Entstehung der Begriffe „*unterer*" und „*oberer Limes*" deutlicher zur Anschauung zu bringen.

72) Nach *Du Bois-Reymond* (vgl. I A 3, **15**, Fussn. 118). Letzterer hat übrigens den fraglichen Begriff zunächst nur für *Zahlenfolgen* (wie schon *Cauchy* und *Abel*) und allenfalls für *Funktionen* bei *unendlich wachsendem* Argument. Zur Beurteilung des Verhaltens von Funktionen für eine *bestimmte Stelle* $x=a$ ist er wohl zuerst von *Dini* (§ 140) bei der Definition der vier Derivierten (vgl. II A 2, **5**) benützt worden, erst später gelegentlich einmal von *Du Bois-Reymond* (Funkt.-Th. p. 230). Bis dahin operiert er im entsprechenden Falle mit dem *C. Neumann* entlehnten komplizierteren Begriffe des *Wertvorrats* von $f(x)$ für $x=a$ (s. z. B. Münch. Abh. Kl. II, 12^1 [1875], p. 124; Math. Ann. 16 [1880], p. 120), d. h. der *Gesamtheit aller möglichen* $\lim\limits_{\nu=\infty} f(x_\nu)$ für $\lim\limits_{\nu=\infty} x_\nu = a$.

73) *Pasch* (a. a. O. p. 134) schreibt: lim inf, lim sup statt: $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$.

74) Vgl. die vollkommene Analogie mit den entsprechenden Definitionen für *Zahlenfolgen:* I A 3, **15**.

$\varepsilon > 0$ *beliebig* klein an, so finden bei *hinlänglich* kleinem h für *alle* x und für *gewisse* (jedesmal wirklich vorhandene) x', x'' des Intervalls $(a+0,\ a+h)$ die Beziehungen statt:

$$(10)\quad \begin{cases} \underline{B} - \varepsilon < f(x) < \overline{B} + \varepsilon, \\ \underline{B} - \varepsilon < f(x') < \underline{B} + \varepsilon, \quad \overline{B} - \varepsilon < f(x'') < \overline{B} + \varepsilon .^{75}) \end{cases}$$

Hieraus erkennt man weiter, dass die Fälle I, II *dann* und *nur dann* eintreten, wenn: $\underline{B} = \overline{B}$, d. h. man hat alsdann:

$$(11)\qquad f(a+0) = \underline{f(a+0)} = \overline{f(a+0)}.$$

In analoger Weise lassen sich der *linksseitige* (*linke*, *rückwärts gebildete*) *Grenzwert* und die entsprechenden *Unbestimmtheitsgrenzen* bezw. die Bedeutung der Symbole:

$$(12)\quad \lim_{x=a-0} f(x) \equiv f(a-0),\quad \lim_{x=a-0} f(x) \equiv \underline{f(a-0)},\quad \overline{\lim_{x=a-0}} f(x) \equiv \overline{f(a-0)}$$

definieren. Im Falle $f(a+0) = f(a-0) = b$ bezw. $= \pm\infty$ schreibt man kürzer:

$$(13)\qquad \lim_{x=a} f(x) = b\ ^{76}) \quad \text{bezw.} \quad = \pm\infty .$$

Im übrigen ist hervorzuheben, dass die Existenz einer solchen Beziehung in keiner Weise die Beschaffenheit von $f(a)$ selbst präjudiziert: $f(a)$ braucht *überhaupt nicht definiert* zu sein[77]) oder kann von $f(a \pm 0)$ *verschieden* ausfallen[78]). Im letzteren Falle ist also ausdrücklich zwischen dem *Definitionswerte* und dem *Grenzwerte* (bezw. *den Grenzwerten*) von $f(x)$ für $x = a$ zu unterscheiden[79]).

---

75) Die Limites $\underline{B}$, $\overline{B}$ können bei der Annäherung von x an a unendlich oft *erreicht*, *überschritten* oder auch *niemals erreicht* werden. (Beispiele für die genannten drei Möglichkeiten: $\sin\frac{1}{x}$, $(1+x^2)\cdot\sin\frac{1}{x}$, $(1-x^2)\cdot\sin\frac{1}{x}$ für $\lim x = \pm 0$.)

76) Für das Rechnen mit solchen Grenzwerten gelten analoge Regeln, wie für Grenzwerte von Zahlenfolgen (vgl. I A 3, **17**). *Hauptsatz:* Ist

$$\lim_{x=a} f_\nu(x) = b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

so hat man:

$$\lim_{x=a} R(f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)) = R(b_1, b_2, \ldots b_n),$$

wenn R eine rationale Funktion ihrer Argumente bedeutet und der Nenner von $R(b_1, b_2, \ldots b_n)$ nicht Null ist (*Stolz*, Arithm. **1**, p. 168).

77) *Beispiele:* $x\cdot\sin\frac{1}{x}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ (vgl. **13**) für $x = 0$.

78) *Beispiele:* $\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$, $(1-x)\cdot\lim_{n=\infty}\frac{nx^2}{nx^2+1}$ für $x = 0$.

79) Sind $f(a+0)$, $f(a-0)$ *verschieden*, so existieren für $f(a)$ die folgenden

8. Unendlich grosse Werte der Funktion und des Arguments. Man sagt, $f(x)$ habe für $x = a$ den Wert ∞ (ohne Hinzufügung eines Vorzeichens)[80]), wenn $(f(a))^{-1} = 0$ ist[81]). Die in diesem Falle für $x = a$ *fürs erste überhaupt nicht definierte* Funktion $f(x)$ gilt dann auf Grund dieser Festsetzung daselbst als *„uneigentlich definiert"*. Man hat hiernach wohl zu unterscheiden[82]) zwischen der Beziehung:

$$f(a) = \infty \tag{14}$$

und den in voriger Nummer erklärten:

$$\lim_{x=a\pm 0} f(x) \equiv f(a \pm 0) = \pm\infty, \tag{15}$$

$$\lim_{x=a\pm 0} f(x) \equiv f(a \pm 0) = -\infty, \quad \overline{\lim_{x=a\pm 0}} f(x) \equiv \overline{f(a \pm 0)} = +\infty. \tag{16}$$

In ähnlicher Weise bedeutet die Beziehung:

$$f(\infty) = b \quad \text{bezw.} \quad = \infty,^{80}) \tag{17}$$

dass:

$$f\left(\frac{1}{y}\right)_{y=0} = b, \quad \text{bezw.} \quad \left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)^{-1}_{y=0} = 0, \tag{17a}$$

während die Bedeutung von:

$$\lim_{x=\pm\infty} f(x) = b \quad \text{bezw.} \quad = \pm\infty, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\pm\infty} f(x) = B \quad \text{bezw.} \quad = -\infty, \quad \overline{\lim_{x=\pm\infty}} f(x) = \overline{B} \quad \text{bezw.} \quad = +\infty \tag{19}$$

nach Analogie der in 7 gegebenen Grenzwert-Definitionen fest-

vier Möglichkeiten: 1) $f(a)$ *nicht definiert.* 2) $f(a)$ von $f(a \pm 0)$ *verschieden.* 3) $f(a) = f(a + 0)$. 4) $f(a) = f(a - 0)$. *Beispiele:*

1) $\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1}$. 2) $x \cdot \lim_{n=\infty} \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$. 3) $x \cdot \lim_{n=\infty} \dfrac{nx^n - 1}{nx^n + 1}$. 4) $x \cdot \lim_{n=\infty} \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$

sämtlich für $x = 1$.

80) Das Symbol ∞ erscheint hier also als ein *„eigentliches"* Unendlich in dem I A 3, p. 69 näher definierten Sinne.

81) Diese Festsetzung ist lediglich eine passende Modifikation der von *Weierstrass* für *analytische* Funkt. gegebenen Begriffsbestimmung: Werke 2, p. 81.

82) So ist z. B. für $f(x) = \lim_{n=\infty} \dfrac{nx}{nx^2 + 1}$: $f(0) = 0$, $f(+0) = +\infty$, $f(-0) = -\infty$;

für $f(x) = \lim_{n=\infty} \dfrac{1}{nx}$: $f(0) = \infty$, $f(\pm 0) = 0$.

Die Bezeichnungen (14), (15) [ebenso (17), (18)] werden auch in neueren Werken nicht immer streng auseinander gehalten, was für manche Untersuchungen (z. B. in der Theorie der Fourier'schen Reihen) dringend erforderlich scheint.

zusetzen ist[83]). Als *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Existenz von: $\lim_{x=+\infty} f(x) = b$ bezw. $= +\infty$ erscheint dabei (vgl. (3))

(20) $\quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ bezw. $> B$ für: $x_2 > x_1 > A$,[84])

(wo $\varepsilon > 0$ *beliebig* klein, $B > 0$ *beliebig* gross *vorzuschreiben*, $A > 0$ *hinlänglich* gross *zuzuordnen* ist).

Zur genaueren Charakterisierung des „*Endverlaufes*" eines $f(x)$, für das bei $\lim x = +\infty$ (bezw. $= -\infty$) *verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen* existieren, hat *Du Bois-Reymond* neben diesen beiden *konstanten* Limites zwei bestimmte ($f(x)$ gewissermassen begleitende) *monotone Funktionen* definiert, die er als *Unbestimmtheits-Enveloppen* bezeichnet[85]).

9. Die stetige Funktion. Eine Funktion $f(x)$ der *stetigen* Veränderlichen x heisst *stetig für* $x = a$ (*an der Stelle, im Punkte* a), wenn $f(a)$ *bestimmt definiert* ist und zu *beliebig* kleinem $\varepsilon > 0$ allemal ein $\delta > 0$ existiert, sodass[86]):

(21) $\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für: $|x - a| < \delta$.

Diese letztere Bedingung ist nach 7 mit der folgenden identisch[87]):

(22) $\quad f(a \pm 0) = f(a)$

und kann, mit Benützung des allgemeinen Konvergenzprinzipes (3), auch ersetzt werden durch[88]):

---

83) *Beispiele:* Für $f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+x}$ ist: $f(\infty) = 0$, $\lim_{x=\pm\infty} f(x) = 1$.

Für $f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{x}{n}$ ist: $f(\infty) = \infty$, $\lim_{x=\pm\infty} f(x) = 0$.

84) Vgl. I A 3, p. 66, 68.

85) Funktionenth. p. 275.

86) Diese Definition (im wesentlichen zuerst wohl bei *Bolzano* [a. a. O. p. 11; vgl. *Stolz*, a. a. O. p. 261] und *Cauchy* [Anal. algébr. p. 34]) verlangt nur, dass jedem beliebig kleinen *stetigen* Intervalle $(a-h,\ a+h)$ eine *überall-dichte* Wertmenge $y = f(x)$ entspricht. Dass dabei, wenn x das *Continuum* $(a-h, a+h)$ wachsend durchläuft, auch $f(x)$ sich *kontinuierlich* ändert, d. h. beim Übergange von irgend einem Werte y_1 zu einem anderen y_2 *alle* Zwischenwerte wirklich annimmt, kann als *Folgerung* aus der obigen Definition *bewiesen* werden (s. Satz III). Dagegen genügt, wie schon *Bolzano* hervorgehoben hat (vgl. Fussn. 97), *nicht* umgekehrt die letztere Eigenschaft, um die *Stetigkeit* von $f(x)$ in dem durch Ungl. (21) festgestellten Sinne zu *definieren*. *Beispiel:* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \gtrless 0$, $f(0) = 0$ (*unstetig* bei $x = 0$, obschon *alle* Werte von -1 bis $+1$ ohne Sprung [unendlich oft] durchlaufend); einen allgemeineren Typus ähnlicher Art giebt *Darboux*, Ann. éc. norm. (2), 4 (1875), p. 109.

87) S. z. B. *Dini*, § 30; *Stolz*, Arithm. 1, p. 179.

88) *Du Bois-Reymond*, Funkt.-Th. p. 232.

$$(23) \qquad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left\{ \begin{matrix} |x_1 - a| \\ |x_2 - a| \end{matrix} \right\} < \delta.$$

Der Punkt a heisst ein *Stetigkeitspunkt*[89]) von $f(x)$.

Besteht die erste Ungleichung (21) nur für: $0 \leq x - a < \delta$ bezw. $0 \leq a - x < \delta$, so heisst $f(x)$ für $x = a$ *rechts* (*vorwärts*) bezw. *links* (*rückwärts*) *stetig*. Dabei wird also nur:

$$(24) \qquad f(a + 0) = f(a), \quad \text{bezw.} \quad f(a - 0) = f(a).^{90})$$

Ist $f(x)$ *für jeden einzelnen Punkt* von (x_0, X) *stetig* (wobei für x_0 bezw. X nur die *Rechts-* bezw. *Links*-Stetigkeit verlangt wird), so besteht der folgende (für die Begründung des Integralbegriffes fundamentale)[91]) zuerst von *E. Heine* ausgesprochene[92]) und bewiesene[93]) Satz:

I. Es existiert zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein (für das *ganze* Intervall gültiges) $\delta > 0$, sodass:

$$(25) \qquad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon, \quad \text{wenn nur:} \quad |x_2 - x_1| < \delta.$$

Man bezeichnet diese Eigenschaft durch den Ausdruck: $f(x)$ sei *im Intervall*[94]) (x_0, X) *stetig*, oder ausführlicher: $f(x)$ sei daselbst *gleichmässig*[95]) *stetig*.

---

89) Ibid. p. 231; J. f. Math. 79 (1875), p. 22.

90) Vgl. Fussn. 79, Beisp. 3), 4). — *Weierstrass*'sches Beispiel einer durchweg *rechts stetigen* (und differenzierbaren, s. **10**), für ganzzahlige x *links unstetigen* Funktion: $y = x - E(x)$, wo $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl vorstellt.

91) Vgl. I A 3, **12**, Fussn. 82.

92) J. f. Math. 71 (1870), p. 361. (Dort zunächst für Funkt. *zweier* Veränderl.)

93) J. f. Math. 74 (1872), p. 188; die gegenteilige, nicht ganz verständliche Bemerkung bei *Dini-Lüroth* scheint auf einem Irrtume zu beruhen. — Andere Beweise bei *Dini* § 41 (angeblich nach *G. Cantor*) und *Darboux* (a. a. O. p. 73). Alle diese unmittelbar auf der *Definition* der Punktstetigkeit (Ungl. (21)) beruhenden Beweise sind *indirekt*. Ein von *J. Lüroth* (Math. Ann. 6 [1873], p. 319) für Funkt. *zweier* Veränderl. geführter, von *Pasch* (Diff.-R. p. 58) und *Stolz* (Arithm. 1, p. 191) auf den vorliegenden Fall übertragener, *direkter* Beweis stützt sich auf den „Minimumsatz" II.

94) Manche Autoren *definieren* eine Funktion als *„im Intervall stetig"*, wenn sie *für jeden einzelnen Punkt stetig* ist (worauf dann die in I. ausgesprochene Eigenschaft als *„gleichmässige"* Stetigkeit bezeichnet wird). Mir scheint dies schon aus dem Grunde nicht zweckmässig, weil andererseits die sehr verwandten Bezeichnungen *„im Intervalle endlich"* und *„für jede einzelne Stelle des Intervalls endlich"* thatsächlich *verschiedene* Bedeutung haben (s. **6**, Fussn. 60). — *Du Bois-Reymond* bezeichnet die *gleichmässige* Stetigkeit als *Streckenstetigkeit* (*lineare* St.) und benützt die Bezeichnungen *„gleichm. St."* oder *„St. in gleichem Grade"* in wesentlich anderem Sinne (Funkt.-Th. p. 241; J. f. Math. 100 [1887], p. 336, 340).

95) *Ungleichmässige* Stetigkeit, d. h. die Notwendigkeit, δ zur Erzielung der Relation (25) unbegrenzt zu verkleinern, kann also nur in unmittelbarer Nähe eines Unstet.-Punktes eintreten.

Weitere charakteristische Eigenschaften *stetiger* Funktionen sind in den folgenden Sätzen enthalten:

II. Ein für (x_0, X) *stetiges* $f(x)$ besitzt daselbst immer mindestens ein (reales) *endliches Maximum* M bezw. *Minimum* m; d. h. es existiert eine *endliche obere* und *untere* Grenze M bezw. m und *eine* oder *eine erste* Stelle a bezw. b, für welche $f(a) = M$, $f(b) = m$ wird[96]).

III. Ist $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, so nimmt $f(x)$ im Intervalle (x_1, x_2) *jeden* Wert zwischen y_1 und y_2, also im Intervalle (x_0, X) *jeden* Wert $m \leqq y \leqq M$ an[97]).

IV. Eine *stetige* Funktion ist im Intervalle (x_0, X) vollständig bestimmt, wenn sie für eine daselbst *überall dichte* Punktmenge gegeben ist[98]).

V. Ist $f(x)$ stetig für $x = a$, $F(y)$ *stetig* für $y = f(a)$, so ist $F(f(x))$ *stetig* für $x = a$.[99]) Sind die $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ *stetig* für $x = a$, so gilt das gleiche für $R(f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x))$, wo R eine rationale Funktion bedeutet, deren Nenner für $x = a$ von Null verschieden ist[100]).

Was die Darstellung *beliebiger stetiger* Funktionen durch analytische Ausdrücke betrifft, so kommt zunächst diejenige durch *Fourier'sche Reihen* (bezw. Integrale) in Betracht; doch giebt es immerhin stetige Funktionen, welche nachweisbar für unendlich viele überall dicht liegende Punkte *keine* solche Darstellung zulassen[101]). Hingegen hat

96) Von *Weierstrass* herrührender und in seinen Vorlesungen besonders betonter Satz. Bei *Pincherle* (a. a. O. p. 249) findet sich nur der allgemeinere Satz von 6. — Beweis bei *Dini*, § 47; *Stolz*, Arithm. 1, p. 188. — Mit Benützung des fraglichen Satzes lässt sich die *gleichmässige* Stetigkeit auch durch die Beziehung charakterisieren: $D < \varepsilon$ für $|x_2 - x_1| < \delta$, wo D die *Schwankung* von $f(x)$ (s. 6) in jedem beliebigen Intervalle (x_1, x_2) bedeutet.

97) *Bolzano* (a. a. O. p. 17; *Stolz*, a. a. O. p. 262; desgl. Arithm. 1, p. 185). Anderer Beweis bei *Cauchy*, Anal. algébr. p. 460, 463.

98) Wohl zuerst von *Heine* für die Menge der *rationalen* Zahlen ausgesprochen und bewiesen: a. a. O. p. 183. Der Satz gilt aber auch schon für jede überall dichte *Teilmenge* der rationalen Zahlen, z. B. für die *dyadischen* (d. h. *endlichen* dyadischen Brüche): vgl. *J. Thomae*'s Beweis für die Identität des *elementar-geometrischen* und des *analytischen* sin x (El. Funkt.-Th. [1898], p. 83). — Beweis des allg. Satzes bei *Dini*, § 43, 44. — Genauere Untersuchung der durch Zuordnung von y_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ zu einer überall dichten Menge x_ν bestimmten *„limitären"* Funktion bei *T. Brodén*, J. f. Math. 118 (1897), p. 2; Acta Lund. 8 (1897), p. 7.

99) *Cauchy*, Anal. algébr. p. 43.

100) S. z. B. *Stolz*, Arithm. 1, p. 180.

101) *Du Bois-Reymond*, Münch. Abh. Kl. II, 12^2 (1876), p. 100; Math. Ann. 10 (1876), p. 442. Im übrigen vgl. II A 8.

Weierstrass eine Methode angegeben, vermöge deren *jede* für ein begrenztes oder unendliches Intervall beliebig definierte, endlich bleibende, stetige Funktion durch eine *unbedingt* und in jedem endlichen Intervalle auch *gleichmässig* (s. **17**) *konvergente Reihe ganzer rationaler Funktionen* darstellbar ist[102]). Damit ist aber gezeigt, dass *jede* stetige Funktion schliesslich unter den ursprünglichen *Euler'schen Funktionsbegriff* fällt, während sie andererseits in ihrer vollen Allgemeinheit über die mit jenem Begriffe früher verbundenen *Vorstellungen* weit hinausreicht (s. **10—12**, **20**).

10. Die differenzierbare Funktion. Setzt man:

$$f(a \pm h) - f(a) = \varrho(\pm h) \cdot \varphi(a, \pm h), \tag{26}$$

so kann das Kriterium für die *Stetigkeit* von $f(x)$ im Punkte a dahin gefasst werden, dass $\varrho(\pm 0) \cdot \varphi(a, \pm 0) = 0$ sein muss. Lässt sich nun $\varrho(\pm h)$ als gleichzeitig mit $\pm h$ *monoton* der 0 zustrebends Funktion *so* auswählen, dass $\varphi(a, \pm h)$ für ein gewisses Intervall $0 \leq h \leq \delta$ *endlich* und *von Null verschieden* bleibt, so kann die *Schnelligkeit des Verschwindens*[103]) von $\varrho(\pm h)$ für $\lim h = 0$ ale *Mass* der *Stetigkeit* von $f(x)$ für $x = a$ gelten: $\varrho(\pm h)$ wird darnach geradezu als der *Stetigkeitsgrad* von $f(x)$ im Punkte a bezeichnet[104]).

Andererseits kann man in Gl. (26) $\varrho(\pm h)$ als mit h monoton der 0 zustrebende Funktion *willkürlich* annehmen und sodann den Stetigkeitscharakter von $f(x)$ für $x = a$ durch das Verhalten von $\varphi(a, \pm h)$ für $\lim h = 0$ bestimmen. Die Erfahrung hat gelehrt, dass die Wahl $\varrho(\pm h) = \pm h$, also:

$$\varphi(a, \pm h) = \frac{f(a \pm h) - f(a)}{\pm h}, \tag{27}$$

sich als besonders wertvoll erweist. Ist $f(x)$ für $(a - h, a + h)$ eindeutig definiert, so existieren, ohne weitere Hinzufügung irgendwelcher spezielleren Annahmen, nach **7** stets die vier Limites:

$$\underline{\varphi(a, +0)}, \quad \overline{\varphi(a, +0)}, \quad \underline{\varphi(a, -0)}, \quad \overline{\varphi(a, -0)}, \tag{28}$$

---

102) Berl. Ber. 1885, p. 633, 789. Einfacherer Beweis und Übertragung auf Funktionen *zweier* Variabeln bei *E. Picard*, Traité d'anal. 1 (1891), p. 258. — Ganz elementare Methode zur Darstellung nach *gebrochenen rationalen* Funktionen: *C. Runge*, Acta math. 7 (1885), p. 387. — Entwickelung nach *ganzen transcendenten* Funktionen: *L. Maurer*, Math. Ann. 47 (1896), p. 278.

103) Vgl. I A 3, **19**.

104) *Thomae*, Abr. einer Theorie der kompl. Funkt. Halle 1870, p. 40. 50; 2. Aufl. 1873, p. 9. — *Du Bois-Reymond*, Zur Gesch. der trig. Reihen, Tübingen 1880, p. 41; Funktionenth. p. 239.

welche nach dem Vorgange von *Dini*[105]) die vier *Derivierten* von $f(x)$ für $x = a$ genannt werden (und zwar der Reihe nach: die *rechte untere, rechte obere, linke untere, linke obere*)[106]). Existieren dann insbesondere (als endlich oder unendlich) die *Grenzwerte:* $\varphi(a, +0)$, $\varphi(a, -0)$, so werden dieselben als *rechte* bezw. *linke Derivierte* bezeichnet. Ist schliesslich noch $\varphi(a, +0) = \varphi(a, -0)$ (endlich oder mit gleichem Vorzeichen unendlich), so heisst $\varphi(a, \pm 0) = f'(a)$ schlechthin *die Derivierte* (die *Ableitung*, der *Differentialquotient*) von $f(x)$ für $x = a$.[106])

Besitzt eine Funktion für jede Stelle von (x_0, X) eine bestimmte (endliche oder unendlich grosse) *Derivierte* (wobei speziell für x_0 nur die Existenz der *rechten*, für X die der *linken* Derivierten erforderlich ist), so heisst sie daselbst *differenzierbar*[107]); sie heisst *abteilungsweise differenzierbar*, wenn die fragliche Eigenschaft mit Ausschluss einer *endlichen* Anzahl von Punkten besteht[108]).

Während die Existenz einer eindeutigen *endlichen* Derivierten $f'(a)$ (sogar schon die *Endlichkeit* der *vier* Derivierten) allemal die *Stetigkeit* von $f(x)$ für $x = a$ involviert, so braucht offenbar $f(x)$ im Falle $f'(a) = +\infty$ (bezw. $= -\infty$) für $x = a$ *nicht* stetig zu sein. Es ist daher kein Pleonasmus, wenn man ausdrücklich von *stetigen differenzierbaren* Funktionen spricht, man müsste denn, wie zuweilen geschieht[109]), die *Stetigkeit* von vornherein in die *Definition* der *Differenzierbarkeit* aufnehmen.

Umgekehrt hat man früher die (zum mindesten *abteilungsweise*) *Differenzierbarkeit* einer *stetigen* Funktion als etwas *selbstverständliches* angesehen, späterhin (*A. M. Ampère*, 1806) sie zu *beweisen* versucht[110]). Indessen ist durch *Riemann*'s und *Herm. Hankel*'s Untersuchungen,

105) A. a. O. § 145.

106) Auch: *vordere* (*hintere*) statt: *rechte* (*linke*): vgl. Fussn. 65. Ausführlicheres s. II A 2, **2**, **4**, **5**. Manche Autoren gebrauchen nach dem Vorgange von *Lagrange* die Bezeichnung *Derivierte* (*Ableitung*) nur für Differentialquotienten *analytischer* Funktionen.

107) *Du Bois-Reymond* bezeichnet die *differenzierbaren* Funktionen auch als *„orthoide"*. Funktionenth. p. 132.

108) Man sagt, allgemein, mit unerheblicher Modifikation einer von *C. Neumann* (Über die nach Kreis-, Kugel-, Cyl.-Funkt. fortschr. Entw., Leipzig 1881, p. 27) eingeführten Ausdrucksweise: eine Funktion besitze eine gewisse Eigenschaft in einem gewissen Intervalle *abteilungsweise*, wenn sie dieselbe mit Ausschluss einer *endlichen* Anzahl von Punkten besitzt. (*Neumann* sagt statt dessen: wenn sich das Intervall in eine *endliche* Anzahl von *Teilintervallen* mit der fraglichen Eigenschaft zerlegen lässt. Diese Fassung führt zu gewissen Unzuträglichkeiten, z. B. bei der Definition der abteilungsweisen Stetigkeit.)

109) S. z. B. *Stolz*, Grundzüge 1, p. 32. 110) Näheres: II A 2, **4**.

noch drastischer durch ein von *Weierstrass* gegebenes erstes Beispiel einer *nirgends* differenzierbaren stetigen Funktion die Unhaltbarkeit jener Ansicht dargethan worden[110]).

11. Die abteilungsweise monotone und die „gewöhnliche" Funktion. Selbst der Begriff der in einem Intervalle (x_0, X) *stetigen differenzierbaren* Funktion deckt sich noch keineswegs mit dem geometrischen Bilde, welches man früher (an die Analogie der algebraischen oder gewisser elementarer transcendenter Funktionen anknüpfend) schon mit der Vorstellung jeder überhaupt *stetigen* Funktion zu verbinden pflegte, d. h. mit der Existenz einer entsprechenden *„gewöhnlichen" Kurve*. Darunter wird eine kontinuierliche Linie verstanden, die für jedes in Betracht kommende endliche Intervall aus einer endlichen Anzahl *konvexer* (d. h. von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnittener) *Bögen*[111]) ohne Ecken und Spitzen, eventuell auch noch aus einer endlichen Anzahl *geradliniger Stücke* besteht[112]). Als eine für die Existenz eines solchen geometrischen Abbildes jedenfalls *notwendige* Bedingung erscheint die *abteilungsweise Monotonie* von $f(x)$ (Abwesenheit unendlich vieler Maxima und Minima in jedem endlichen Intervalle)[113]) — eine Eigenschaft, die selbst in Verbindung mit der *Stetigkeit* keineswegs allemal die *Differenzierbarkeit* einschliesst — *vice versa*. Bezüglich der Umgebung *einzelner Punkte* geht dies aus sehr einfachen Beispielen hervor[114]). Durch Untersuchungen von *Weierstrass, H. A. Schwarz, Dini* und *A. Koepcke* ist aber festgestellt worden, dass selbst *in ganzen Intervallen* ein Zusammentreffen der

111) Bedingung für die Darstellbarkeit eines im Intervalle (x_0, X) stetigen $f(x)$ durch einen konvexen Bogen s. *Stolz*, Arithm. 1, p. 194; vgl. auch Grundz. 1, p. 35.

112) In wieweit diese Begriffsbestimmung die sog. *geometrische Anschaulichkeit* einer *Kurve* im *idealistischen* Sinne nach sich zieht, bleibt dahingestellt (s. z. B. **20** am Ende); es liegt wohl in der Natur der Sache, dass eine befriedigende allgemeine Definition für diese Eigenschaft nicht gegeben werden kann. Bei *empiristischer* Raumanschauung kann eine *anschauliche* d. h. *anschaubare* Kurve immer nur ein *approximatives* Bild einer *Funktion* geben: ihr entspricht nach *F. Klein's* Ausdrucksweise (vgl. **5**, Fussn. 54) nicht eine *Funktion*, sondern ein *Funktionsstreifen*.

113) *Du Bois-Reymond* (J. f. Math. 79 [1875], p. 33) bezeichnet solche Funktionen als *„der Dirichlet'schen Bedingung genügend"*. (*Dirichlet*, Werke 1, p. 131).

114) Setzt man: $f(0) = 0$, sonst: $f(x) = x^n \cdot \sin \frac{1}{x}$ $(n \geqq 2)$, so ist $f(x)$ bei $x = 0$ *stetig* und *differenzierbar*, aber mit *unendlich vielen Maxima und Minima* behaftet. Setzt man dagegen: $f(0) = 0$, sonst $f(x) = x\left(1 \pm \frac{1}{3} \sin (\lg x^2)\right)$, so ist $f(x)$ durchweg *stetig* und *monoton*, aber für $x = 0$ *nicht differenzierbar*.

fraglichen Eigenschaften *nicht* stattzufinden braucht, d. h.: 1) Es giebt *stetige monotone* Funktionen, welche in keinem noch so kleinen Intervall durchweg *differenzierbar* sind[115]). 2) Es giebt *stetige differenzierbare* Funktionen, welche in keinem noch so kleinen Intervalle *monoton* sind[116]). Hiernach erscheint von den drei Bedingungen der *Stetigkeit, Differenzierbarkeit* und *abteilungsweisen Monotonie* für die Darstellbarkeit von $f(x)$ durch eine *„gewöhnliche"* Kurve *keine* entbehrlich. Da aber etwa vorhandene unendlich viele Maxima und Minima unter Umständen schon durch blosse Koordinatendrehung[117]) *beseitigt* werden können, so muss noch ausdrücklich die *abteilungsweise Monotonie* gegen *jede* als Abcissenachse gedachte Richtung gefordert werden. *Stetige differenzierbare* Funktionen mit dieser letzteren Eigenschaft werden nach *Du Bois-Reymond* (a. a. O. p. 32) als *gewöhnliche* bezeichnet.

12. Die unbeschränkt differenzierbare und die analytische Funktion. Eine Funktion heisst im Intervalle (x_0, X) *unbeschränkt differenzierbar*, wenn sie daselbst durchweg *Derivierte jeder beliebigen Ordnung*[118]) besitzt. Selbst eine durchweg *unbeschränkt differenzierbare* Funktion braucht — zum mindesten in der Umgebung einzelner Punkte — noch nicht den Charakter einer *gewöhnlichen* zu besitzen[119]). Solche Punkte können auch in endlichen Intervallen *unendlich oft* vorkommen, dagegen erscheint es auf Grund allgemeiner Eigenschaften der Deri-

---

115) Ein derartiges Beispiel (aus einer Funktion von der Art der unmittelbar zuvor erwähnten durch „Kondensation" [s. **18**] gebildet) hat wohl zuerst *Weierstrass* in seinen Vorlesungen mitgeteilt; publ. erst 1882 durch *G. Cantor* (Math. Ann. 19, p. 591. Auch *Dini-Lüroth*, p. 200, 5). Inzwischen hatte bereits *Schwarz* (Genève Arch. 1873, p. 33; Ges. Abh. 2, p. 269) ein anderes Beispiel und *Dini* (a. a. O. § 131) einen allgemeineren Typus solcher Funktionen angegeben.

116) *A. Koepcke*, Math. Ann. 35 (1890), p. 104 (nach zwei, noch mit gewissen Mängeln behafteten Vorarbeiten: ibid. 29 [1887], p. 123; 34 [1889], p. 181). K. giebt dort zunächst eine unbegrenzt fortsetzbare geometrische Konstruktionsvorschrift, später (Hamb. Mitteil. 2 [1890], p. 128) einen analytischen Ausdruck (zweifach unendliche Sinusreihe). *Du Bois-Reymond* hatte auf Grund eines geometrischen Raisonnements die Existenz solcher Funktionen für unwahrscheinlich erklärt (a. a. O. p. 32; die gegenteilige Ansicht bei *Dini*, § 200 am Schlusse). Ein früher von *Herm. Hankel* (a. a. O. p. 83) gegebenes Beispiel hat sich als unrichtig erwiesen (es fehlt nicht nur der Beweis dafür, dass die Oscillationen sich nicht *möglicherweise kompensieren*, sondern das letztere findet sogar *thatsächlich* statt: vgl. **20**, Fussn. 223).

117) Oder auch durch Addition einer passenden Linearfunktion: vgl. **20**.

118) Vgl. II A 2, **6**.

119) *Beispiel:* $f(0) = 0$, sonst: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$.

vierten[120]) definitiv *ausgeschlossen*, dass dieselben irgendwo *überall dicht* liegen.

Wenn man andererseits früher allgemein annahm, dass eine für $x = a$ und eine gewisse Umgebung von *a unbeschränkt differenzierbare* Funktion auch *analytisch*, d. h. für jene Umgebung durch eine konvergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $(x - a)$ darstellbar sein müsse, so hat sich diese insbesondere von *Lagrange* vertretene, von *Cauchy* lediglich durch den Hinweis auf ein nicht in jeder Hinsicht beweiskräftiges Beispiel angefochtene Ansicht[121]) durch neuere Untersuchungen als völlig unhaltbar erwiesen — sogar in dem weiteren Umfange, dass $f(x)$ für *alle* Stellen (x_0, X) *unbeschränkt differenzierbar* sein kann, *ohne* auch nur für eine einzige *analytisch* zu sein[122]). Das unterscheidende Merkmal, welches die *analytischen* $f(x)$ aus der Gesamtheit der *unbeschränkt differenzierbaren* heraushebt, besteht in gewissen genau angebbaren Beschränkungen, an welche das etwaige Unendlichwerden von $f^{(n)}(x)$ für $\lim n = \infty$ gebunden ist[123]).

Eine Funktion besitzt überall da, wo sie *analytisch* ist, auch den Charakter einer *gewöhnlichen;* in wieweit dies allenfalls für lediglich *unbeschränkt differenzierbare* Funktionen gilt, scheint nach dem oben gesagten noch nicht völlig aufgeklärt[124]).

13. Uneigentliche Funktionswerte. Die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ **etc.** — Die vorangehenden Betrachtungen zeigten, welche spezielleren Eigenschaften zur blossen *Stetigkeit* hinzutreten müssen, um successive immer *vollkommnere* Funktionsklassen zu umgrenzen. Entsprechend sollen jetzt die verschiedenen Möglichkeiten hervorgehoben

120) *Dini* § 130. Würde man also versuchen, aus Funktionen der in 119) angeführten Art durch *Kondensation* (s. 18) solche zu bilden, welche die fragliche Singularität für Stellen einer überall dichten Menge besitzen sollen, so *müssen* sich dann eben allemal jene unendlich vielen Oscillationen so weit *kompensieren*, dass $f(x)$ in jedem kleinsten Intervalle *Monotonie*-Stellen aufweist. Vgl. 20.

121) Vgl. meine hist. Bem.: Chicago Congr. Papers 1893 (publ. 1896), p. 288.

122) Vgl. 18, Fussn. 2 und II A 2, 14, 15. — Ein *unbeschränkt differenzierbares* $f(x)$ kann auch stellenweise *einseitig analytisch* sein: *Pringsheim*, Math. Ann. 44 (1894), p. 54.

123) *Pringsheim*, Chicago Congr. Papers p. 294; Math. Ann. 44, p. 74.

124) *L. Maurer* (Math. Ann. 41 [1893], p. 377) giebt lediglich *hinreichende* Bedingungen für die unbeschränkte Differenzierbarkeit *abteilungsweise monotoner* Funktionen (vgl. p. 382, Bedingung 4)). — Allgemeine Darstellung der *unbeschränkt differenzierbaren, nicht analytischen* $f(x)$ als Summen *analytischer* Funktionen und *unbeschränkt differenzierbarer Fourier*'scher Reihen: *E. Borel*, Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), p. 42. Übertragung auf Funktionen *zweier* Veränderl.: ibid. 13 (1896), p. 79.

werden, welche *Unterbrechungen der Stetigkeit* und schliesslich die vollständige *Degeneration* einer Funktion zur *total unstetigen* hervorbringen können.

Da eine *notwendige* Bedingung der *Stetigkeit* von $f(x)$ für $x = a$ in der wohldefinierten Existenz eines endlichen $f(a)$ besteht, so wird zunächst $f(x)$ für $x = a$ allemal als *unstetig* zu gelten haben, wenn $f(x)$ zwar für unendlich viele Punkte in der Umgebung von $x = a$ existiert, dagegen $f(a)$ *überhaupt nicht definiert* ist. Ist nun aber in diesem Falle: $f(a+0) = f(a-0) = b$ (endlich)[125]), so pflegt man $f(x)$ dadurch an der Stelle a *stetig* zu machen, dass man ihr daselbst den Wert b beilegt; $f(x)$ heisst alsdann im Punkte a *uneigentlich definiert*[126]), b ein *uneigentlicher (singulärer*[127a]*, indirekter*[127b]*) Funktionswert.*

Der Fall, dass $f(x)$ für $x = a$ *nicht (eigentlich) definiert* erscheint, tritt insbesondere dann ein, wenn $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ [128]) annimmt. Die Hauptregel zur Bestimmung der entsprechenden *Grenzwerte* $\frac{\varphi(a \pm 0)}{\psi(a \pm 0)}$, welche statt mit einer der zuvor erwähnten Benennungen häufig weniger passend als die *„wahren Werte"* jener *„unbestimmten Ausdrücke"* bezeichnet werden, beruht auf der unter gewissen Voraussetzungen erweisbaren Beziehung: $\lim\limits_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim\limits_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ und rührt, für den Fall $\frac{0}{0}$, von *Joh. Bernoulli*[129]) her. Eine völlig ausreichende Begründung[130]) erfuhr sie, ebenfalls zunächst nur

125) Beispiel s. Fussn. 77.

126) In etwas anderem Sinne ist dieser Ausdruck in 8 gebraucht.

127a) *Cauchy*, Anal. algébr. p. 45. 127b) *Du Bois-Reymond*, Funkt.-Th. p. 224.

128) Gleichgültig, ob (in dem zu Anfang von 8 Gl. (14) (15) erörterten Sinne): $\varphi(a) = \infty$, $\psi(a) = \infty$, oder aber: $\lim\limits_{x=a \pm 0} \varphi(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x=a \pm 0} \psi(x) = \pm\infty$.

129) Sie findet sich zwar (in geometrischer Einkleidung) schon *vor* der Publikation durch *Bernoulli* bei *G. Fr. de l'Hospital* (Anal. des inf. petits, Paris 1696, § 163), wird jedoch später ausdrücklich von ersterem reklamiert: Acta erud. 1704, p. 375 (Opera 1, p. 401). Daselbst giebt B. auch schon die Vervollständigung der Regel für den Fall $\varphi'(a) = 0$, $\psi'(a) = 0$. (Vgl. *M. Cantor* 3, p. 219, 239.)

130) Die früher übliche, übrigens auch noch in manchen modernen Lehrbüchern (z. B. *Schlömilch*, Compendium 1, § 31) zu findende Herleitung, mit Hülfe der im Falle $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ bestehenden Identität:

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} : \frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h},$$

liefert für $\lim h = 0$ die fragliche Regel nur dann, wenn $\varphi'(a)$, $\psi'(a)$ *existieren* und weder gleichzeitig verschwinden, noch unendlich werden. Der Schluss, dass sodann im Falle $\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$ der „wahre Wert" von $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$, nämlich $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$,

für den Fall $\frac{0}{0}$, erst durch *Cauchy*[131]) (mit Benützung des sog. *erweiterten* Mittelwertsatzes der Differentialrechnung[132]). Dagegen erweist sich die Behandlung des zuerst wohl von *Euler*[133]) betrachteten Falles $\frac{\infty}{\infty}$ selbst bei *Cauchy*[134]) und seinen Nachfolgern[135]) als unzulänglich[136]). Eine vollkommene Lösung hat erst *Stolz* gegeben[137]), zunächst mit Benützung eines auf den Grenzübergang $\lim x = +\infty$ bezüglichen Hülfsatzes (s. unten: Gl. (31), bald darauf[138]) auch ohne dieses Hülfsmittel, auf Grund eines von *Du Bois-Reymond*[139]) und *V. Rouquet*[140]) bewiesenen, von letzterem in nicht ganz einwandfreier Weise zur Behandlung des Falles $\frac{\infty}{\infty}$ herangezogenen Lemmas von der Form: $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} f'(x)$. Die Verwertung des von *Du Bois-Reymond* beim Beweise jenes Lemmas benutzten Gedankens führte schliesslich zu einem direkteren Beweise der fraglichen Regel, wie er sich wohl zuerst bei *Genocchi-Peano*, sodann ähnlich bei *J. Tannery* und, etwas allgemeiner gefasst, bei *Stolz* findet[141]). Darnach gilt schliesslich die Beziehung:

$$\lim_{x=a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \tag{29}$$

wenn der *rechts* stehende Grenzwert *existiert* und:

---

auch derjenige von $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ sein müsse, beruht auf einer ungerechtfertigten Vertauschung zweier successive auszuführenden Grenzübergänge: vgl. *W. F. Osgood*, Ann. of Math. 12 (1897), p. 68.

131) Leçons sur le calc. diff., Paris 1829, p. 33.

132) Vgl. II A 2, **6**. Die Benützung des „*verallgemeinerten*" Mittelwertsatzes, d. h. der Taylor'schen Entwickelung *mit Restglied* (II A 2, **11**) gestattet ebenfalls eine strenge, jedoch in den Voraussetzungen beschränktere Erledigung des Falles $\frac{0}{0}$ (s. z. B. *Jordan*, Cours 1, p. 270); sie versagt dagegen fast vollständig im Falle $\frac{\infty}{\infty}$.

133) Inst. calc. diff. (Petrop. 1755), p. 756.

134) A. a. O. p. 41.

135) S. z. B. *Cauchy-Moigno*, Calc. diff. (1840), p. 41; *J. A. Serret*, Calc. diff. (1879), p. 182; *Ch. Hermite*, Cours d'anal. (1873), p. 200.

136) Vgl. *Stolz*, Math. Ann. 14 (1879), p. 230.

137) A. a. O. p. 238, 239.

138) Math. Ann. 15 (1879), p. 556.

139) Ann. di mat. (2), 4 (1871), p. 346; Math. Ann. 16 (1880), p. 550.

140) Nouv. Ann. (2), 16 (1877), p. 113.

141) *Genocchi-Peano*, Calc. diff. (1884), p. 178 (deutsche Ausg. p. 164); *Tannery*, Introd. (1886), p. 262; *Stolz*, Grundz. 1 (1893), p. 77. — Ein etwas vereinfachter, auf engeren Voraussetzungen beruhender Beweis bei *Osgood*, a. a. O. p. 76. — Verallgemeinerung der Gültigkeitsbedingungen bei *Stolz*, a. a. O. p. 81. 82.

Entweder I. $\lim_{x=a+0} \varphi(x) = \lim_{x=a+0} \psi(x) = 0$; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *stetig* für $(a, a+h)$; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *differenzierbar*, $\psi'(x)$ von Null verschieden für $(a+0, a+h)$.

Oder II. Zum mindesten $\lim_{x=a+0} \psi(x) = \pm\infty$; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *stetig* und *differenzierbar*, $\psi'(x)$ von Null verschieden und gleich bezeichnet für $(a+0, a+h)$.

Der Satz in dieser Fassung liefert auch die nötigen Hülfsmittel für den Fall, dass $\lim \varphi'(x) = \lim \psi'(x) = 0$ bezw. $= \pm\infty$ u. s. f.[142]). Auch kann er durch einfache Substitutionen unmittelbar auf die Grenzübergänge $\lim x = a - 0$ bezw. $= \pm\infty$ übertragen werden.

Einen anderen Ausgangspunkt für die in Rede stehenden Betrachtungen liefert der *Cauchy*'sche Satz[143]):

(30) $\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} (\varphi(x+1) - \varphi(x))$, falls der Grenzwert *rechts* existiert, und dessen von *Stolz* herrührende Verallgemeinerung[144]):

Ist $\varphi(x)$ *endlich* für jedes *endliche* Intervall (x_0, X), $\psi(x)$ *monoton* für $x \geqq x_0$ und *entweder* $\lim_{x=+\infty} \varphi(x) = \lim_{x=+\infty} \psi(x) = 0$ *oder* zum mindesten $\lim_{x=+\infty} \psi(x) = \pm\infty$, so wird:

(31) $\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{\varphi(x \pm h) - \varphi(x)}{\psi(x \pm h) - \psi(x)}$ (h konstant),

falls der Grenzwert *rechts existiert*. —

Weitere unbestimmte Formen, wie $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ wurden ebenfalls bereits von *Euler*[145]) behandelt. Von *Cauchy* stammen die auf die Fälle ∞^0 und $1^{\pm\infty}$ bezüglichen Sätze:

---

142) Doch braucht er keineswegs nach einer begrenzten Anzahl von Anwendungen zu einem Resultate zu führen. Beispiele, bei denen der Satz versagt oder von vornherein nicht gilt, findet man bei *Pascal*, Esercizî p. 240 ff. — Vgl. auch: *H. Laurent*, Traité d'anal. 1 (1885), p. 372.

143) Anal. algébr. p. 48. — Vgl. auch I A 3, **18**.

144) *Stolz*, Arithm. 1, p. 176. (Unter etwas engeren Voraussetzungen: Math. Ann. 14 [1879], p. 232, 234). — Weitere Verallgemeinerungen giebt *Stolz*: Math. Ann. 33 (1889), p. 243, im Anschluss an einen Satz von *J. L. W. Jensen* (Par. C. R. 106 [1888], p. 833).

145) A. a. O. p. 757. Trotz der im wesentlichen schon bei *Euler* richtigen Auffassung solcher Symbole sucht *L. Mascheroni* in der von ihm besorgten 2. Ausg. von *Euler*, Inst. calc. diff. (Ticini, 1787, 2, p. 813) zu *beweisen*, dass *allemal* $0^0 = 1$ sei. *G. Libri* (J. f. Math. 10 [1833], p. 305) giebt einen neuen „Beweis" hierfür und „beweist" ferner, dass 0^x nur einen der drei Werte 0, 1, ∞ annehmen könne.

(32) $\lim_{x=+\infty} (\varphi(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=+\infty} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$, wenn $\lim \varphi(x) > 0$ und der Grenzwert *rechts* existiert[146]); und:

(33) $$\lim_{x=\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$[147])

An späterer Stelle[148]) giebt er allgemeine Regeln zur Zurückführung von $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$ auf die Fälle $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Sie beruhen auf den Umformungen:

(34) $$\varphi(x) \cdot \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)^{-1}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)^{-1}}, \quad \varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \cdot \lg \varphi(x)}$$

und sind in fast alle Lehrbücher der Differentialrechnung übergegangen.

Die Form $\infty - \infty$ wird gewöhnlich mit Hülfe der Transformationen:

(35) $$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\psi(x)^{-1} - \varphi(x)^{-1}}{\psi(x)^{-1} \cdot \varphi(x)^{-1}} \quad \text{oder} \quad = \lg \frac{e^{-\psi(x)}}{e^{-\varphi(x)}} = \lg \frac{e^{\varphi(x)}}{e^{\psi(x)}}$$

auf den Fall $\frac{0}{0}$ bezw. $\lg \frac{0}{0}$, $\lg \frac{\infty}{\infty}$ zurückgeführt[149]).

14. Unstetigkeiten *(Diskontinuitäten).* *Unstetig* heisst $f(x)$ für $x = a$, sobald $f(x)$ für unendlich viele Punkte in der Umgebung von $x = a$ definiert und die Stetigkeitsbedingung: $|f(a \pm h) - f(a)| < \varepsilon$, für $h < \delta$, aus irgendwelchen Gründen nicht erfüllt ist. Nimmt man an, dass $f(x)$ für *alle* Punkte einer gewissen Umgebung von $x = a$ *definiert* sei (d. h. entweder *von vornherein* oder vermöge irgendwelcher *nachträglichen* Festsetzungen), so ergeben sich folgende Möglichkeiten:

A. Endliche Diskontinuitäten — wenn $\overline{f(a \pm 0)}$[150]) *endlich* und $f(a)$ gleichfalls *endlich* oder *überhaupt nicht definiert* ist. Man unterscheidet nach *Dini* (§ 31):

I. Diskontinuitäten erster Art (*gewöhnliche* Diskontinuitäten). Sie erfordern, dass $f(a + 0)$, $f(a - 0)$ beide bestimmte Zahlen vorstellen und:

146) Anal. algébr. p. 53.

147) Résumé des leçons calc. inf. (Paris, 1823), p. 4. Das zur Berechnung angewendete Prinzip (d. h. der Nachweis der Beziehung: $\lim_{x=\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\nu=\infty} \left(1 \pm \frac{1}{\nu}\right)^{\pm\nu}$, wo ν positiv ganzzahlig) liefert eine Illustration zu der Fussn. 67 gegebenen Erklärung von $\lim f(x)$.

148) Leçons sur le calc. diff. (1829), p. 43. Teilweise auch schon bei *Euler* (a. a. O.), *Sim. L'Huilier*, *Lacroix* u. a.

149) z. B. *Stolz*, Grundz. 1, p. 84; *Pascal*, Calc. infinites. 1 (Milano 1895), p. 211.

150) Die Bezeichnung $\overline{f(a \pm 0)}$ bedeutet, dass in dem betreffenden Zusammenhange sowohl $f(a \pm 0)$, als $\overline{f(a \pm 0)}$ zu setzen ist. Vgl. I A 3, Fussn. 115.

1) *entweder* $f(a+0) = f(a-0)$, dagegen $f(a)$ davon *verschieden*[151]); in diesem Falle besitzt $f(x)$ an der Stelle $x = a$ eine *hebbare*[152]) d. h. durch Abänderung des *einen* Wertes $f(a)$ zu beseitigende Unstetigkeit;

2) *oder* $f(a+0) \gtrless f(a-0)$; alsdann erleidet $f(x)$ bei $x = a$ einen *„gewöhnlichen" (endlichen) Sprung*, gleichgültig ob: $f(a) = f(a+0)$, $= f(a-0)$, $\gtrless f(a \pm 0)$[153]) oder *nicht definiert* ist[154]). In den beiden ersten Fällen ist $f(a)$ nach *rechts* bezw. *links stetig*; in den beiden letzten kann $f(x)$ durch passende Abänderung bezw. Definition von $f(a)$ dazu gemacht werden.

II. Diskontinuitäten (Sprünge) zweiter Art finden statt, wenn $f(a+0)$ und $f(a+0)$ bezw. $f(a-0)$ und $f(a-0)$ *verschieden* ausfallen, was offenbar nur möglich ist[155]), wenn $f(x)$ *rechts* bezw. *links* von *a unendlich viele Maxima und Minima* (*Oscillationen*[156])) besitzt. Findet eine solche Diskontinuität nur auf *einer* Seite statt, so kann $f(x)$ auf *der anderen stetig*[157]) oder mit irgend einer anderen Diskontinuität behaftet seiu.

Als *Mass des Sprunges* oder als *Sprung* schlechthin bezeichnet *Dini* (§ 34) den *grössten* der Werte $|f(a \pm 0) - f(a)|$; der grössere der Werte $|f(a+0) - f(a)|$ bezw. $|f(a-0) - f(a)|$ heisst dann der *rechte* bezw. *linke Sprung*[158]). Zweckmässiger definiert man mit *Du Bois-Reymond*[159]) und *Pasch*[159]) als *Sprung* von $f(x)$ bei $x = a$

151) Der in **13** besprochene Fall, dass $f(a+0) = f(a-0) = b$, dagegen $f(a)$ *nicht definiert* ist, gehört, genau genommen, auch unter den Begriff der *hebbaren Unstetigkeit*.

152) Bezeichnung von *Riemann*: Werke p. 21. — Beispiele s. Fussn. 78. Allgemeine Darst.-Methoden: *Pringsheim*, Math. Ann. 26 (1886), p. 86).

153) Besonders häufig ist der für Fourier'sche Reihen etc. (II A 8) charakteristische Fall: $f(a) = \frac{1}{2}\left(f(a-0) + f(a+0)\right)$.

154) Beispiele zu allen vier Möglichkeiten s. Fussn. 79.

155) Vgl. 7, Fall I. II. — Dini, § 32.

156) Der zuweilen in gleichem Sinne gebrauchte Ausdruck *„Schwankung"* (s. z. B. *Dini-Lüroth* p. 76) wird hier besser vermieden, da derselbe seit *Riemann* eine andere spezifische Bedeutung (vgl. **6**) erlangt hat.

157) *Beispiel*: $f(1) = 1$, sonst: $f(x) = \sin \frac{1}{x-1} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{x^n}{x^n + n}$ bei $x = 1$.

158) Dabei hat also im Falle I $f(a \pm 0)$ die Bedeutung von $f(a \pm 0)$.

159) Funkt.-Th. p. 229; Math. Ann. 30 (1887), p. 139. *Pasch* (und ähnlich *Du Bois-Reymond*) bezeichnet als *Sprung* bei a die untere Grenze der Schwankungen in jedem Intervalle $(a-h,\ a+h)$, was dem Sinne nach mit der im Texte gegebenen Definition übereinstimmt. (Das analoge gilt für P.'s Definition der *„Schwingung"* von $f(x)$ bei $x = a$.)

die Differenz $f_1(a) - f_2(a)$, wo $f_1(a)$ die *grösste* der Zahlen $f(a \pm 0)$, $f(a)$, dagegen $f_2(a)$ die *kleinste* der Zahlen $f(a \pm 0)$, $f(a)$ bedeutet; die entsprechende Festsetzung gilt dann bezüglich des *rechten* bezw. *linken Sprunges*. Als *Schwingung* von $f(x)$ für $x = a$ bezeichnet man nach *Pasch*[160]) die Differenz $\varphi_1(a) - \varphi_2(a)$, wo $\varphi_1(a)$ die *grössere* der Zahlen $f(a \pm 0)$, dagegen $\varphi_2(a)$ die *kleinere* der Zahlen $f(a \pm 0)$ vorstellt; die Differenzen $f(a+0) - f(a+0)$ bezw. $f(a-0) - f(a-0)$ gelten dann als *rechte* bezw. *linke Schwingung*[161]).

B. Unendliche Diskontinuitäten finden statt, wenn mindestens einer der 4 Limites $f(a \pm 0)$ unendlich *wird* oder $f(a) = \infty$ *ist* (s. 8). Im letzteren Falle kann sogar $f(a+0) = f(a-0)$ *endlich*, also die unendliche Diskontinuität *hebbar* sein. Im übrigen sind hier folgende Typen zu unterscheiden:

I. Gewöhnliche Unendlichkeitsstellen, dadurch charakterisiert, dass $f(x)$ auf beiden Seiten von a *monoton* verläuft, $f(a+0) = \pm\infty$ und $f(a-0) = \pm\infty$ (aber $f(a+0)$, $f(a-0)$ nicht notwendig *gleich* bezeichnet), $f(a)$ *uneigentlich* (d. h. $f(a)^{-1} = 0$) oder *garnicht* definiert ist. Bezüglich der *Graduierung* eines derartigen Unendlichwerdens gelten die analogen Bestimmungen, wie für *monotone Zahlenfolgen*[162]). Hervorzuheben ist hierbei, dass der Charakter von $x = a$ als *gewöhnliche* ∞-Stelle von $f_1(x)$, $f_2(x)$ noch *keineswegs* die *Vergleichbarkeit* von $f_1(a)$, $f_2(a)$ $\left(\text{d. h. die Existenz von } \lim_{x=a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)$ involviert[163]).

II. Unendlichkeitsstellen mit Oscillationen sind von den *gewöhnlichen* nur dadurch unterschieden, dass die Voraussetzung der *Monotonie* von $f(x)$ zum mindesten auf *einer* Seite von a nicht erfüllt ist. Die

---

160) A. a. O. p. 139. Beziehungen zwischen den Sprüngen und Schwingungen innerhalb eines Intervalls (x_0, X) ibid. p. 139—142, 149.

161) Auch als *Amplitude* der rechts- bezw. linksseitigen Oscillationen bezeichnet (*Dini* § 56). In gleichem Sinne gebraucht *G. Ascoli* (Linc. Atti (2), 2 [1874/75], p. 869) die Bezeichnungen: „Oscillatione a destra (sinistra)", während er unter: „Oscillatione di $f(x)$ nel punto a" dasjenige versteht, was im Text als *Sprung* von $f(x)$ für $x = a$ bezeichnet ist.

162) Vgl. I A 3, **19**; I A 5, **17**; im übrigen: *Du Bois-Reymond*, Ann. di mat. (2), 4 (1870/71), p. 338; J. f. Math. 74 (1872), p. 294; Math. Ann. 8 (1874), p. 363, 574; desgl. 10 (1876), p. 576; desgl. 11 (1877), p. 149. Verallgemeinerung der Vergleichung verschiedener Unendlich bei *Pincherle*: Bol. Mem. (4), 5 (1885), p. 739.

163) *Beispiel*: $f_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{3}\sin(\lg x^2)\right)$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ bei $x = 0$. Vgl. auch: *Stolz*, Math. Ann. 14 (1874), p. 132; *Pringsheim*, ibid. 37 (1890), p. 593.

auftretenden Oscillationen können dabei *endlich*, *unendlich gross* oder *unendlich klein* sein[164]).

III. Als *Stellen unbestimmten Unendlichwerdens* lassen sich alle diejenigen bezeichnen, für welche $f(a)$ nicht eigentlich definiert ist, $f(a+0)$ von $\overline{f(a+0)}$ bezw. $f(a-0)$ von $\overline{f(a-0)}$ *verschieden* und zum mindesten *einer* dieser Limites *unendlich* ausfällt[165]).

Weitere Modificationen sind in der Weise möglich, dass $f(a)$ selbst eigentlich definiert erscheint, im übrigen sich alles, wie in I—III verhält[166]); oder dass eine der bezeichneten Diskontinuitäten nur auf *einer* Seite auftritt, auf der anderen $f(x)$ *stetig* oder mit einer *anderen* Diskontinuität behaftet ist.

15. Singuläre Stellen. Man sagt, $x = a$ sei eine *singuläre Stelle* für $f(x)$, oder auch, $f(x)$ habe an der Stelle $x = a$ eine *Singularität*, wenn $f(x)$ daselbst ein den *Definitionsbedingungen* nicht entsprechendes Verhalten zeigt. Der Begriff der *singulären* Stelle ist daher in der *allgemeinen* Funktionenlehre kein an und für sich feststehender[167]), sondern er hängt wesentlich davon ab, welchen besonderen Bedingungen $f(x)$ von vornherein unterworfen wird. Immerhin hat sich wohl ziemlich allgemein der Usus herausgebildet, für die generelle Begriffsbestimmung der „singulären Stellen" reeller Funktionen den Charakter der *„gewöhnlichen"* Funktion zu Grunde zu legen. Darnach pflegt man also darunter zu verstehen: *Unstetigkeitspunkte* jeder Art, *Stetigkeitspunkte* mit *unendlich vielen Oscillationen* gegen irgend eine Richtung, Stellen mit *unendlich grossen* bezw. rechts und links *verschiedenen Derivierten* oder solche *ohne bestimmte* rechte bezw. linke *Derivierte*.

164) *Beispiele*: $\frac{1}{x^2} + \sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2} + x\cdot\sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$. Man bemerke, dass ein solches Unendlich sehr wohl mit demjenigen an einer *gewöhnlichen* ∞-Stelle *„vergleichbar"* sein kann. *Jede* der genannten drei Funktionen wird für $x = 0$ *„gerade so unendlich"* wie $\frac{1}{x^2}$.

165) *Beispiele*: $\frac{1}{x}\sin^m\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\sin^m\frac{1}{x}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{(1+x)^n}{(1+x)^n+1}$ $(m = 1, 2)$ bei $x = 0$.

166) Dieser Fall tritt wiederum besonders häufig bei Fourier'schen Reihen etc. auf (vgl. Fussn. 82). *Beispiele*: Sinusreihen für $x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{5}}\cdot\cos\frac{1}{x}$, $x^{-\frac{1}{3}}\cdot\cos\frac{1}{x}$ — bei $x = 0$.

167) Anders in der *engeren* Funktionentheorie, wo es sich ein für allemal nur um *analytische* bezw. *monogene* Funktionen handelt.

16. Definition von Funktionen durch Grenzwerte. Gleichmässige Konvergenz. Die Anwendung der vier Spezies in begrenzter Anzahl liefert lediglich *rationale* $f(x)$, deren *singuläre* Stellen ausschliesslich *gewöhnliche* ∞-*Stellen* in endlicher Anzahl sind. Dazu kommen bei den nicht-rationalen *algebraischen* $f(x)$ noch *gewöhnliche* ∞-*Stellen* für $f'(x)$, ebenfalls in endlicher Anzahl. Die analytische Darstellung von Funktionen, welche Singularitäten der genannten Art in *unbegrenzter* Anzahl oder irgend welche *andere* Singularitäten besitzen, beruht also allemal auf der Benützung von *Grenzprozessen*. Als einfachste Darstellungsform dieser Gattung erscheint die folgende:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x), \tag{36}$$

wo $f_n(x)$ $(n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots)$ eine unbegrenzte Folge rationaler oder durch irgendwelche andere Rechnungsvorschriften (eventuell auch wiederum durch Grenzübergänge) definierter Funktionen bedeutet; sie enthält als spezielle Fälle die Definition eines $f(x)$ durch irgend einen der gewöhnlichen *unendlichen Algorithmen* (Reihen, Produkte, Kettenbrüche) und kann auch unmittelbar in jeden solchen übergeführt werden[168]). Bezüglich der Bedeutung einer Definitionsgleichung von der Form (36) gilt folgende Festsetzung: Ist a irgend eine bestimmte Zahl, für welche die *Folge* $f_n(a)$ *konvergiert*[169]), so hat man: $f(a) = \lim_{n=\infty} f_n(a)$; oder, wenn etwa a eine Irrationalzahl bedeutet, also selbst als Grenzwert einer rationalen Folge erscheint: $f(a) = \lim_{n=\infty}\ (\lim_{x=a} f_n(x))$. Die Gesamtheit der Stellen $x = a$, für welche jener Grenzwert als endliche Zahl existiert, bildet dann den *Konvergenzbereich* von $\lim f_n(x)$ und den *Definitionsbereich* der Funktion $f(x)$, welche also für *jede* Stelle dieses Bereiches *völlig eindeutig* definiert ist[170]). Im allgemeinen wird es zweckmässig erscheinen, dem

168) Vgl. I A 3, **43**, **53**.

169) I A 3, **13**, **14**.

170) An dieser, namentlich auch von *Weierstrass* (s. z. B. Werke 2, p. 201) betonten Begriffsbestimmung muss festgehalten werden, wenn nicht bezüglich der Definition von Funktionen durch unendliche Algorithmen Verwirrung eintreten soll. Darnach hat z. B. die *Summe der Fourier'schen Reihe*: $\lim_{n=\infty} f_n(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \varphi_\nu(x)$ überall, wo sie konvergiert, einen *einzigen bestimmten Wert*, insbesondere an einer *Sprungstelle* der dargestellten Funktion $F(x)$ *durchaus eindeutig* den Wert: $\frac{1}{2}(F(a-0) + F(a+0))$, *nicht* aber, wie eine Bemerkung von *Du Bois-Reymond* (Math. Ann. 7 [1874], p. 254) gedeutet werden könnte, *jeden* Wert von

*Definitions*bereiche von $f(x)$ auch diejenigen *Grenzstellen* des *Konvergenz*bereiches von $\lim f_n(x)$ hinzuzufügen, für welche *eigentliche Divergenz*[171]) stattfindet.

Ist eine dem Konvergenzbereiche von $\lim f_n(x)$ angehörige Stelle $x = a$ ein *Stetigkeitspunkt* von $f_n(x)$ für jedes einzelne (noch so grosse) n, so braucht deshalb $f(x)$ für $x = a$ *nicht stetig* zu sein, d. h. man hat *nicht* notwendig: $\lim\limits_{n=\infty}\left(\lim\limits_{x=a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x=a}\left(\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)\right)$[172]). Eine *hinreichende* (aber keineswegs notwendige) Bedingung hierfür besteht darin, dass die Beziehung:

$$|f_{n+\varrho}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots) \tag{37}$$

oder die damit gleichwertige:

$$|f(x) - f_\nu(x)| < \varepsilon \qquad (\nu \geq n) \tag{38}$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für *alle* x eines angebbaren Intervalls $a - \delta \leq x \leq a + \delta$ durch Wahl eines bestimmten n befriedigt werden kann. Man sagt alsdann, $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$ konvergiere *gleichmässig in der Umgebung von* $x = a$ (wohl auch *bei* oder, weniger korrekt: *für* $x = a$). Entsprechend lässt sich die *gleichmässige* Konvergenz für die lediglich *rechte* bezw. *linke* Umgebung von $x = a$ definieren. Die Konvergenz heisst in der Nähe von $x = a$ *ungleichmässig*, wenn die (in dem eben betrachteten Falle nur von ε abhängige) Zahl n in der Weise von x abhängt, dass sie bei unbegrenzter Annäherung an die Stelle a un begrenzt vergrössert werden muss[173]).

$F(a - 0)$ bis $F(a + 0)$. Letzteres gilt lediglich für den *allgemeineren* („*simultanen*" [s. **23**]) Grenzwert: $\lim\limits_{n=\infty,\, x=a} f_n(x)$. (Vgl. auch: *A. Sachse*, Diss. Göttingen 1879, p. 17 oder Ztschr. Math. Ph. Suppl. zu 25 [1880], p. 243; *Du Bois-Reymond*, Zur Gesch. der trig. Reihen [1879], p. 18.) — Auch die von *L. Schlaefli* (J. f. Math. 72 [1870], p. 284; Univ.-Progr. Bern 1874, p. 15) gegen jene eindeutige Wertbestimmung der F.'schen Reihe erhobenen Einwendungen beruhen auf einer unscharfen Auffassung des Symbols $\sum\limits_0^\infty \varphi_\nu(x)$ d. h. $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_0^n \varphi_\nu(x)$.

171) Man hat also an einer solchen Stelle a': $f(a') = +\infty$ bezw. $= -\infty$.

Beispiel: $f_n(x) = \sum\limits_0^n \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^\nu$, also $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ für $|x| > 0$; $f(0) = +\infty$.

172) S. Fussn. 79, Beisp. 2)—4).

173) *Beispiele*: $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ bei $x = 0$ (der erste Grenzwert *unstetig*, der zweite *stetig*); ausserdem die in Fussn. 172 zitierten.

Konvergiert $\lim f_n(x)$ *gleichmässig* bei jeder einzelnen Stelle $x_0 \leq a \leq X$ (bei x_0 zum mindesten *rechts-*, bei X *links*seitig), so konvergiert $\lim f_n(x)$ auch *„im Intervall"* (x_0, X) *gleichmässig*, d. h. die Bedingung (37) bezw. (38) kann dann bei vorgeschriebenem ε für *alle* x von (x_0, X) durch *ein und dasselbe* n befriedigt werden[174]).

17. Gleichmässige Konvergenz unendlicher Reihen. Setzt man: $f_n(x) = \sum_0^n{}_\nu \varphi_\nu(x)$, d. h. $\varphi_0(x) = f_0(x)$, sonst: $\varphi_\nu(x) = f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x)$, so definiert[175]) die Beziehung (37) bezw. (38) (wo jetzt: $f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \varphi_\nu(x)$) die *gleichmässige* Konvergenz der betr. *Reihe*[176]) für die Umgebung von $x = a$. Gerade in diesem speziellen Zusammenhange wurde man zuerst auf die Notwendigkeit des fraglichen Begriffes geführt, der sich späterhin für die gesamte Funktionenlehre als fundamental erwiesen hat (vgl. auch **24**). Der von *Cauchy*[177]) ausgesprochene Satz, dass aus der Stetigkeit der einzelnen $\varphi_\nu(x)$ allemal diejenige von $f(x)$ folge, beruhte auf der irrigen Supposition, dass jede in der Umgebung von $x = a$ konvergierende Reihe daselbst *eo ipso gleichmässig* konvergieren müsse, und wurde zunächst von *N. H. Abel* unter Hinweis auf die bei $x = 0$ *unstetige* Reihe: $\sum (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\sin \nu x}{\nu}$ als unzutreffend erkannt[178]). Letzterer zeigte sodann[179]), dass den Summen konvergenter *Potenz-*

174) Vgl. *Weierstrass*, Berl. Ber. 1880, p. 271 (Werke 2, p. 203). — *Pringsheim*, Math. Ann. 44 (1894), p. 80.

175) Die von *A. Cayley* (Edinb. Proc. 19 [1893], p. 203; Coll. Papers 13, p. 936) gegen diese Definition erhobenen Einwendungen scheinen mir auf einem Missverständnisse zu beruhen.

176) Hervorzuheben ist, dass die *gleichmässige* Konvergenz einer Reihe weder deren *unbedingte* Konvergenz involviert, noch umgekehrt. So konvergiert z. B. $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^2+\nu}$ zwar *gleichmässig* in jedem reellen Intervall, aber durchweg nur *bedingt*; und $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^\nu$ konvergiert zwar für jedes reelle x *unbedingt*, aber bei $x = 0$ *ungleichmässig*.

177) Anal. algébr. (1821), p. 131. — Durch passende Einschränkungen *berichtigter* Satz bei *Du Bois-Reymond*, Math. Ann. 4 (1871), p. 135.

178) J. f. Math. 1 (1826), p. 316 Fussn. (Werke 1, p. 224).

179) A. a. O. p. 314 (bezw. p. 223). Anderer Beweis von *Dirichlet*: J. de math. (2), 7 (1863), p. 252 (Werke 2, p. 303). Ein weiterer auf Reihen mit zwei Veränderlichen bezüglicher Stetigkeitssatz *Abel's* (a. a. O. Lehrs. V) ist in seinen Voraussetzungen unvollständig; näheres *Pringsheim*, Münch. Ber. 27 (1897), p. 351.

reihen (mit eventuellem Einschluss der *Konvergenzgrenze*) in der That *Stetigkeit* zukomme, indem er hier direkt die Existenz derjenigen Eigenschaft nachwies, welche jetzt als *gleichmässige* Konvergenz bezeichnet wird. Die Grundlage zur allgemeinen Formulierung des fraglichen Begriffes lieferten zuerst *G. G. Stokes*[180]) und *Ph. L. Seidel*[181]) durch den Nachweis des folgenden Satzes: „Sind für $x = a$ die einzelnen $\varphi_\nu(x)$ zwar *stetig*, dagegen $\sum\varphi_\nu(x)$ *unstetig*, so muss die Reihe bei unbegrenzter Annäherung von x an die Stelle a *„unendlich langsam“* (*Stokes*[182]) bezw. *„beliebig langsam“* (*Seidel*) konvergieren.“ Auch *Cauchy*[183]) hat späterhin, wohl unabhängig von den beiden eben genannten, seinen oben erwähnten falschen Stetigkeitssatz berichtigt und bei dieser Gelegenheit das Wesen der *gleichmässigen* Konvergenz vollkommen scharf charakterisiert. Die *Bezeichnung* „gleichmässige“ Konvergenz[184]) dürfte von *Weierstrass* herrühren, durch dessen Vorlesungen die einschneidende Bedeutung und Unentbehrlichkeit dieses Begriffes wohl zuerst zu allgemeiner Erkenntnis gelangte.

Die von *Seidel*[181]) und auch noch sehr viel später von *Heine* als unaufgeklärt bezeichnete Frage, ob umgekehrt die *Stetigkeit* der Reihensumme die *gleichmässige Konvergenz* nach sich ziehe, wurde von *G. Darboux*[185a]), *Du Bois-Reymond*[185b]) und *G. Cantor*[185c]) durch

180) Cambr. Trans. 7 (1847), p. 533 (Math. and phys. papers 1 [1880], p. 236).

181) Münch. Abh. II Kl. 7 (1848), p. 381.

182) Die von *R. Reiff* (Gesch. der unendl. Reihen, Tübingen 1889, p. 209) an dem *Stokes*'schen Beweise geübte Kritik scheint mir unzutreffend. Der Beweis selbst ist richtig, fehlerhaft ist nur der von *Stokes* weiterhin daraus gezogene Schluss, dass aus der *Stetigkeit* der Reihensumme auch umgekehrt die *Gleichmässigkeit* der Konvergenz folge, während *Seidel* diese Frage als eine offene erklärt. Dagegen geht *Stokes* insofern über *Seidel* hinaus, als er zuerst das wirkliche Eintreten der *„unendlich verzögerten“* Konvergenz an höchst einfachen, seitdem typisch gewordenen *rationalen* $\varphi_\nu(x)$ direkt nachweist.

183) Par. C. R. 36 (1853), p. 454.

184) Manche Autoren z. B. *Heine* (J. f. Math. 71 [1870], p. 353); *H. A. Schwarz* (Ges. Abh. 2, p. 272) bedienen sich des Ausdrucks: Konvergenz *in gleichem Grade*. Bei *Weierstrass* in zwei von 1841/42 (also *vor Stokes* und *Seidel*) *datierten*, aber *damals nicht publizierten* Aufsätzen, steht Werke 1, p. 67, 70 *„gleichmässig“*, p. 73, 81 *„gleichförmig“* konvergent. — *Du Bois-Reymond* bezeichnet (Berl. Ber. 1886, p. 359) als *„stetige Konvergenz“* dasjenige, was hier (Nr. **16**) als *„gleichmässige Konvergenz für jede einzelne Stelle“* definiert wird. Und er nennt späterhin (J. f. Math. 100 [1887], p. 336) *„stetige Konvergenz im Intervalle“*, was hier als *„gleichmässige Konvergenz im Intervalle“* bezeichnet wurde.

185) a) Ann. École norm. (2), 4 (1875), p. 79. — b) Münch. Abh. II Kl. 12^1 (1875), p. 120 Fussn. — c) Math. Ann. 16 (1880), p. 268.

Konstruktion geeigneter Beispiele im *verneinenden* Sinne entschieden[186]). Dagegen kann man auf die *gleichmässige* Konvergenz von $\sum \varphi_\nu(x)$ allemal dann schliessen, wenn $\sum |\varphi_\nu(x)|$ *konvergent* und *stetig* ist[187]).

Andererseits wird unmittelbar erkannt, dass es für die Stetigkeit von $\sum \varphi_\nu(x) = \lim f_n(x)$ schon *hinreicht*, wenn (neben der Stetigkeit der einzelnen $f_n(x)$) die Bedingung (37) nur für $\lim \varrho = \infty$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Bedingung (38) zu jedem $\varepsilon > 0$ nur für *einen* oder *einige* Werte ν besteht. *Dini* bezeichnet diese Eigenschaft als *einfach gleichmässige* Konvergenz[188]).

Als *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die Stetigkeit von $\lim f_n(x)$ hat *C. Arzelà* die Eigenschaft der *„streckenweise gleichmässigen"* Konvergenz (*„convergenza in egual grado* [oder *uniforme*] *a tratti"*) aufgestellt. Sie verlangt die Existenz der Beziehung (38) nur in folgendem Umfange: Jedem $\varepsilon > 0$ und ganzzahligem $n > 0$ lässt sich ein $\delta > 0$ und $n' \geq n$ so zuordnen, dass zu jedem x des Intervalls $(a - \delta,\ a + \delta)$ mindestens ein (eventuell mit x veränderliches) ν des Intervalls (n, n') vorhanden ist, für welches $|f(x) - f(x_\nu)| < \varepsilon$ wird[189]). — (Über die mit dem Begriffe der *gleichmässigen Konvergenz* in engem Zusammenhange stehende *Differentiation* und *Integration* unendlicher Reihen vgl. II A 8.)

18. Kondensation von Singularitäten. Auf dem Umstande, dass eine *gleichmässig* konvergente Reihe $f(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu(x)$ mit beliebiger, für ein gewisses Intervall *gleich bleibender* Annäherung durch $\sum_0^n \varphi_\nu(x)$ ersetzt werden kann, beruht die Möglichkeit, solche $f(x) = \sum_0^\infty \varphi_\nu(x)$

186) Einfachstes Beispiel (im wesentlichen nach *G. Cantor*): $\varphi_\nu(x) = \frac{\nu x}{1 + \nu^2 x^2} - \frac{(\nu+1)x}{1 + (\nu+1)^2 x^2}$ bei $x = 0$. (Vgl. auch Fussn. 173.)

187) *Dini* § 99. — Vgl. auch *Pringsheim*, Math. Ann. 44 (1894), p. 82; *Pascal*, Esercizî p. 147.

188) A. a. O. § 91. *Darboux* (a. a. O. p. 77) nennt eine Reihe schon in diesem Falle *„gleichmässig"* konvergent schlechthin. Beispiele von Reihen, welche lediglich *einfach gleichmässig* konvergieren: *Dini-Lüroth*, p. 138 Fussn. (nach *V. Volterra*, Giorn. di mat. 19 [1881], p. 79); *J. Tannery*, Introd. p. 134. (Die daselbst auf *Dini* bezügliche Angabe ist ungenau.) *J. Bendixson*, Stockh. Öfv. 1897, p. 605.

189) Bol. Rend. Aprile 1884, p. 8. Die im Text angegebene (auf der Deutung von x und $\frac{1}{n}$ als rechtwinklige Coordinaten beruhende) Benennung findet sich erst: Linc. Rend. (4), 1 (1885), p. 326. *Geometrische* Darstellung verschiedener, durch ungleichmässige Konvergenz erzeugter Möglichkeiten: *Osgood*, N. Y. Bull. (2), 3, p. 59.

zu konstruieren, welche auch die *Unstetigkeiten* oder sonstigen *Singularitäten aller einzelnen* $\varphi_\nu(x)$, eventuell also auch (bei geeigneter Wahl der $\varphi_\nu(x)$) *unendlich viele, überall dicht* (pantachisch) *liegende Singularitäten* besitzen. Das hiermit angedeutete Prinzip[190]) pflegt man nach *Hankel*[191]) als dasjenige der *Kondensation von Singularitäten* zu bezeichnen. Das erste Beispiel dieser Art gab *Riemann* (Habil.-Schrift, 1854) durch Aufstellung der in jedem kleinsten Intervalle mit (gewöhnlichen) *Sprüngen* behafteten (nichtsdestoweniger integrablen[192])) Funktion $f(x) = \sum_1^\infty \frac{(\nu x)}{\nu^2}$[193]). Das nach ausdrücklicher Angabe *Hankel*'s (a. a. O. p. 77) aus diesem Beispiel hervorgegangene H.'sche Kondensationsprinzip beruht auf der Bildung von Reihen der Form: $f(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi(\sin \nu\pi x)$, wo die c_ν positive Zahlen mit gewissen Konvergenzeigenschaften vorstellen, $\varphi(y)$ eine für $y = 0$ mit irgend einer Singularität behaftete, im übrigen für $(-1, +1)$ analytische Funktion bedeutet. Da $\sin \nu\pi x$ für alle reellen x nur das Intervall $(-1, +1)$ durchläuft und $\sin \nu\pi x = 0$ wird, wenn $x = \frac{m}{n}$ (m, n natürliche Zahlen und rel. prim) und $\nu = k \cdot n$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$), so haben für jedes *rationale* $x = \frac{m}{n}$ unendlich viele Reihenglieder $c_\nu \cdot \varphi(\sin \nu\pi x)$ die fragliche Singularität, die dann *unter geeigneten Bedingungen* auch der Summe $f(x)$ zukommt und somit bei letzterer an *allen rationalen* Stellen auftritt. Durch den Umstand, dass die zu irgend einer einzelnen Stelle gehörige Singularität allemal *unendlich vielen* Reihengliedern zukommt, ist freilich die Möglichkeit einer Kompensation nicht ausgeschlossen, und, soweit es sich nicht um gewöhnliche Sprünge handelt[194]), der Nachweis des Gegenteils mit Schwierigkeiten verknüpft, die von *Hankel* nicht durchweg genügend berücksichtigt worden sind. Einige seiner Resultate sind daher mit Recht von *Ph. Gilbert*[195]) angefochten worden und erst *Dini*

190) Dabei kann an die Stelle der *Reihe* auch jeder andere unendliche Algorithmus treten (Bem. von *Dini*, § 118 am Schlusse).

191) A. a. O. p. 69.

192) Vgl. **19**, Fussn. 208 — im übrigen II A 2, **31**.

193) Werke p. 228. Dabei bedeutet (x) den pos. oder neg. Überschuss von x über die *nächste* ganze Zahl $E(x)$ bezw. $E(x+1)$ und speziell die 0, wenn $x = E(x) + \frac{1}{2}$. Übrigens kann (x) bezw. (νx) auch durch eine einfache trigonometrische Reihe dargestellt werden: *Du Bois-Reymond*, J. f. Math. 79 (1875), p. 26.

194) Vgl. *Darboux*, a. a. O. p. 80.

195) Brux. mém. cour. 23 (1873), p. 1. — Vgl. auch *Darboux*, a. a. O. p. 106.

(§ 107—115) hat die Tragweite der *Hankel*'schen Methode mit genauer Unterscheidung der verschiedenen Singularitäten-Möglichkeiten in genügender Weise festgestellt.

Im übrigen leidet jene Methode an dem weiteren Übelstande, dass die als Argumente von φ auftretenden $\sin \nu\pi x$ ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) wegen der mit wachsendem ν unbegrenzt sich verdichtenden Oscillationen eine *an sich unnötige* Komplikation herbeiführen, und dass zunächst immer nur die *rationalen* Stellen als Träger der betr. Singularität erscheinen[196]). Die von *G. Cantor* gemachte Entdeckung der *Abzählbarkeit* gewisser überall dichter Mengen (zu denen neben den *rationalen* die allgemeineren *algebraischen* gehören[197])) führte zu einer wesentlich einfacheren, im Prinzip von *Weierstrass* herrührenden und von *G. Cantor* zuerst publizierten[198]) Kondensationsmethode, nämlich zur Bildung von Reihen der Form $f(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi(x - a_\nu)$, wo (a_ν) irgend eine abzählbare (eventuell überall dichte) Menge, (c_ν) eine Folge positiver Zahlen mit passenden Konvergenzeigenschaften bedeutet, $\varphi(y)$ nur für $y = 0$ mit einer Singularität behaftet ist, die dann bei $f(x)$ an allen Stellen der Menge auftritt[199]).

Das der oben zitierten *Riemann*'schen Funktion zu Grunde liegende Kondensationsverfahren erscheint direkt nachgebildet in dem von *Schwarz* gegebenen Beispiel einer monotonen, stetigen, für unendlich viele überall dichte *x nicht-differenzierbaren* Funktion[200]); in seiner typischen Gestalt: $f(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi(\nu x)$ nebst der Verallgemeinerung: $f(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi(m_\nu x)$ findet es sich bei *Darboux* (a. a. O. p. 90).

196) *G. Cantor,* Lit. Centr.-Bl. 1871, p. 150.

197) Vgl. I A 5, 2.

198) Math. Ann. 18 (1882), p. 588. Vgl. auch *Dini-Lüroth,* p. 188 ff.

199) Ist $\varphi(y) = \sum_0^\infty{}_\mu \psi_\mu(y)$, wo die $\psi_\mu(y)$ durchweg *stetig* und $\varphi(0)$ lediglich *unstetig* infolge *ungleichmässiger Konvergenz* von $\sum \psi_\mu(y)$ bei $y = 0$, so wird $f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu \sum_0^\infty{}_\mu \psi_\mu(x - a_\nu)$ bei geeigneter Wahl der c_ν, a_ν *pantachisch unstetig.* Unter gewissen Cautelen kann man aber mit Vertauschung der Summationsfolge setzen: $f(x) = \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu \cdot \psi_\mu(x - a_\nu) = \sum_0^\infty{}_\mu \varphi_\mu(x)$, wo jetzt die $\varphi_\mu(x)$ als *gleichmässig* convergente Reihen *stetige* Funktionen von x sind. Man erhält also eine aus *stetigen* Gliedern bestehende Reihe mit *pantachisch unstetiger* Summe, sodass an *keiner* Stelle die Konvergenz eine *gleichmässige* sein kann. (Gelegentlich eines Beispiels bemerkt von *M. Lerch,* Giorn. di mat. 26 [1888], p. 375.)

200) Ges. Abh. 2, p. 269. Vgl. Fussn. 115.

Eine gelegentliche Bemerkung *Riemann*'s (in Bezug auf die Reihe: $\sum \sin \nu! \cdot \pi x$: Werke, p. 250) hat wohl auch zuerst auf die Betrachtung von Reihen der Form: $\sum c_\nu \cdot \sin \nu! \cdot \pi x$, $\sum c_\nu \cdot \cos \nu! \cdot \pi x$ und der etwas allgemeineren: $\sum c_\nu \cdot \sin m_\nu x$, $\sum c_\nu \cdot \cos m_\nu x$ (wo m_ν, $\frac{m_\nu}{m_{\nu-1}}$ natürliche Zahlen > 1) geführt, welche je nach Wahl der c_ν in Bezug auf Existenz der ersten Derivierten unendlich oft oder sogar *durchaus* sich singulär verhalten[201]), oder aber Derivierte *jeder* Ordnung besitzen, ohne für irgend eine Stelle *analytisch* zu sein[202]). Dabei zeigt sich, dass die Auswahl der Zahlen m_ν noch einer erheblichen Verallgemeinerung fähig ist und dass auch sin $m_\nu x$, cos $m_\nu x$ durch gewisse $\varphi(m_\nu x)$ von allgemeinem Charakter ersetzt werden können[203]).

Ein auf Bildung unendlicher *Produkte* basierendes Kondensationsverfahren hat neuerdings *T. Brodén* zur Darstellung von Funktionen mit überall dichten Nullstellen angewendet[204]).

19. Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten (in endlichen Intervallen). Bezüglich der Terminologie finden sich hier bei verschiedenen Autoren Abweichungen, welche auf die Formulierung gewisser Hauptsätze entscheidenden Einfluss ausüben und leicht zu Missverständnissen Anlass geben können. *Hankel* (p. 91) bezeichnet als *punktiert* unstetig solche Funktionen, bei denen *Sprünge* $> \sigma$ nur *„zerstreut"*, d. h. *nirgends überall dicht* vorkommen. Damit stimmt *Dini*'s Definition zwar nicht dem Wortlaute, wohl aber dem Umfange nach überein[205]). Dagegen nennt *A. Harnack*[206]) $f(x)$ nur dann *punktiert unstetig*, wenn die Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ eine *„diskrete"*

201) Diesem Typus gehört u. a. die in **10** erwähnte *Weierstrass*'sche Funktion an. Ferner vgl. *Darboux*, a. a. O. p. 107; *Dini*, Ann. di mat. (2), 8 (1877), p. 137; *Dini-Lüroth*, p. 229; *Lerch*, Prag. Ber. 1886, p. 571; desgl. J. f. Math. 103 (1888), p. 126; *Ch. Cellérier*, Darboux Bull. (2), 14 (1890), p. 152.

202) *Lerch*, J. f. Math. 103, p. 136. — *Cellérier*, a. a. O. p. 158. — *Pringsheim*, Math. Ann. 42 (1893), p. 182; 44 (1894), p. 51; 50 (1898), p. 444.

203) *Dini*, Ann. di mat. (2), 8 (1877), p. 130. — *Dini-Lüroth*, p. 218. — *Darboux*, Ann. École norm. (2), 8 (1879), p. 195. — *Lerch*, a. a. O. p. 126.

204) Math. Ann. 51 (1898), p. 299.

205) *Dini* (§ 62) nennt Funktionen *punktiert unstetig*, wenn sie in jedem kleinsten Intervalle *Stetigkeitspunkte* besitzen; in der That liegen dann die Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ nirgends dicht — *vice versa* (vgl. *Hankel* p. 90; *Dini* § 63—65). Der von *St. Smith* (Lond. math. Proc. 6 [1875], p. 150, § 18) gegen die Gültigkeit dieses *„vice versa"* erhobene Einwurf wendet sich unzutreffender Weise gegen die (von *Hankel* garnicht gemachte) Behauptung, dass allemal Stetigkeits-*Intervalle* existieren müssten.

206) Math. Ann. 19 (1882), p. 242; 24 (1884), p. 218.

(besser: „*unausgedehnte*“) Menge[207]) bilden (wie z. B. bei der *Riemann*'schen Funktion in **18**)[208]). Während ferner *Hankel* als *linear unstetig* jede Funktion bezeichnet, die in einem *endlichen* Intervalle *unendlich oft unstetig* wird, so versteht *Harnack*[206]) darunter nur solche Funktionen, bei denen die Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ eine „*lineare*“ (besser: „*ausgedehnte*“) Menge[207]) bilden. Diese letztere Begriffsbestimmung ist andererseits umfassender[209]), als die von *Hankel* eingeführte und von *Dini* dem Umfange nach acceptierte Definition der *total unstetigen* Funktionen, d. h. derjenigen, bei denen zum mindesten in irgendwelchen Teilintervallen *Sprünge* $> \sigma$ *überall dicht* vorkommen (*Hankel*) oder, was auf dasselbe hinausläuft[205]), *keine Stetigkeitspunkte* liegen (*Dini*).

Eine endlich bleibende, unendlich oft oder selbst pantachisch unstetige, abteilungsweise *monotone* Funktion ist immer nur *punktiert* unstetig (sogar in dem engeren *Harnack*'schen Sinne)[210]): die Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ können nämlich hier stets nur eine *endliche* Menge bilden. Das letztere gilt auch für eine umfangreichere Klasse von Funktionen, welche von *C. Jordan* zuerst als *fonctions à oscillation limitée*[211a]), später als *fonctions à variation bornée*[211b]) bezeichnet und neuerdings (auf Grund einer anders lautenden, aber dem Umfange nach gleichwertigen) Definition von *E. Study* als „*Funktionen mit beschränkter Schwankung*“ genauer untersucht worden sind[212]). Sie besitzen die charakteristische Eigenschaft, (auf unendlich viele Arten) als Summe (Differenz) zweier entgegengesetzt- (gleichartig-) *monotoner* Funktionen darstellbar zu sein, sind *integrabel* und bei Abwesenheit „*äusserer Sprünge*“ (d. h. wenn $f(x)$ niemals das Intervall

$$(f(x-0),\ f(x+0))$$

207) Vgl. I A 5, **15**, insbes. Fussn. 71.

208) Darnach ist der Satz: „Jede punktiert unstetige Funktion ist integrabel“ — bei *Harnack richtig*, bei *Hankel* dagegen *falsch*, wie *St. Smith* (a. a. O. p. 149, § 17) mit Recht hervorgehoben hat (auch *Dini*, § 188; *V. Volterra*, Giorn. di mat. 19 [1881], p. 80). *Hankel*'s Fehlschluss beruht auf der irrigen Supposition, dass jede *nirgends dichte* Menge auch *unausgedehnt* sein müsse (vgl. *Harnack*, Math. Ann. 19, p. 239).

209) Sie umfasst nämlich auch diejenigen Funktionen, bei denen die Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ eine zwar *nirgends dichte*, jedoch *ausgedehnte* Menge bilden, die also bei *Hankel-Dini* noch zu den *punktiert* unstetigen gezählt werden.

210) Vgl. *Dini*, § 66. 186, 6. Hierher gehören gewisse monotone diskontinuierliche Abbildungen des Linearkontinuums, die von *Harnack* (Math. Ann. 23 [1884], p. 286), *G. Peano* (Riv. di Mat. 2 [1892], p. 41) und *A. Schoenflies* (Gött. Nachr. 1896, p. 256) betrachtet worden sind. — Eine nicht-monotone Abbildung ähnlicher Art bei *Lüroth*, Math. Ann. 21 (1883), p. 419.

211) a) Par. C. R. 92 (1881), p. 229. — b) Cours d'anal. 1, p. 54.

212) Math. Ann. 47 (1896), p. 298; vgl. insbes. p. 312.

verlässt), auch *rektifizierbar*[213]). Zu den *punktiert unstetigen, integrablen* Funktionen gehören ferner (nach *Dini*, § 151. 186, 4) alle diejenigen, welche *nur* Unstetigkeiten *erster* Art haben, oder bei denen *pantachische* Unstetigkeiten *zweiter* Art *nur rechts* bezw. *links* auftreten.

Die Unstetigkeiten einer *punktiert* unstetigen Funktion können, auch wenn sie *überall dicht* vorkommen, *hebbar* sein[214]), sofern man diesen Ausdruck auf eine unendliche *abzählbare* Menge von Unstetigkeiten ausdehnen will. *Analytische Ausdrücke* für (integrable und nicht-integrable) *punktiert unstetige* Funktionen lassen sich auf Grund der in 18 beschriebenen Methoden in mannigfacher Weise herstellen[215]). Irrig ist jedoch *Hankel*'s Ausspruch (p. 94), dass *jedes* punktiert unstetige $f(x)$, welches an den Sprungstellen a der Beziehung genügt: $f(a) = \frac{1}{2}\{f(a-0) + f(a+0)\}$, durch eine *Fourier'sche Reihe* darstellbar sei[216]).

Das erste Beispiel einer *total unstetigen* Funktion rührt von *Dirichlet* her[217]): $f(x_1) = e$, $f(x_2) = d$, wo x_1 alle *rationalen*, x_2 alle *irrationalen* Zahlen bedeutet. Trotz der *totalen Diskontinuität* (vollständigen Abwesenheit von Stetigkeitspunkten) sind die Sprünge in dem oben erwähnten Sinne *hebbar*, da die x_1 eine *abzählbare* Menge bilden[218]). Der von *Hankel* (p. 98) für dieses $f(x)$ (bei $e=0$, $d=1$) gegebene analytische Ausdruck leidet an dem Mangel, dass $f(x)$ an allen *rationalen* Stellen *nicht eigentlich* definiert erscheint. Dasselbe gilt bezüglich eines anderen von H. gegebenen Beispiels[219]). Analytisch

213) Vgl. *Scheeffer,* Acta math. 5 (1885), p. 51; *Study,* a. a. O. p. 313; im übrigen: III D 1.

214) Beispiele bei *Hankel*, p. 97; *Dini,* § 116, 8; ferner *Dini-Lüroth,* p. 199.

215) Vgl. *Hankel,* p. 94; *Darboux,* a. a. O. p. 89; *Dini,* § 116, ausserdem *Dini-Lüroth*, p. 198; *Volterra,* a. a. O. p. 82; *Brodén,* a. a. O. p. 310. — (Satz von *Volterra:* Zwei *punktiert* unst. Funkt. müssen in jedem kleinsten Intervall *gemeinsame* Stetigkeitspunkte haben. Daraus ergeben sich für Summen, Produkte, gleichm. konvergente Reihen von *punkt. unst.* Funkt. analoge Sätze, wie für *stetige* Funktionen.)

216) Das braucht nicht einmal dann der Fall zu sein, wenn $f(x)$ *integrabel* ist. Der von *Hankel* fälschlich herangezogene *Riemann*'sche Satz (Werke, p. 239) besagt nur, dass ein als integrabel vorausgesetztes $f(x)$ überall *da* durch die entsprechende *Fourier*'sche Reihe dargestellt wird, wo dieselbe *konvergiert;* diese kann aber (sogar für *stetige* $f(x)$) auch *pantachisch divergieren* (vgl. Fussn. 101).

217) Vgl. Fussn. 31. Die dort gegebene analytische Darstellung dürfte aus dem im Texte angegebenen Grunde der *Hankel*'schen vorzuziehen sein. Vgl. auch: *R. Reiff,* Böklen Mitt. 3 (Tübingen 1890), p. 90; *Pascal,* Esercizi, p. 4.

218) Analoge Definition für den Fall, dass die Mengen (x_1), (x_2) *beide* nicht-abzählbar, bei *J. Thomae,* Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 64.

219) A. a. O. p. 107. Vgl. auch: *Brodén,* Stockh. Öfv. 53 (1896), p. 602.

darstellbare Beispiele *total unstetiger* Funktionen mit *nicht*-hebbaren Unstetigkeiten erhält man, wenn man eine nicht-hebbar *punktiert* unstetige Funktion zu der *Dirichlet*'schen addiert oder mit ihr multipliziert.

20. Stetige Funktionen mit unendlich vielen Singularitäten (in endlichen Intervallen). Die stetigen Funktionen mit unendlich vielen Oscillationen oder „Invariabilitätszügen“[220]) in einem endlichen Intervalle kann man nach *Dini* (§ 134) zweckmässig in *reducible* und *irreducible* einteilen. Die ersteren *verlieren* durch Addition oder Subtraktion von Funktionen mit hinlänglich grosser, *endlicher* Derivierten, insbesondere von passenden *Linearfunktionen* ihre sämtlichen Oscillationen bezw. Invariabilitätszüge, oder, was auf dasselbe hinausläuft, sie lassen sich in zwei *monotone* (auch nirgends konstante) endlich bleibende Komponenten zerlegen[221]). Hierfür ist notwendig und hinreichend, dass die vier Derivierten von $f(x)$ durchweg $> -A$ oder $< A$ (A eine bel. positive Zahl) ausfallen[222]); alsdann wird nämlich: $f(x) + Ax$ bezw. $f(x) - Ax$ *monoton* zu- bezw. abnehmend. Ein $f(x)$ dieser Art *kann*, auch wenn die Oscillationen *pantachisch* auftreten, in *jedem* Punkte *eine bestimmte endliche Derivierte* besitzen; doch hat alsdann $f'(x)$ stets *pantachische Unstetigkeiten 2ter Art*, muss in etwaigen *Stetigkeitspunkten* $= 0$ sein und ist *nirgends integrabel*[223]). Andere bemerkenswerte Fälle liefern diejenigen $f(x)$, bei denen in pantachischen Punkten *eine bestimmte endliche* Derivierte, in anderen ebenfalls pantachischen eine *endliche rechte* und davon *verschiedene linke* Derivierte (geometrischer Typus der „Ecke“)[224]) oder eine *unendliche*

220) „Tratti di invariabilità“ (*Dini*, § 54), d. h. Intervalle, in denen $f(x)$ *konstant* ist.

221) Sie gehören also in die allgemeinere Klasse der Funkt. mit beschränkter Schwankung (**19**).

222) *Dini*, § 133. 134. — Eine sehr viel engere Bedingung (Existenz einer *integrablen* Derivierten) bei *Du Bois-Reymond:* Zur Gesch. d. trig. Reihen, p. 32. Dieselbe kann indessen im Falle *pantachisch* auftretender Oscillationen nach dem im Texte gesagten *niemals* erfüllt sein.

223) *Dini*, § 130, 200. — Da das in Fussn. 116 erwähnte *Hankel*'sche Beispiel eine durchweg *integrable* Derivierte besitzt (vgl. *Darboux*, Ann. Éc. norm. (2), 4 [1875], p. 109), so folgt mit Notwendigkeit, dass es *nirgends pantachische* Oscillationen haben kann. Ein brauchbares Beispiel liefert dagegen die *Koepcke*'sche Funktion (**11**, Fussn. 116); vgl. insbes. Math. Ann. 29 (1887), p. 135. (Über den bei dieser Gelegenheit hervortretenden Unterschied in der Tragweite der Begriffe: *„Bestimmtes* und *unbestimmtes Integral“* s. II A 2, **36**.)

224) *Beispiele:* $\sum r^{-3} \cdot |\sin \nu\pi x|$ (*Dini*, § 116, 1), $\sum c_\nu \cdot |x - a_\nu|$ (*Dini-Lüroth*, p. 198, 1).

Derivierte mit konstantem Vorzeichen („Wendepunkt mit vertikaler Tangente“)[225]) existiert[226]).

Da jedes aus einem reducibel-oscillierenden $f(x)$ hergeleitete *monotone* $\varphi(x) = f(x) + Ax$ in Bezug auf Unstetigkeiten, Unendlichwerden oder Nichtexistenz von Derivierten sich gerade so verhält, wie $f(x)$ selbst, so ergeben sich für ein gegebenes *stetiges* und *monotones* $\varphi(x)$ aus der Betrachtung *aller möglichen* $f(x) = \varphi(x) - Ax$ $(-\infty < A < +\infty)$ bestimmte Kriterien bezüglich der Existenz und Beschaffenheit der Derivierten (*Dini*, § 143, 162).

Zu den durchweg *irreducibel*-oscillierenden Funktionen gehören insbesondere diejenigen, bei denen in pantachischen Punkten entweder die *oberen* und *unteren*[227]) oder die *rechten* und *linken*[228]) Derivierten *mit verschiedenem Vorzeichen* ∞ ausfallen.

Eine merkwürdige Klasse *stetiger* $F(x)$ entsteht durch *Integration* stetiger, pantachisch (reducibel oder irreducibel) oscillierender $f(x)$. Ein solches $F(x)$, das noch überdies *monoton* ausfällt, wenn man $f(x)$ als durchweg gleichbezeichnet annimmt, besitzt überall eine *stetige* Derivierte $F'(x) = f(x)$, *ohne geometrisch anschaulich zu sein*[229]). Denn $f(x)$ nimmt in jedem kleinsten Intervalle mindestens einen Wert *unendlich oft* an[230]), d. h. die Kurve $y = F(x)$ müsste, *ohne aus geradlinigen Stücken zu bestehen*, in unendlich vielen Punkten jedes kleinsten Intervalls *gleichgerichtete Tangenten* besitzen.

---

225) *Beispiel* (einer bereits monotonen Funktion dieser Art) von *Weierstrass* (Math. Ann. 19 [1882], p. 591): $f(x) = \sum c_\nu (x - a_\nu)^{\frac{1}{3}}$. Vgl. auch *Dini-Lüroth*, p. 199, 4. — *Brodén* (Stockh. Öfv. 53 [1896], p. 585) zeigt an einem etwas allgemeineren Typus dieser Gattung, dass ausser für die *abzählbare* Menge der „primären“ Stellen a_ν auch für eine *nicht-abzählbare* Menge „sekundärer“ Stellen: $f'(x) = +\infty$ wird. — Anderes Beispiel bei *Hankel*, a. a. O. p. 84, IV.

226) Doch kann eine *stetige* Funktion nicht in *allen* Punkten eine *bestimmt* oder *unbestimmt* (d. h. auf der *einen* Seite *positiv*, auf der *anderen negativ*) *unendliche* Derivierte haben: *Dini*, § 71, 135; *J. König*, Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 12; *Dini-Lüroth*, p. 303.

227) Z. B. die *Weierstrass*'sche nirgends differenzierbare Funktion (II A 2, Nr. 4; vgl. auch: *König*, a. a. O. p. 11).

228) Geometrisch: Typus der Spitze mit vertikaler Tangente. *Beispiele:* $\sum c_\nu (x - a_\nu)^{\frac{2}{3}}$, $\sum \nu^{-3} \cdot (\sin \nu \pi x)^{\frac{7}{3}}$. (Das zweite von *Hankel*, a. a. O. p. 84, III. Verbesserung der unzulänglichen H.'schen Analyse bei *Darboux*, a. a. O. p. 106. Vgl. auch *Dini*, § 116, 4.)

229) *Koepcke*, a. a. O. p. 137.

230) Beweis dieses (keineswegs selbstverständlichen) Satzes von *König:* a. a. O. p. 7 (vgl. auch *Dini-Lüroth*, p. 302). — *Koepcke*, Hamb. Mitt. 3 (1899), p. 376.

II. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

21. Bereiche von n Veränderlichen. Legt man den n Zeichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ successive verschiedene Zahlenwerte bei, so bildet der Inbegriff der auf diese Weise resultierenden *Wertsysteme* $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ den *Bereich* oder das *Gebiet* (x) der n *Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots x_n$. *Jedes einzelne Wertsystem* $(a_1, a_2, \ldots a_n) = a$ heisst, mit Benützung *geometrischer* (nur für $n = 1, 2, 3$ *reale* Bedeutung besitzender) *Ausdrucksweise:* eine *Stelle* oder ein *Punkt*[231]) (genauer: ein *arithmetischer* Punkt)[232]) einer *n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit*[231]) oder des *n-dimensionalen* (ebenen arithmetischen) *Raumes*[232]) (= Gesamtheit *aller möglichen* für: $-\infty \leqq x_\nu \leqq +\infty$, $\nu = 1, 2, \ldots n$ — zustande kommenden Wertsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_n)$). Entsprechend wird sodann a_ν als die ν^{te} *Koordinate* des Punktes a, die Zahl

$$+\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

als die *Entfernung* $\overline{ab}$ der Punkte a und b bezeichnet; statt dieser *„Entfernung"* erscheint es mitunter bequemer, den *„Unterschied"*[233]) $|a, b| = |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|$ oder auch die einzelnen *Koordinatenunterschiede* $|a_\nu - b_\nu|$ in Betracht zu ziehen. Unter der *Umgebung* (a, ϱ) eines Punktes a wird alsdann die Gesamtheit aller Punkte x verstanden, für welche ax bezw. $|a, x|$ oder auch die einzelnen $|a_\nu - x_\nu|$ unter der positiven Zahl ϱ liegen[234]).

Da jeder Bereich (x) von n Veränderlichen eine Punktmenge im *Cantor*'schen Sinne bildet, so gelten auch hier (wie in 4) die

---

231) *Riemann,* Werke p. 255. 259; *Pincherle* (nach *Weierstrass*), a. a. O. p. 234; *E. Jürgens,* Jahresb. d. D. M. V. 7 (1899), p. 50. — Neuere allgemeine Untersuchungen über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten bei *W. Dyck,* Math. Ann. 32 (1888), p. 457 (mit zahlreichen Litteraturangaben), 37 (1890), p. 273; *H. Poincaré,* J. éc. polyt. (2), 1 (1893), p. 1; *H. Minkowski,* Geometrie der Zahlen (Leipzig 1896). Im übrigen vgl. auch: II B 1, 2. III A 3, 4.

232) *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 574; Acta math. 2 (1883), p. 409, 7 (1885), p. 105.

233) Übersetzung des *C. Jordan*'schen *„écart"* (Cours d'anal 1, p. 18). — *Minkowski* operiert mit dem von ihm eingeführten allgemeineren Begriffe der *„Strahldistanz"* $S(ab)$ (a. a. O. p. 1), welcher $\overline{ab}$, $|a, b|$, Maximum von $|a_\nu - b_\nu|$ als spezielle Fälle enthält.

234) Diese drei Definitionen sind in der Hauptsache *gleichwertig,* d. h. einer bestimmten Umgebung in *einer* der fraglichen Bedeutungen entspricht stets eine solche in den beiden andern. (Im Falle $n = 2$ erscheinen als *Begrenzungen* dieser drei Umgebungsformen: ein *Kreis* um a mit dem Radius ϱ, ein diesem *ein*geschriebenes bezw. *um*schriebenes *Quadrat* mit parallel zu den Koordinatenaxen stehenden *Diagonalen* bezw. *Seiten*.)

grundlegenden Definitionen und Sätze der Mengenlehre. Insbesondere besitzt jeder aus unendlich vielen Punkten bestehende Bereich (x) mindestens einen (nicht notwendig zu (x) gehörigen) *Grenzpunkt* (eine *Häufungsstelle*)[235]; er heisst *abgeschlossen*[236], wenn er *alle Grenzpunkte* mitenthält, *endlich*[237], wenn die $|x_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, *beschränkt* oder *begrenzt*, wenn er *nicht* aus *allen möglichen* Punkten x besteht. Wird im letzteren Falle mit (y) derjenige Bereich bezeichnet, der alle *nicht* zu (x) gehörigen Punkte umfasst, so erscheinen als (immer vorhandene[238]) *Begrenzungspunkte*[239] von (x) (und zugleich auch von (y)) alle diejenigen Punkte x bezw. y, für welche jede beliebig kleine Umgebung mindestens einen Punkt y bezw. x (und somit unendlich viele) enthält. Ist *nicht jeder* Punkt von (x) ein Begrenzungspunkt[240]; so gehören zu (x) auch *innere* Punkte, d. h. solche, für die eine *aus lauter x-Punkten* bestehende *Umgebung* existiert; jeder *innere* Punkt von (y) ist sodann ein *äusserer* Punkt von (x). Der Bereich (x) heisst *zusammenhängend*[241], wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ zwischen zwei beliebige zu (x) gehörige Punkte $x^{(0)}$, X eine endliche Anzahl (m) von x-Punkten: $x^{(\mu)}$ so eingeschaltet werden kann, dass $\overline{x^{(\mu)} x^{(\mu+1)}} < \varepsilon$ bezw. $|x^{(\mu)}, x^{(\mu+1)}| < \varepsilon$ $(0 \leq \mu \leq m,\ x^{(m+1)} = X)$; er heisst *stetig* (ein *Kontinuum* $\mathfrak{C}_n$), wenn er *abgeschlossen*[242] und

235) Satz von *Weierstrass: Pincherle*, a. a. O. p. 241; *Jordan*, a. a. O. p. 23. — Man bemerke, dass die Bezeichnung: „a ist Häufungsstelle von Punkten x" *keineswegs* allemal bedeutet: „*sämtliche* Koordinaten $a_1, \ldots a_n$ sind beziehentlich Häufungszahlen von $x_1, \ldots x_n$"; sondern nur: „*mindestens eine* Koordinate a_ν ist Häufungszahl der x_ν". Ist (x) nicht *endlich* (s. im Text), so kann eventuell „*die Stelle* ∞" als (einzige) Häufungsstelle auftreten (vgl. 4 und *Pincherle*, p. 235).

236) *Jordan* (a. a. O. p. 19) gebraucht in diesem Sinne das Beiwort „*parfait*" (welches also *nicht* mit dem *Cantor*'schen „*perfekt*" = *abgeschlossen* + *in sich dicht* zusammenfällt). *E. Borel* (Leçons sur la théorie des fcts. p. 36) sagt dafür: „*relativement parfait*" („*parfait*" schlechthin oder „*absolument parfait*" = dem *Cantor*'schen „*perfekt*"); *Ch. Riquier* (Ann. Éc. norm. (3), **7** [1890], p. 266): „*complet*"; *Burkhardt* (Funkt.-Th. p. 75): „*in sich geschlossen*".

237) *Jordan* (p. 23): „*Ensemble borné*"; *Riquier* (a. a. O.): „*Espace limité*".

238) Beweis bei *Jordan*, p. 20.

239) Man beachte den Unterschied zwischen „*Grenzpunkt*" und „*Begrenzungspunkt*" („*point limite*" und „*point frontière*"). Ein *Grenzpunkt* x ist nur dann zugleich *Begrenzungspunkt*, wenn er *kein innerer* Punkt von (x) ist; ein *isolierter* Punkt x ist allemal *Begrenzungspunkt*, aber *kein Grenzpunkt*.

240) Besteht z. B. (x) aus allen Punkten mit *rationalen* Koordinaten, so sind *alle möglichen* Punkte *Begrenzungspunkte* von (x); es existieren für dieses (x) weder *innere*, noch *äussere* Punkte.

241) „*D'un seul tenant*" (*Jordan*, p. 25); „*in sich überall dicht*" (*Burkhardt*, p. 75).

242) *G. Cantor*, von dem diese Definition herrührt (vgl. I A 5, **16**), sagt:

zusammenhängend ist; die $x_1, x_2, \ldots x_n$ heissen sodann in $\mathfrak{C}_n$ *stetig veränderlich*. Man bemerke, dass diese Definition keinerlei Aussage über die im $\mathfrak{C}_n$ *wirklich vorhandenen Dimensionen* enthält: sie umfasst alle möglichen Kontinua 1ter bis n^{ter} Dimension und deren (eventuell auch nur *punktweise*) zusammenhängende Kombinationen im n-dimensionalen Raume[243]), erfordert also insbesondere nicht einmal die Existenz *innerer* Punkte. In der (allgemeinen und engeren) Funktionenlehre wird da, wo es sich um Funktionen von n Veränderlichen handelt, unter „*Kontinuum*" schlechthin zumeist ein *engerer* Begriff verstanden[244]), der passend als *homogenes* n-dimensionales Kontinuum H_n im n-dimensionalen Raume bezeichnet werden könnte und durch eine engere Art des *Zusammenhanges* irgend zweier, dem Innern oder der Begrenzung von H_n angehöriger Punkte x_0 und X charakterisiert ist: derselbe muss nämlich durch eine endliche Anzahl *innerer* Punkte $x^{(\nu)}$ in der Weise vermittelt werden, dass $x^{(\nu+1)}$ in einer zu H_n gehörigen Umgebung von $x^{(\nu)}$ liegt[245]).

Einen allgemeinen Satz über die *Begrenzung* eines solchen H_n hat *E. Phragmén*[244]) zunächst für $n = 2$ bewiesen und sodann entsprechend für beliebige n formuliert. Darnach muss die Begrenzung eines

---

„*perfekt* und zusammenhängend" (a. a. O. p. 576): eine *abgeschlossene und zusammenhängende* Menge ist aber *eo ipso perfekt*. — Die von *Bolzano* (Paradoxien, § 38) gegebene, auch noch von *Pincherle* (a. a. O. p. 236) acceptierte Definition passt auch auf *imperfekte zusammenhängende* Mengen, ja sogar auf den Inbegriff beliebig (auch unendlich) vieler getrennt liegender Mengen dieser Art, z. B. auf alle rationalen Zahlen x, die der Bedingung genügen:

$$2\nu < x < 2\nu + 1 \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

243) Z. B. für $n = 2$: jede begrenzte oder geschlossene *Linie;* zwei *auseinander liegende Kreisflächen*, die sich *berühren* oder durch eine oder mehrere *Linien* verbunden sind; beliebig viele begrenzte *Linien*, deren jede von einer der vorhergehenden geschnitten wird, etc.

244) So z. B. bei *Weierstrass* (Werke 2, p. 203): *Kontinuum* (für $n = 2$) = *zusammenhängendes*, (von Punkten, Linien) *begrenztes Flächenstück*. Analog für beliebige n a. a. O. p. 155 und *E. Phragmén*, Acta math. 7 (1885), p. 43. Dabei wird häufig (vgl. z. B.: *G. Mittag-Leffler*, Acta math. 4 [1884], p. 2; *A. Hurwitz*, Zürich. Kongr.-Verh. [1898], p. 94) die *Begrenzung* ausdrücklich *nicht* zu dem betreffenden „*Kontinuum*" gerechnet (welches also nach *Cantor*'s Terminologie — a. a. O. p. 590 — als „*Semikontinuum*" zu bezeichnen wäre). — *Burkhardt*'s Definition eines (zweidimensionalen) „*kontinuierlichen Bereiches*" (a. a. O. p. 75, V, XI) ist *zu weit:* sie passt auch auf *mehrere* Flächenstücke, die nur *punktweise* zusammenhängen oder durch *Linien* verbunden sind.

245) Ausschliesslich in *diesem* Sinne erscheint die Bezeichnung „*zusammenhängend*" bei *Riemann* (s. Werke p. 9, Art. 12). — *Burkhardt* (p. 75, IX) gebraucht „*zusammenhängend*" im Sinne des *Cantor*'schen „*zusammenhängend* + *abgeschlossen*" (also = „*kontinuierlich*").

jeden H_2, für welches *äussere* Punkte existieren, eine abgeschlossene zusammenhängende Menge P_1 ohne innere Punkte enthalten, welche überdies, wenn H_2 *endlich* ist, in ein aus beliebig zu verkleinernden Quadraten gebildetes *ringförmiges Gebiet* eingeschlossen werden kann; *umgekehrt:* enthält eine abgeschlossene Menge ein P_1 dieser Art, so zerlegt sie die Ebene in mehrere getrennte Kontinua, von denen mindestens eins im Endlichen liegt. Den (besonders für die engere Funktionentheorie fundamentalen) zweiten Teil dieses Satzes hat *C. Jordan*[246]) unter der allgemeineren Voraussetzung abgeleitet, dass an die Stelle jenes P_1, durch dessen *geometrische* Qualifikation ein wesentlicher Teil des zu beweisenden Satzes schon in die Voraussetzung verlegt wird, eine *analytisch definirte*, lediglich *stetige* und *einfach geschlossene Kurve* tritt[247]): $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, wo $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *stetige* Funktionen für $t_0 \leqq t \leqq T$ und die Gleichungen $\varphi_1(t') = \varphi_1(t'')$, $\varphi_2(t') = \varphi_2(t'')$ im Intervalle (t_0, T) die einzige gemeinsame Lösung: $t' = t_0$, $t'' = T$ zulassen. Einen elementareren Beweis hat *A. Schoenflies*[248]) für den speziellen Fall gegeben, dass $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ abteilungsweise stetige und monotone Derivierte besitzen.

22. Funktionen von n Veränderlichen. Stetigkeit. Ist zu jeder Stelle $x = (x_1, \ldots x_n)$ eines gewissen Bereiches (x) eine Zahl $z = f(x_1, \ldots x_n)$ eindeutig arithmetisch definiert, so heisst z eine im Bereiche (x) *eindeutige Funktion* der n (*unabhängigen*) *Veränderlichen* $x_1, \ldots x_n$.[249]) Obschon, infolge der ein-eindeutigen Abbildbarkeit[250]) des n-dimensionalen Kontinuums auf das *ein*dimensionale: $0 \leqq y \leqq 1$,

246) Cours d'anal. 1, p. 90. — Der fragliche Satz wurde früher als selbstverständliche Folge der Anschauung betrachtet.

247) Obschon bei dieser *analytischen*, von *A. Hurwitz* (a. a. O. p. 102) unabhängig von der fraglichen Parameterdarstellung mehr *geometrisch* formulierten Definition der *„stetigen Kurve“* auch ein H_2 unter diesen Begriff fallen kann, sofern nur seine Punkte in einer bestimmten *Reihenfolge* genommen werden (wegen der eindeutigen *stetigen* Abbildbarkeit der Punkte einer Strecke auf diejenigen eines Quadrats: *G. Peano*, Math. Ann. 36 [1890], p. 157; *D. Hilbert*, ibid. 38 [1891], p. 459), so ist dieselbe doch in gewissem Sinne weniger allgemein als die z. B. von *Burkhardt* (a. a. O. p. 75, X) acceptierte, auch dem obigen P_1 zu Grunde liegende Begriffsbestimmung durch ein *Cantor*'sches $\mathfrak{C}_2$ *ohne innere Punkte* (vgl. Fussn. 86 und I A 5, **16** Fussn. 90). Übrigens besitzt eine *„einfach geschlossene“* stetige Kurve der gedachten Art, vermöge der im Text gegebenen bezw. der entsprechenden Bedingung bei *Hurwitz*, allemal *eo ipso* dem Charakter der *Ein*dimensionalität.

248) Gött. Nachr. 1896, p. 79.

249) Definition und Klassifikation der $f(x_1, \ldots x_n)$ ganz nach Analogie der $f(x)$ bei *Euler:* Introductio 1, cap. V.

250) Vgl. I A 5, **2**, Fussn. 13.

jedes $f(x_1, \ldots x_n)$ auch als Funktion der *einen* Veränderlichen y aufgefasst werden kann[251]), so erscheint es, wegen der Unstetigkeit jener Abbildung, für die Beurteilung eines $f(x_1, \ldots x_n)$ in der *„Umgebung"* irgend einer Stelle $a \equiv (a_1, \ldots a_n)$ notwendig und auch wirklich durchführbar, gewisse für die $f(x)$ geltende Fundamentalsätze *mutatis mutandis* ausdrücklich für die $f(x_1, \ldots x_n)$ zu beweisen — so zunächst den *Weierstrass*'schen Satz (s. 6) über die *obere und untere Grenze*[252]). Sind sodann die x_ν in einem gewissen Bereiche (x) *stetig* veränderlich, so heisst $f(x_1, \ldots x_n)$ *stetig*[252a]) im Punkte a, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ existiert, derart dass:

$$|f(x_1, \ldots x_n) - f(a_1, \ldots a_n)| < \varepsilon \tag{39}$$

für *alle* zum Bereiche (x) gehörigen[253]) Punkte x der Umgebung (a, ϱ). Es genügt *nicht*, wenn $f(x_1, a_2, \ldots a_n)$, $f(a_1, x_2, \ldots a_n)$ etc. *stetige* Funktionen der *einzelnen* Veränderlichen x_1, x_2, ... für $x_1 = a_1$ $x_2 = a_2, \ldots$ sind[254]). Es genügt sogar *nicht* einmal[255]), mit *Cauchy* (Anal. algébr. p. 37) anzunehmen, $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sei eine *stetige* Funktion von x_1 für $x_1 = a_1$ und für *alle* $x_2, \ldots x_n$ einer gewissen *Um-*

---

251) Vgl. *Stolz*, Arithm. 1, p. 197; *Borel*, a. a. O. p. 123.

252) *Genocchi-Peano*, Art. 100, Satz 5.

252a) *Pincherle*, a. a. O. p. 247. *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 74 [1871] (ges. Abh. 2, p. 178).

253) Vermöge dieses Zusatzes erledigt sich auch der Fall, dass a der *Begrenzung* von (x) angehört.

254) D. h. für $n = 2$: wenn $f(x_1, x_2)$ im Punkte (a_1, a_2) *nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen stetig* ist. *Beispiel:* $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $f(0, 0) = 0$ (*unstetig* im Punkte $(0, 0)$, obschon $f(x_1, 0) = 0$, $f(0, x_2) = 0$, also beide *stetig*). — Es genügt nicht einmal, wenn *die Stetigkeit in allen möglichen Richtungen* vorhanden ist (wohl zuerst von *Thomae* bemerkt: Abr. einer Theorie der kompl. Funkt., 2. Aufl., Halle 1873, p. 15). *Beispiel* (nach *Genocchi-Peano*, Art. 123): $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ (*unstetig* im Punkte $(0, 0)$, obschon $f(x_1, cx_1)$, $f(cx_2, x_2)$, wo $-\infty < c < +\infty$, für $x_1 = 0$ bezw. $x_2 = 0$ *stetig* sind). — Dagegen genügt die *„gleichmässige"* Stetigkeit in allen Richtungen: *Arzelà*, Bologna Rend Aprile 1883, p. 3. Vgl. auch Fussn. 255.

255) Zuerst von *Heine* hervorgehoben: J. f. Math. 71 (1870), p. 361. (Vgl. die vorigen Beispiele.) Es muss noch die Bedingung hinzukommen, dass die *Stetigkeit* in Bezug auf jedes einzelne x_ν eine *gleichmässige* ist für *alle* in Betracht kommenden $x_1, \ldots x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$. Die auf diese Weise resultierende, mit Ungl. (39) gleichwertige Formulierung der Stetigkeitsdefinition bietet den Vorteil, dass sie häufig die Stetigkeit eines arithm. Ausdruckes $f(x_1, \ldots x_n)$ unmittelbar aus derjenigen seiner einzelnen Bestandteile $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, ... erkennen lässt. Vgl. *Harnack*, Diff.-R. p. 91.

gebung von $a_2, \ldots a_n$; desgleichen eine *stetige* Funktion x_2 für $x_2 = a_2$ und *alle* $x_1, x_3, \ldots x_n$ einer gewissen *Umgebung* von $a_1, a_3, \ldots a_n$, u. s. f.

Aus der Stetigkeit von $f(x_1, \ldots x_n)$ *für jede einzelne Stelle* a im Innern und auf der Begrenzung eines Bereiches (x) (*Punktstetigkeit*) folgt dann wiederum die (*gleichmässige*) *Stetigkeit im Bereiche* (x) (*Gebietsstetigkeit*)[256]), die Existenz eines endlichen *Maximums* und *Minimums*[257]), sowie der Satz[258]), dass $f(x_1, \ldots x_n)$ *jeden* Wert zwischen irgend zwei einmal angenommenen: $f(a_1, \ldots a_n) = b$, $f(a_1', \ldots a_n') = b'$ wirklich *annimmt* und zwar *unendlich oft* (nämlich auf jeder zwischen a und a' im Bereiche (x) verlaufenden „stetigen Kurve“: $x_1 = \varphi_1(t), \ldots x_n = \varphi_n(t)$).

23. Simultane und successive Grenzübergänge. Sind $a_1, \ldots a_n$ beziehentlich Häufungszahlen von $x_1, \ldots x_n$, so sagt man, $f(x_1, \ldots x_n)$ habe *beim simultanen* (*unabhängigen*) *Grenzübergange*: $\lim x_1 = a_1, \ldots \lim x_n = a_n$ *den Grenzwert* (*Limes*) c bezw. $+\infty$ $(-\infty)$, in Zeichen:

$$\lim_{x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n} f(x_1, \ldots x_n) = c, \quad \text{bezw. } + \infty \ (-\infty), \tag{40}$$

wenn jedem *beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$, bezw. jedem *beliebig grossen* $A > 0$ eine Umgebung (a, ϱ) zugeordnet werden kann, sodass:

$$|f(x_1, \ldots x_n) - c| < \varepsilon, \quad \text{bezw. } f(x_1, \ldots x_n) > A \ (< -A) \tag{41}$$

für alle zum Bereiche (x) gehörigen Punkte von (a, ϱ)[259]). Der Grenzübergang heisst *stetig*, wenn a im Innern oder auf der Begrenzung eines *stetigen* Bereiches (x) liegt.

Die vorstehenden Beziehungen gestatten sodann wiederum die folgende Verallgemeinerung (vgl. 7, III). Die Funktionswerte $z = f(x_1, \ldots x_n)$ besitzen für alle zu (x) gehörigen Punkte einer beliebigen Umgebung (a, ϱ) (a selbst *ausgeschlossen*) eine (im allgemeinen von ϱ abhängige) endliche oder unendliche grosse *untere* und *obere Grenze* z_ϱ, Z_ϱ. Da,

256) Vgl. 9, Satz I und Fussn. 93. — Beweis für beliebige n bei *Genocchi-Peano*, Art. 100, Satz 7; *Riquier*, a. a. O. p. 272; *Jordan*, Cours d'anal. 1, p. 49.

257) Vgl. 9, Satz II. — Beweis für $n = 2$: *Darboux*, Darb. Bull. 3 (1872), p. 307; für bel. n: *Genocchi-Peano*, Art. 100, Satz 6; *Riquier*, a. a. O. p. 282.

258) *Darboux*, a. a. O. p. 309; Verallgemeinerung bei *Jordan*, Cours p. 51. (Vgl. 9, III. Auch IV und V lassen sich von $f(x)$ auf $f(x_1, \ldots x_n)$ übertragen.)

259) Danach kann die *Stetigkeits*-Definition (39) auch folgendermassen formuliert werden (vgl. 9, Gl. (22)):

$$\lim_{x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n} f(x_1, \ldots x_n) = f(a_1, \ldots a_n), \tag{39a}$$

mit dem Zusatze, dass $f(a_1, \ldots a_n)$ eine bestimmte Zahl sein muss. Die Bemerkung von *Darboux* (a. a. O. p. 309), dass die beiden Definitionen (39) und (39a) *nicht* vollkommen gleichwertig seien, erscheint mir nicht recht verständlich.

bei *Verkleinerung* von ϱ, z_ϱ *niemals ab-*, Z_ϱ *niemals zunimmt*, so *existieren* allemal die Grenzwerte:

$$(42) \qquad \lim_{\varrho=0} z_\varrho = \underline{C}, \quad \lim_{\varrho=0} Z_\varrho = \overline{C} \quad (\underline{C}, \overline{C} \textit{ endlich} \text{ oder } \pm\infty),$$

welche alsdann als der *untere* und *obere Limes* (*die Unbestimmtheitsgrenzen*)[260]) von $f(x_1, \ldots x_n)$ für den fraglichen Grenzübergang zu bezeichnen sind, in Zeichen:

$$(43) \qquad \lim_{x_1=a_1, \ldots x_n=a_n} f(x_1, \ldots x_n) = \underline{C}, \qquad \overline{\lim_{x_1=a_1, \ldots x_n=a_n}} f(x_1, \ldots x_n) = \overline{C}.$$

Der besondere Fall (40) ist alsdann wiederum durch die Beziehung $\underline{C} = \overline{C}$ charakterisiert (vgl. **7**, (11))[261]).

Neben dieser *allgemeinsten* Art eines *simultanen* Grenzüberganges kommen noch *spezielle*[262]) *simultane*, sodann *successive* Grenzübergänge in Betracht. Wählt man als Grenzstelle a die Stelle 0 (was nötigenfalls allemal mit Hülfe einer linearen Substitution zu erreichen ist), so sind für den einfachsten Fall $n = 2$ alle möglichen Grenzübergänge in folgender Weise darstellbar:

$$(A) \qquad \lim_{x_1=0,\, x_2=0} f(x_1, x_2),$$

$$(B) \qquad \lim_{x_1=0} f(x_1, \varphi(x_1)), \quad \lim_{x_2=0} f(\varphi(x_2), x_2), \quad \lim_{t=0} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

(wo $\lim_{x=0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{t=0} \varphi_\nu(t) = 0$);

$$(C) \qquad \lim_{x_2=0} \lim_{x_1=0} f(x_1, x_2), \qquad \lim_{x_1=0} \lim_{x_2=0} f(x_1, x_2).^{263})$$

Über den Zusammenhang dieser drei Grenzwert-Formen lassen sich folgende Aussagen machen:

I. *Existiert* (A) (d. h. im Sinne von Gl. (40), also *endlich* oder *bestimmt unendlich*), so existiert auch *jeder* Grenzwert von der Form (B)

---

260) Die Übertragung dieses Begriffes auf die $f(x_1, \ldots x_n)$ hat sich namentlich für die Theorie der mehrfachen Integrale als wertvoll erwiesen. Vgl. II A 2, **38**, **39**. — Man kann $\underline{C}$ bezw. $\overline{C}$ auch als die *obere* bezw. *untere Grenze* der z_ϱ bezw. Z_ϱ bei veränderlichem ϱ ($\varrho = 0$ excl.) definieren: vgl. **7**, Fussn. 71.

261) Analog lassen sich dann Grenzwerte und Unbest.-Grenzen für Grenzübergänge, wie: $\lim x_\nu = a_\nu + 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots n$) oder $\lim x_\nu = +\infty$ (für einzelne oder alle ν), definieren.

262) d. h. solche, bei denen die x_ν als *von einander* bezw. *von m* ($m < n$) *Hülfsvariablen* (Parametern) *abhängig* erscheinen.

263) Deutlicher geschrieben: $\lim_{x_2=0} (\lim_{x_1=0} f(x_1, x_2))$, $\lim_{x_1=0} (\lim_{x_2=0} f(x_1, x_2))$.

und stimmt mit (A) überein[264]). Das analoge gilt für die Grenzwerte (C) im Sinne der folgenden Gleichung[265]):

$$(44)\qquad \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x_2=0}\ \overline{\lim\limits_{x_1=0}}\ f(x_1, x_2) \\ \lim\limits_{x_1=0}\ \overline{\lim\limits_{x_2=0}}\ f(x_1, x_2) \end{matrix}\right\} = \lim_{x_1=0,\, x_2=0} f(x_1, x_2),$$

d. h. die *inneren Grenzwerte:* $\lim\limits_{x_1=0} f(x_1, x_2)$, $\lim\limits_{x_2=0} f(x_1, x_2)$ brauchen zwar für *keinen* von 0 verschiedenen Wert x_2 bezw. x_1 zu *existieren,* sodass also $\lim\limits_{x_2=0} f(x_1, x_2)$, $\overline{\lim\limits_{x_1=0}} f(x_1, x_2)$ etc. *verschieden* ausfallen können[266]); aber auch in diesem Falle führen die Grenzübergänge $\lim\limits_{x_2=0} \lim\limits_{x_1=0} f(x_1, x_2)$, $\lim\limits_{x_2=0} \overline{\lim\limits_{x_1=0}} f(x_1, x_2)$ etc. zu dem Endwerte:

$$\lim_{x_1=0,\, x_2=0} f(x_1, x_2).^{267})$$

II. Aus der Existenz *eines bestimmten* Grenzwertes (B) für *beliebig viele* verschieden gewählte $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ bezw. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ folgt noch nicht diejenige von (A) (vgl. das zweite Beispiel Fussn. 254). Diese ist offenbar (nach I) definitiv *ausgeschlossen,* wenn für *irgend ein* φ der Grenzwert (B) *nicht* existiert, oder wenn für *verschiedene* φ *verschiedene* Grenzwerte (B) zum Vorschein kommen. Den letzteren, unter der Voraussetzung, dass (x) ein *stetiger* Bereich, als *„Stetigvieldeutigkeit"* von $f(x_1, x_2)$ für den Punkt (0, 0) bezeichneten Fall hat *Du Bois-Reymond* zunächst mit Hülfe einer wesentlich auf *geometrischer* Anschauung beruhenden Methode[268]) ausführlich untersucht und die hierbei sich ergebenden Beziehungen zwischen den Grenzwerten von der Form (B) und (C) später auch *rein analytisch* formuliert und bewiesen[269]).

---

264) Folgt unmittelbar aus der *Definition* von (A): Ungl. (41). *Geometrisch:* Existiert der Grenzwert (A), so kommt er auch allemal zustande, wenn der Punkt (x_1, x_2) *auf einer beliebigen Kurve* der Nullstelle zustrebt.

265) Über die Bedeutung der Schreibweise: $\overline{\lim}$ vgl. I A 3, 15, Fussn. 115.

266) *Beispiel:* Man setze $\psi(x) = \sin\frac{1}{x}$ und speziell $\psi(0) = 0$, sodann: $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)\cdot\psi(x_1)\cdot\psi(x_2)$.

267) Vgl. *Pringsheim,* Münch. Ber. 27 (1897), p. 105; 28 (1898), p. 63. — Der daselbst nur für *Zahlenfolgen* mit der Grenzstelle $+\infty$ bewiesene Satz lässt sich leicht auf den hier vorliegenden Fall übertragen.

268) Abbildung der Schnittkurve zwischen der Fläche $z = f(x_1, x_2)$ und einem „unendlich dünnen" um die z-Axe beschriebenen Kreiscylinder auf einen konzentrischen Cylinder vom Radius 1 oder auf die Ebene $x_1 + x_2 = 1$, und Diskussion dieser Abbildungskurve (*„Limitale"*): J. f. Math. 70 (1869), p. 10.

269) Math. Ann. 11 (1877), p. 145. Vgl. auch J. f. Math. 94 (1883), p. 278.

III. Die *Nicht*existenz eines Grenzwertes (C), sowie die Existenz zweier *verschiedener*[270]) Grenzwerte (C) zieht allemal die *Nicht*existenz von (A) nach sich. Die Existenz zweier *gleicher* Grenzwerte (C) ist aber für diejenige von (A) *keineswegs hinreichend* (vgl. die Beispiele Fussn. 254). Die Möglichkeit, aus der Existenz des *einen* Grenzwertes (C) auf diejenige von (A) und somit auch auf diejenige des *anderen* Grenzwertes (C) zu schliessen, ergiebt sich mit Hülfe der folgenden Verallgemeinerung des in **16** eingeführten Begriffes der *gleichmässigen Konvergenz.*

24. Gleichmässige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion. Ist:

$$\lim_{x_2=0} f(x_1, x_2) = F(x_1) \quad \text{für} \quad 0 \leqq |x_1| \leqq X_1, \tag{45}$$

so sagt man[271]), $f(x_1, x_2)$ konvergiere bei $\lim x_2 = 0$ *gleichmässig* gegen die *Grenzfunktion* $F(x_1)$, wenn $(F(x_1) - f(x_1, x_2))$ bei $\lim x_2 = 0$ *gleichmässig gegen Null* konvergiert[272]), d. h. wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gehört, sodass:

$$|F(x_1) - f(x_1, x_2)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < |x_2| < \delta \tag{46}$$

und für *alle* x_1 des Intervalls $0 \leqq |x_1| \leqq X_1$.[273]) In diesem Falle hat man, falls $\lim_{x_1=0} F(x_1)$ *existiert:*

---

270) *Beispiel:* $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$.

271) *Dini*, § 286 (*Dini-Lüroth*, p. 532). *Stolz*, Math. Ann. 26 (1886), p. 83; Arithm. 1, p. 198.

272) In dem **16** diskutierten Sinne, sofern man an der Stelle der *ganzzahligen* Veränderlichen ν mit der Grenzstelle $+\infty$ die *stetige* Veränderliche x_2 mit der Grenzstelle 0 treten lässt. (Vgl. die Analogie von (38) und (46).) Darnach kann auch die *gleichmässige* Konvergenz einer *Reihe* $\sum_0^\infty \nu \varphi_\nu(x) = f(x)$ als *gleichmässige* Konvergenz von $\sum_0^n \nu \varphi_\nu(x) = f_n(x)$ gegen die *Grenzfunktion* $f(x)$ für $\lim n = \infty$, bezw. vermöge der Substitution $n = \dfrac{1}{\varepsilon}$ und $f_n(x) = f(x, \varepsilon)$, als solche von $\lim_{\varepsilon=+0} f(x, \varepsilon)$ definiert werden, wobei es schliesslich noch freisteht, die zunächst *unstetige* Veränderliche ε durch eine *stetige* zu ersetzen und $f(x, \varepsilon)$ passend zu *interpolieren*, etwa: $f(x, \varepsilon) = f_n(x) + \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - n\right)\{f_{n+1}(x) - f_n(x)\}$, $\left(n = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right)$: *Du Bois-Reymond*, Berl. Ber. 1886, p. 359; J. f. Math. 100 (1887), p. 331. Den Begriffen: *„Stetigkeitspunkt, Unstetigkeitspunkt, Stetigkeitsgrad"* von $f(x, \varepsilon)$ entsprechen alsdann die Bezeichnungen: *„Konvergenz-Stetigkeitspunkt, -Unstetigkeitspunkt, Konvergenzgrad"* der Reihe $\sum \varphi_\nu(x)$.

273) Entsprechende Definitionen für einseitige Grenzübergänge.

$$(47)\qquad \lim_{x_1=0,\,x_2=0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1=0} F(x_1), \quad \text{d. h. } = \lim_{x_1=0} \lim_{x_2=0} f(x_1, x_2),$$

und daher (nach (44)):

$$(48)\qquad \lim_{x_2=0} \overline{\lim_{x_1=0}} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1=0} \lim_{x_2=0} f(x_1, x_2).$$

Zugleich ist die Bedingung (46) in Verbindung mit der *Stetigkeit* von $f(x_1, x_2)$ als Funktion von x_1 (für $0 \leq |x_1| \leq X_1$ und jedes *einzelne* x_2 des Intervalles $0 < |x_2| < \delta$) *hinreichend* (aber *nicht notwendig*[274]) für die *Stetigkeit* von $F(x_1)$ im Intervalle $(-X_1, +X_1)$. Als *notwendige und hinreichende* Bedingung hiefür erscheint dann wiederum die von *Arzelà* definierte *„streckenweise gleichmässige“* Konvergenz[275] von $\lim_{x_2=0} f(x_1, x_2)$ gegen $F(x_1)$, nebst der *Stetigkeit* von $f(x_1, x_2)$ als Funktion von x_1 für jedes einzelne x_2 einer *abzählbaren* Menge mit der Grenzstelle 0.

Der Begriff der gleichmässigen Konvergenz gegen eine Grenzfunktion lässt sich auch auf $f(x_1, \ldots x_n)$ bei beliebigem n übertragen[276]. Für den Fall $n = 3$ hat *Arzelà* die *„schichtenweise gleichmässige“* Konvergenz (*„convergenza uniforme a strati“*) als direkte Verallgemeinerung der „streckenweise gleichmässigen“ eingeführt[277]; dieselbe bildet dann insbesondere die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Stetigkeit* einer Reihe von der Form: $\sum \varphi_\nu(x_1, x_2)$ bezw. $\sum \varphi_\nu(x_1 + x_2 i)$ und kommt u. a. bei der Feststellung des „analytischen“ Charakters von Reihen der letzteren Art in Betracht[278].

---

274) Vgl. **17** (speziell Fussn. 186) und die Beispiele Fussn. 254.

275) Vgl. **17** am Ende und Fussn. 189 (im übrigen: *Arzelà*, l. c. p. 6).

276) *Jordan*, Cours p. 48.

277) Bologna Rend. 1887—88, p. 25.

278) Vgl. II B 1.

II A 2. DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

VON

A. VOSS

IN WÜRZBURG.

Inhaltsübersicht.

A. Litteraturnachweise.

B. Einleitung.

1. Historisches.

C. Differentialrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

2. Vordere und hintere Derivierte.
3. Die Derivierten der elementaren Funktionen.
4. Existenz der Derivierten.
5. Die vier Derivierten der Funktion eines stetigen Arguments.
6. Die höheren Derivierten.
7. Der Mittelwertsatz nach *Cauchy, Darboux* und *Weierstrass*.
8. Die Differentiale.

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

9. Die partiellen Derivierten und das totale Differential.
10. Die höheren partiellen Derivierten.

III. Anwendungen.

11. Die *Taylor*'sche Entwickelung für Funktionen *einer* Variabeln.
12. Ausdehnung auf mehrere Variable.
13. Verallgemeinerungen.
14. Die *Taylor*'sche Reihe.
15. Analytische Funktionen einer reellen Variabeln.
16. Maximum und Minimum einer Funktion.
17. Extreme der Funktionen einer Variablen.
18. Extreme bei mehreren unabhängigen Variablen.
19. Der semidefinite Fall nach *Peano* und *Scheeffer*.
20. Die Arbeiten von *Stolz*.
21. Die Arbeiten von *v. Dantscher*.
22. Bedingte Extreme.
23. Definite homogene Formen.
24. Independente Darstellung höherer Derivierten.

D. Integralrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

a) Das unbestimmte Integral.

25. Die unbestimmte Integration.
26. Die rationalen Funktionen.
27. Transcendente Funktionen.
28. Algebraische Funktionen vom Geschlechte Null.
29. Methode von *Aronhold*.
30. Schlussbemerkung.

b) Das bestimmte Integral.

31. Das bestimmte Integral nach *Cauchy, Riemann* und *Darboux*.
32. Integrable Funktionen.
33. Eigenschaften des bestimmten Integrals.
34. Der erste Mittelwertsatz.
35. Der zweite Mittelwertsatz.
36. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung und die Integrationsoperationen.
37. Uneigentliche Integrale.

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

38. Das n-fache Integral.
39. Ermittelung desselben durch successive Integration.
40. Integrale geometrischer und mechanischer Grössen.
41. Transformation der mehrfachen Integrale.
42. Der Diskontinuitätsfaktor von *Dirichlet*.

III. Anwendungen.

43. Integration totaler Differentiale.
44. Integrabilität der Differentialausdrücke.
45. Der Satz von *Green* in der Ebene.
46. Der Satz von *Stokes*.
47. Der Satz von *Green* und seine Anwendungen.
48. Die Differentiation zu allgemeinem Index; ältere Arbeiten.
49. Die Arbeiten von *Riemann, Grünwald, Most* und anderen.
50. Die mechanische Quadratur.
51. Die elementaren Summationsmethoden.
52. Die *Gauss*'sche Methode, *Jacobi*'s und *Christoffel*'s Arbeiten.
53. Erweiterungen von *Heine, Mehler* und anderen.
54. *Markoff*'s Darstellung.
55. Erweiterung auf mehrfache Integrale.

E. Anhang.

56. Planimeter und Integratoren.
57. Das *Amsler*'sche Planimeter.
58. Die Präzisionsplanimeter.
59. Die Integraphen.
60. Harmonische Analysatoren.
61. Die graphischen Methoden.

Litteratur.

1) Ältere Werke.

G. W. Leibniz, Mathematische Schriften, hrsg. v. *C. J. Gerhardt,* Lond. u. Berl. 1849—1863.

Joh. Bernoulli, Opera omnia, 4 Bde. Lausanne u. Genf 1742.

De l'Hospital, Analyse des infiniment petits, Paris 1696, 1715, 1735.

J. Newton, Opuscula, 3 Bde. Lausanne 1744.

**Brook Taylor,* methodus incrementorum, Lond. 1717.

**J. Stirling,* Methodus differentialis, Rom 1730.

**C. Maclaurin,* Treatise of fluxions, Edinburgh 1742.

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, 2 Bde. 1748; deutsch v. *A. C. Michelson,* Berl. 1788—90; *F. Maser,* Berlin 1885.

— Institutiones calculi differentialis, Petrop. 1755 (Calc. diff.); dtsch. v. *A. C. Michelson,* Berl. 1790—93.

— Institutiones calculi integralis, 3 Bde., Petrop. 1768—1770. 2. Ausg. 1792—1794 in 4 Bdn., deutsch von *Salomon,* Wien 1828—1830 (4 Bde).; zitiert ist unter der Abkürzung (Calc. int.) die Ausg. von 1768 u. Bd. 4 der von 1794.

J. A. Cousin, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, Paris 1796.

J. L. Lagrange, insbesondere Leçons sur le calcul des fonctions, 2. éd. 1806; oeuvr. 10 (calc. des fonct.), Théorie des fonctions analytiques (1797) 2. éd. 1813, oeuvr. 9 (Th. des fonctions).

S. F. Lacroix, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, 2. éd. Paris t. I, 1810; t. II, 1814; t. III, 1819 (*Lacroix,* traité).

2) Neuere Werke.

A. L. Cauchy, Cours d'analyse algébrique, Paris 1821; deutsch von *B. Hutzler,* Königsb. 1828; *Itzigsohn,* Berlin 1885.

— *Résumé des leçons à l'école polytechnique, Paris 1823.

— Leçons sur le calcul différentiel, Paris 1829 (Calc. diff.); dtsch. v. **H. Schnuse,* Braunschw. 1836.

— Exercices de Mathématiques, 1, 1826.

— *Résumés analytiques, Turin 1833.

— Exercices d'analyse et de physique mathématique, 4 Bde. 1839—1847.

S. F. Lacroix, Traité de calcul différentiel et intégral, 5. éd., Paris 1837, 8. éd. mit Noten von *Hermite, Serret,* 1878/79.

F. Minding, Handbuch der Differential- u. Integralrechnung, 1, Berlin 1836.

F. Moigno, Leçons sur le calcul différentiel, Paris, t. I, 1840; t. II, 1, 1844; t. IV, 1, 1861 (Moigno).

A. de Morgan, Differential and integral Calculus, London 1842.

**D. Gregory,* Examples of the progresses of the differential and integral calculus, Cambridge, 2 Bde., 1841—46.

O. Schlömilch, Handbuch der Differential- und Integralrechnung, 3 Lieferungen. Greifswald 1847/48.

A. Cournot, Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, 2 Bde., éd. 2, Paris 1857.

R. Hoppe, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Berlin 1865.

— Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845.

L. Natani, Die höhere Analysis, Berlin 1867.

G. F. Meyer (nach *Dirichlet*), Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen, Leipzig 1871.

J. Bertrand, Traité de calcul différentiel et intégral, 2 Bde., Paris 1864—1870.

Ch. Hermite, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 1. Bd., Paris 1873.

J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral. Paris, 2 Bde., éd. 1, 1868, éd. 2, 1880; deutsch bearb. von *A. Harnack*, 2 Bde., Leipzig 1884/86 (Serret-Harnack), 2. Aufl. 1896 von *G. Bohlmann*.

J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Halle 1875 (Thomae, Einleitung.)

J. Hoüel, Cours de calcul infinitésimal, 4 Bde., Paris 1878—1881.

J. Todhunter, Treatise on the differential Calculus, 8. ed. London 1878.

R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, 2 Bde., Bonn 1877/80.

E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2 Bde., Berlin 1878/81.

J. Worpitzky, Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung, Berlin 1890.

A. Harnack, Die Elemente der Differential- u. Integralrechnung, Leipzig 1882. (Harnack, Elemente.)

M. Pasch, Einleitung in die Differential- u. Integralrechnung, Leipzig 1882.

A. Genocchi u. *G. Peano*, Calcolo differenziale, Torino 1884. (Genocchi-Peano, Calcolo); dtsch. von *G. Bohlmann* u. *A. Schepp*, Lpz. 1898/99.

**U. Dini*, Fondamenti per la teorica delle funzione di variabili reali, Pisa 1878. (Dini, Fondamenti).

H. Laurent, Traité d'analyse, Paris, 1—7, 1885—1891.

K. Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886.

J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886. (Tannery, Introduction.)

Ch. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Paris 1886.

Ch. Sturm, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 8. éd. *Prouhet*, 2. Bde., Paris 1884, 9. éd. A. St. Germain, 1888; deutsch von *Th. Gross*, Berlin 1897.

P. Mansion, Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'université de Gand, Paris 1887.

**G. Teixeira*, Curso de analyse infinitesimal, Porto 1888/1889; 3. Aufl. 1892/94.

É. Picard, Traité d'analyse, 1, Paris 1891. (Picard, traité.)

U. Dini, Grundlagen für die Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse, deutsch von *J. Lüroth* u. *A. Schepp*, Leipzig 1892. (Dini-Lüroth.)

Ch. Hermite, Cours de M. Hermite, rédigé par M. Andoyer, Paris, éd. II, 1883, éd. IV, 1891.

O. Stolz, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung, Leipzig, Bd. 1, 1893, Bd. 2, 1896. Bd. 3 in Vorbereitung 1899. (Stolz, Grundzüge.)

B. Riemann, Gesammelte Werke, hsg. von *H. Weber* und *R. Dedekind*, 2. Aufl. von *H. Weber*, Leipzig 1892.

C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 2. éd. 3 Bde. Paris 1893—1896. (Jordan, Cours.)

O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, 2 Bde., 4. Aufl. Braunschw. 1895.

L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und mehrfachen Integrale, hsgeg. von *E. Netto*, Leipzig 1894. (Kronecker, Vorl.)

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, dtsch. v. *Th. Friesendorf* u. *E. Prümm*, Lpzg. 1896.

E. Pascal, Calcolo infinitesimale, 3 Bde., Milano 1895.

G. Peano, Lezioni di Analisi infinitesimale, 2. Vol. Torino 1893.

Ph. Gilbert, Cours d'Analyse infinitésimale, 4. éd. Paris et Bruxelles 1892.

* *

L. Carnot, Métaphysique du calcul infinitésimal (1799), 6. éd., Paris 1860.
C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855.
H. Weissenborn, Die Prinzipien der höheren Analysis, Halle 1856.
A. Harnack, Über den Gebrauch des Unendlichen in der Mathematik, Festschrift, Dresden 1887.
P. du Bois-Reymond, Allgemeine Funktionentheorie, Tübingen 1882.
M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Leipzig, Bd. 1 2. Aufl. 1894; 2, 1894; 3, 1894—1897.
F. Klein, Über Arithmetisierung der Mathematik, Gött. Nachr. 1895, p. 82.
G. Bohlmann, Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung, Ber. d. M. 6, 1899.

Eingeklammerte Bezeichnungen bedeuten die für häufiger zitierte Schriften gewählten Abkürzungen. Ein * zeigt an, dass die betreffende Schrift nicht von mir selbst eingesehen und benutzt werden konnte. Lehrbücher sind — bis auf einige wenige Ausnahmen — in das vorstehende Verzeichnis nicht mit aufgenommen worden.

B. Einleitung.

1. Historisches. In der Entwickelung der Infinitesimalrechnung lassen sich folgende, allerdings oft gleichzeitig neben einander fortwirkende Epochen unterscheiden*):

I. Die Anfänge der Infinitesimalrechnung im Zusammenhang mit den Problemen der Quadratur, der Tangentenkonstruktion und dem umgekehrten Tangentenproblem, von 1600—1668.

II. Die Fluxionsmethode *J. Newton's*[1]) (1643—1727) und der Algorithmus der Differentialrechnung von *G. W. Leibniz*[2]) (1646—1716).

*) Es ist wohl nicht überflüssig, die Auffassung des Infinitesimalbegriffes bei den im Texte angeführten Mathematikern durch einige Äusserungen derselben zu erläutern.

1) *J. Newton,* Principia (1687), Amsterd. Ausg. 1723, p. 33: Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed *limites*, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos proprius assequi possunt, *quam pro data quavis differentia* . . . Igitur in sequentibus, si quando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas vel evanescentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine decrescentes, sed cogita semper diminuendas sine limite.

2) *G. W. Leibniz,* Manuscr. v. 26. März 1676 (Mathemat. Schriften ed. *C. J. Gerhardt*, 5, p. 217): Videndum, an exacte demonstrari possit . . quod differentia non tantum sit infinite parva, *sed omnino nulla,* quod ostendetur, si constet, eousque semper posse inflecti polygonum, ut differentia assumta etiam infinite parva minor fiat error; und Philosoph. Schriften ed. *Gerhardt,* 6, p. 90 (Essai de Théodicée [1710]): et les infinies ou infiniment petits n'y signifient que les grandeurs qu'on peut prendre ainsi grandes ou ainsi petites que

III. Die systematische (formale) Ausbildung der Infinitesimalrechnung durch *Joh. Bernoulli* (1667—1748), *L. Euler*[3]) (1707—1783) und *J. L. Lagrange*[4]) (1736—1813); der Versuch des letzteren, dieselbe auf rein algebraischer Grundlage zu entwickeln.

IV. Die Begründung der Infinitesimalrechnung durch *A. L. Cauchy* (1789—1857) mittelst der schon von *C. Maclaurin* und *J. d'Alembert*[5]) wieder hervorgehobenen Methode der Grenzen[5]), und die formalen Fortschritte durch *C. G. J. Jacobi*'s (1804—1851) Arbeiten über die Differentialgleichungen.

V. Die rein arithmetische Durchforschung der Infinitesimalbetrachtungen durch *B. Riemann*'s (1826—1866) Begriff des bestimmten Integrals, in Verbindung mit dem allgemeinen Funktions-

---

l'on voudra, pour montrer, qu'une erreur est moindre que celle qu'on a assignée, *c'est à dire, qu'il n'y a aucune erreur* . . . ou bien on entend par l'infiniment petit l'état de évanouissement ou du commencement d'une grandeur. Dagegen auch (1695, Act. erud.) *Gerhardt*, 5, p. 322: Caeterum aequalia esse puto non tantum, quorum differentia est omnino nulla, sed quorum differentia incomparabiliter parva.

3) *L. Euler*, Inst. calc. int. 1755, praefatio: Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum constituit, verum est objectum calculi differentialis (p. XIV), dagegen p. X u. XI: quod *nihilum* jam hic litera ω exhibitur, id in calculo differentiali *quia ut incrementum quantitatis x spectatur*, signo dx repraesentari ejusque differentiale vocari solet.

4) *J. L. Lagrange*, Calcul des fonctions = (oeuvres 10, p. 7): Le calcul des Fonctions sert de plus à lier le calcul différentiel immédiatement à *l'algèbre*, u. p. 8: Au reste je ne disconviens pas, qu'on ne puisse par la considération des limites, envisagées d'une manière particulière démontrer rigoureusement les principes du calcul différentiel . . . mais l'espèce de métaphysique, que l'on est obligé d'y employer est, *sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'Analyse* (vgl. auch p. 269); ferner „sur la métaphysique du calcul intégral", Misc. Taur. 2, 1760 = oeuvres 7, p. 598: Il en est ici comme dans la méthode des infiniment petits, ou le calcul redresse lui-même les fausses hypothèses . . . L'erreur est détruite par une autre erreur . . . La méthode de Newton est au contraire tout à fait rigoureuse. Noch stärker äussert sich *L. Carnot* (1753—1823), Métaphysique de l'analyse infinitésimale 1799 (èd. IV, Paris 1860): l'analyse infinitésimale n'est autre chose qu'un calcul d'erreurs compensées (p. 119, 122, 136).

5) *J. d'Alembert* in der Encyclopédie méthodique (Mathématiques, Paris, éd. von 1784) unter dem Worte différentiel, 1, p. 522; 2, p. 77, 310; vgl. auch *R. Simson*, de limitibus quantitatum et rationum fragmentum, Glasguae 1776.

A. L. Cauchy, Par. C. R. (1843) = oeuvres (1) 8, p. 12: On échappe aux difficultés, quand on considère une fonction dérivée comme la limite entre les accroissements . . . On pourrait nommer différentielle de la variable indépendante l'accroissement de cette variable et différentielle de la fonction donnée le produit de la dérivée par la différentielle . . . Ähnlich auch im Calc. différentiel (1829).

begriff (*K. Weierstrass* [1815—1897]) und der Mengenlehre (*P. du Bois-Reymond* [1831—1889], *G. Cantor, U. Dini* und andere).

Diese rein arithmetische Begründung der Infinitesimaloperationen, welche für die gegenwärtige *kritische* Periode der Mathematik charakteristisch ist, hat zu der Erkenntnis geführt, dass die meisten auf Grund der älteren Arbeiten, deren Hauptzweck die *formale Erweiterung der Methoden* war, gewonnenen Sätze nur *eine durch ganz bestimmte Voraussetzungen beschränkte Gültigkeit* besitzen. Während diese Betrachtungen für die Hauptsätze der Differentialrechnung gegenwärtig zu einem gewissen Abschluss gebracht sind, eröffnet sich noch ein weites Feld insbesondere für die Theorie der uneigentlichen Integrale. Es soll in der folgenden, *die Entwickelung der Infinitesimalrechnung im 19. Jahrhundert* vorwiegend behandelnden Übersicht versucht werden, neben der Darstellung der formalen Operationen auch namentlich die kritischen Gesichtspunkte hervortreten zu lassen.

C. Differentialrechnung.

I. Funktionen einer Variablen.

2. Vordere und hintere Derivierte. Ist $y = f(x)$ eine im endlichen Intervalle a, b definierte, d. h. eindeutige und endliche Funktion, und x und $x + \Delta x$ zwei Punkte desselben, denen y und $y + \Delta y$ als Funktionswerte zugehören, so heisst das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

der *Differenzenquotient* von $f(x)$, gebildet für die Stelle x. Falls nun ein (zunächst auch endlicher) völlig bestimmter Grenzwert

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existiert, unabhängig von der Art, wie das positive oder negative Δx gegen Null konvergiert, so hat $f(x)$ an der Stelle x eine *Derivierte*[6]) oder *Ableitung*[7]), oder *einen vollständigen Differentialquotienten*[8]), der durch $\frac{dy}{dx}$ nach *Leibniz* (Manuscr. v. November 1676, *Gerhardt,*

6) *A. L. Cauchy,* Calc. différ. (1829), p 18: Cette limite, lorsqu'elle existe ... Das Wort derivare ist von *Leibniz* gebildet (*M. Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 182), das Wort differentiare desgl. (Leibniz, ed. *Gerhardt,* 5, p. 266), vgl. auch *L. Euler,* Inst. calc. diff. p. 115.

7) *A. L. Crelle,* Sammlung math. Aufsätze 1, p. 199 (Berl. 1821); Differential- und Integralrechnung heissen daher hier auch Ableitungs- und Zurückleitungsrechnung.

8) *O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 3.

Entdeckung d. h. Analys. p. 140) bezeichnet wird; $f(x)$ heisst daselbst *differentiierbar*[9]). Ergeben sich *zwei* verschiedene Grenzwerte, je nachdem Δx entweder nur alle positiven oder nur alle negativen Werte durchläuft, so hat $f(x)$ bezüglich eine *einseitige, vordere* oder *hintere*[10]) rückwärts oder vorwärts genommene[11]) Derivierte, dérivée à droite où à gauche[12]) derivata a destra o a sinistra[13]); $f(x)$ ist dann vorwärts oder rückwärts differentiierbar[14]). Notwendig ist für die Existenz einer Derivierten zunächst die Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion[15]), doch kann man, wenn der Funktionswert an einer bestimmten Stelle einen (endlichen oder auch unendlichen) *Sprung* macht, die Derivierte daselbst in bestimmter Weise als unendlich ansehen, andererseits auch für $x = \infty$ von einem Grenzwert der Derivierten reden; so namentlich für den Fall, wo $f(x)$ bei Annäherung an $x = a$ stetig über alle Grenzen wächst. — Ist abgesehen von besonderen Punkten des Intervalles eine Derivierte für jeden Punkt derselben vorhanden, so bezeichnet man die hierdurch definierte *derivierte Funktion*[16]) durch

$$f'(x), \quad y',^{17})$$

$$D(y), \quad Df(x), \quad \frac{df(x)}{dx}^{18}),$$

die Funktion heisst dann daselbst differentiierbar[19]).

---

9) *P. du Bois-Reymond,* J. f. Math. 79, p. 32; daselbst auch der Begriff der *gewöhnlichen* Funktion, die in Bezug auf keine Richtung in der betreffenden Stelle ∞ viele Maxima oder Minima besitzt. (Vgl. I A **1**, **11**.)

10) Desgl. Math. Ann. 16, p. 221 (1880).

11) *J. Thomae,* Einleitung p. 8 (1875).

12) *J. Tannery,* Introduction p. 65.

13) *Dini-Lüroth,* p. 87; p. 273 für die linke und rechte Derivierte die Bezeichnung $d(x)$ und $d_1(x)$.

14) Als *mittleren* Differentialquotienten bezeichnet *P. du Bois-Reymond* gelegentlich den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0} \frac{f(x+\varepsilon_1) - f(x-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

Math. Ann. 16, p. 220.

15) Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Derivierten sucht *A. Harnack* zu formulieren (Elemente p. 33 ff.); eine hinreichende Bedingung bei *O. Stolz,* Grundzüge **1**, p. 35; allgemeinere Untersuchungen bei *Dini-Lüroth,* p. 257.

16) *A. L. Lagrange,* J. éc. polyt. 6 (1805) = oeuvr. 7, p. 327.

17) *Lagrange,* Théorie des fonctions = oeuvres 9, p. 33.

18) *Cauchy,* ausführlich z. B. in den Exerc. de math. et de phys. 3, p. 9—17 (1844). Ältere Bezeichnungen des Differentialquotienten bei *Lacroix,* **1**, p. 147; ganz ungebräuchlich geblieben sind die Bezeichnungen von *Crelle* (1821).

19) Gleichmässig in einem Intervalle differentiierbar heisst eine Funktion, wenn nach Annahme eines beliebig kleinen δ immer

3. Die Derivierten der elementaren Funktionen. Die *Differentialrechnung im engeren Sinne* beschäftigt sich mit dem Falle, wo eine Derivierte vorhanden ist. Ihre erste Aufgabe ist die Ermittelung derselben für die einfachsten Funktionen[20]). So ergeben sich die Formeln

$$y = \text{const.}, \quad D(y) = 0,$$
$$y = e^x, \quad D(y) = e,$$
$$y = x^n, \quad D(y) = nx^{n-1}.$$[21])

Die Betrachtung der allgemeinen Potenz, der Exponential- und logarithmischen Funktion erfordert die Untersuchung des Grenzwertes

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für} \quad n = \pm\infty.$$

Wird derselbe durch e bezeichnet[22]), so folgt

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

und zugleich ergiebt sich

$$y = a^x, \quad D(y) = a^x \log_e(a),$$
$$y = \log_a(x), \quad D(y) = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Die Differentialquotienten der goniometrischen Funktionen

$$y = \sin x, \quad Dy = \cos x,$$
$$y = \cos x, \quad D(y) = -\sin x$$

beruhen auf den Grenzwerten[23])

$$\lim \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1, \quad \lim \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = 1, \quad \text{für } x = 0.$$

Die Derivierten der Kreisfunktionen (des Logarithmus) lassen sich

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x} \right| < \delta,$$

wie auch $|x' - x|$ und $|x'' - x|$ kleiner als ein genügend kleines h angenommen werden, *L. Kronecker*; nach *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 296 (1885).

20) *L. Euler*, Calc. diff. praef. p. VIII: Calculus differentialis est methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium.

21) Für negative und gebrochene n, wo der binomische Satz ausreicht, schon bei *Leibniz*, nova methodus . . . 1664 (Act. erud. = math. Schriften 6, p. 223). Die Differentiation der allgemeinen Exponentialfunktion zuerst bei *Joh. Bernoulli*, Acta erud. 1697 = opera 1, p. 183.

22) *Euler*, Introductio 1, p. 90; Inst. calc. diff. p. 160; von *P. S. Laplace* (Théorie des probabilités = oeuvres 7, p. 44) wird noch c geschrieben. Eine Übersicht über die verschiedenen Formen dieser Grenzgleichung bei *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 10—11. Vgl. I A 3, 17; II A 1, Fussn. 147.

23) Nach *M. Cantor*, Gesch. d. Math. 3, p. 396 ist *R. Cotes* die exakte Behandlung dieser Grenzwerte zuzuschreiben.

auch durch den Satz gewinnen, dass die Derivierte der inversen Funktion[24]) der reziproke Wert der Derivierten der ursprünglichen Funktion ist; so findet man:

$$y = \operatorname{arc\,tg}\, x, \quad D(y) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \arcsin x, \quad D(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die *Leibniz*'schen Formeln[25])

$$D(cu) = cD(u),$$

$$D(u+v+w+\cdots) = D(u) + D(v) + D(w) + \cdots$$

$$D(uv) = uD(v) + vD(u),$$

$$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD(u) - uD(v)}{v^2}$$

reichen dann zur Differentiation jeder rationalen Funktion der elementaren Funktionen aus.

4. Existenz der Derivierten. Dass eine stetige Funktion mit eventueller Ausnahme einzelner Stellen überhaupt eine Derivierte besitze, wurde zunächst wohl als selbstverständlich angesehen, jedenfalls nicht weiter untersucht. Erst *A. M. Ampère* warf die Frage auf, warum gerade das Verhältnis von Δy zur *ersten* Potenz des Zuwachses Δx einen bestimmten Grenzwert liefere[26]) und versuchte zu beweisen[27]), dass eine stetige Funktion, abgesehen von einzelnen Stellen, immer differentiierbar sein müsse; doch gelang ihm nur der Nachweis, dass bei einer nicht konstanten Funktion der Differentialquotient nicht beständig $+\infty$ oder $-\infty$ sein könne. Zu der Erkenntnis von *stetigen Funktionen*, welche an *unendlich vielen Stellen eines Intervalls* oder an *allen Stellen* derselben nicht differentiierbar sind, führte zuerst der *Riemann*'sche Integralbegriff[28]), insbesondere die *Riemann*'sche, an allen rationalen Punkten unstetige, aber gleichwohl integrabele Funktion, deren Integral an allen rationalen Stellen des Intervalles eine Derivierte nicht besitzt[29]); ferner das *Hankel*'sche Prinzip der Kondensation der Singularitäten[30]) (II A 1, 18). Die volle Entscheidung

24) Die oft vernachlässigte Begriffsbestimmung der inversen Funktion bei *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 38; allg. Arithm. p. 186.

25) *Leibniz*, nova methodus = math. Schriften 5, p. 220, 222.

26) J. éc. polyt. cah. 13, p. 148 (1806).

27) Ebenda p. 154; vgl. *Dini-Lüroth*, p. 88, 298. Letzter Versuch dieser Art von *Ph. Gilbert*, Brux. mém. 8°, 23 (1872).

28) Hab.-Schrift Gött. 1854, publ. Gött. Abh. 13 (1867) = Werke p. 213.

29) Daselbst p. 228. Vgl. II A 1, 11 u. 18.

30) Progr. Tübingen 1870 = Math. Ann. 20, p. 63; allgem. Encyklopädie von *Ersch* u. *Gruber*, Artikel „Grenze", 90, p. 189 (1871).

gab aber wohl erst das von *K. Weierstrass*[31]) unter Anwendung eines passend ausgewählten Grenzüberganges für das gegen Null konvergierende $\Delta(x)$ einwurfsfrei durchgeführte, später von *Ch. Wiener*[32]) geometrisch erläuterte Beispiel der Funktion

$$y = \sum_0^\infty a^n \cos(b^n \pi x),$$

welche für $(0 < a < 1,\ b$ ungerade und ganz) an keiner Stelle eine Derivierte besitzt, wenn $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ist, dem sich bald viele andere anreihten.

5. Die vier Derivierten der Funktion eines stetigen Arguments. Die durch diese Untersuchungen bezeichnete Prüfung des allgemeinen Funktionsbegriffes hat dazu geführt, den Begriff der Derivierten erheblich zu *erweitern*. Die *unteren und oberen Limites* (II A 1, 7)[33]) des rechtsseitigen Differenzenquotienten der in der Nähe von $h = 0$ eindeutigen (und endlichen) aber nicht mehr notwendig stetigen Funktion y bezeichnet man als *vordere untere* und *vordere obere Derivierte* an der Stelle x;[34]) ähnlich ist der Begriff der *hinteren oberen und unteren Derivierten* zu fassen. Die vier Derivierten werden bei *Dini-Lüroth*[35]) mit Λ_x, λ_x; Λ_x', λ_x' bezeichnet; ausdrucksvoller erscheint die Bezeichnung von *Pasch*, für die sich doch wohl die *Scheeffer*'sche Schreibart der Dini'schen λ empfiehlt, so dass $D^+f(x)$, $D_+f(x)$; $(D^-f(x)$, $D_-f(x))$ die vorderen (hinteren) oberen und unteren Derivierten bezeichnen. Hat dann z. B. bei einer stetigen Funktion $D^+f(x)$ nur solche Unstetigkeiten, dass $\lim D^+f(x+\varepsilon)$ und $\lim D_+f(x-\varepsilon)$ an jeder Stelle für $\varepsilon = 0$ existieren, so gehen den nun geltenden Gleichungen

$$D^+f(x) = D_+f(x), \quad D^-f(x) = D_-f(x)$$

zufolge die vier Derivierten in die vordere und hintere über. Ist endlich *eine* derselben durchweg stetig, so fallen die drei anderen mit ihr zusammen und bilden die Derivierte im Sinne von **3.**[36])

31) In Vorlesungen seit 1861 (vgl. *H. A. Schwarz*, Ges. Abh. 2, p. 269); zuerst veröffentlicht von *P. du Bois-Reymond*, J. f. M. 79, p. 29 (1875); weitere Litteratur bei *Dini-Lüroth*, p. 204; *E. Pascal*, Esercizi p. 124—128.

32) J. f. Math. 90, p. 221 (1881) nebst der Entgegnung von *Weierstrass*, Funktionenlehre p. 100 (ges. W. 2, p. 228).

33) *Unbestimmtheitsgrenzen* bei *P. du Bois-Reymond*, Progr. Freiburg 1870; Münch. Abh. 12, p. 125 (1876); vgl. im übrigen I A 3, **15** u. II A 1, **7**.

34) Nach *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 52 (1884); im wesentlichen schon bei *U. Dini*, Fondamenti § 145 (1878). Vgl. *Dini-Lüroth*, Kap. 11 u. 12.

35) *Dini-Lüroth*, p. 261; *Scheeffer*, Acta math. 5, p. 281.

36) *Dini*, Fondamenti p. 196; *Dini-Lüroth*, p. 267, 270—273.

Will man — bei stetiger erster Derivierten — zu höheren übergehen, so bleiben diese Begriffe nicht mehr anwendbar; unentbehrlich sind sie namentlich in der Integralrechnung.

6. Die höheren Derivierten. Hat die Derivierte wieder eine Derivierte, so heisst diese die zweite Derivierte und wird durch

$$D^2 f(x),\ f''(x),\ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

bezeichnet; man gelangt so zu dem Begriffe der n^{ten} Derivierten vermöge der formellen Beziehung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Die zweite Derivierte kann man auch durch den zweifachen Grenzprozess

$$\lim_{k=0} \lim_{h=0} \left\{\frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)}{hk}\right\}$$

definieren. An Stelle dieses nicht bequem brauchbaren Ausdrucks kann nicht allgemein der speziellere

$$\lim_{h=0} \left(\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}\right) h = 0$$

gesetzt werden. Denn dieser Ausdruck hat zur Grenze nur dann $f''(x)$, wenn $f''(x)$ *existiert*, und kann, wenn dies nicht zutrifft, selbst sehr wohl noch einen bestimmten Wert haben[37]). Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf die Definition der höheren Differentialquotienten:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \lim_{h=0} \left[f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \binom{n}{2} f(x+(n-2)h) + \cdots + (-1)^n f(x)\right] \cdot h^n,$$

die man durch vollständige Induktion ableitet.

7. Der Mittelwertsatz nach Cauchy, Darboux und Weierstrass. *Der Fundamentalsatz oder Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Rolle*scher Satz, Théorème des accroissements finis. Schon aus geometrischen Betrachtungen (Parallelismus der Tangente in einem Punkte des Kurvenbogens mit seiner Sehne) ergiebt sich der Satz:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'[a + \theta(b-a)]$$
$$0 < \theta < 1.$$

37) Vgl. *A. Harnack*, Math. Ann. 23, p. 260; desgl. *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 93, sowie *E. Pascal*, Esercizî p. 174.

Der Beweis setzt voraus, dass die für $a \leqq x \leqq b$ endliche und stetige Funktion $f(x)$ im Intervalle $a < x < b$ überall eine Derivierte besitzt, die auch an einzelnen Stellen bestimmt unendlich werden darf. Er wird nach *O. Bonnet*[38]) auf den speziellen Fall $f(b) - f(a) = 0$ zurückgeführt und ergiebt sich hier aus dem *Weierstrass*'schen Satze (II A 1, 9, II), dass bei einer stetigen Funktion wenigstens eine bestimmte Stelle des Gebietes vorhanden ist, für die sie ihre obere oder untere Grenze wirklich annimmt.

So tritt der Satz an die Spitze der Differentialrechnung, während er bei *Lagrange* noch als spezieller Fall der *Taylor*'schen Entwickelung erscheint[39]).

Hieraus ergiebt sich nun: Eine in dem ganzen Intervalle endliche und stetige Funktion, die für $a < x < b$ eine Derivierte hat, muss, wenn sie nicht konstant ist, in jedem Teile desselben Stellen mit endlichen, von Null verschiedenen Derivierten enthalten. Und so folgen die auch für die Integralrechnung fundamentalen, von *Dini* und *Scheeffer* aufgestellten Sätze: Wenn die Derivierte entweder beständig oder mit Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge (III A 5, 2), wo über die Beschaffenheit derselben nichts feststeht, Null ist, so ist die Funktion im ganzen Intervalle konstant. Weiss man daher von zwei solchen stetigen und endlichen Funktionen, $f(x)$ und $F(x)$, dass ihre als endlich und bestimmt vorausgesetzten Derivierten im Intervalle bis auf eine abzählbare Menge übereinstimmen, so ist ihre Differenz

$$f(x) - F(x) = \text{const.}$$

Unter Benutzung des allgemeinen Begriffes der Derivierten kann man aber diesen Satz auf den Fall ausdehnen, wo an Stelle der Gleichheit der Derivierten schlechthin, die Gleichheit eines der vier Paare entsprechend bezeichneter Derivierten der Nr. 5 vorausgesetzt wird[40]).

Dagegen ist $f(b) > f(a)$, wenn unter den zuvor angegebenen Voraussetzungen die Derivierte im allgemeinen positiv, d. h. nicht immer Null ist.

38) *J. A. Serret*, Calcul diff. 1, p. 17 (1868); vgl. die Bemerkungen von *G. Peano* (Calcolo p. XIV) und die Litteratur daselbst. Nach 5 besteht der Satz auch dann, wenn $f(x)$ samt seiner vorderen Derivierten stetig ist; so schon bei *J. Thomae*, Einleitung p. 10 (1875), dann bei *A. Harnack*, Elemente p. 181. Man vergleiche übrigens den *Bonnet*'schen Beweis mit den älteren Darstellungen; bei *O. Schlömilch*, Handbuch der Diff. (1847) beruht derselbe auf einem eigentlich der Integralrechnung angehörigen Grenzübergange, auch wird θ der zu umfassenden Bedingung $0 \leqq \theta \leqq 1$ unterworfen (daselbst p. 126).

39) Théorie des fonct. p. 67.

40) *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 282. Der zur Begründung erforderliche Fundamentalsatz Scheeffer's daselbst p. 184 (1884).

Bei *Ampère*, dem es darauf ankam, den Rest der Taylor'schen Entwickelung in zwei bestimmte Grenzen einzuschliessen, findet sich dieser Satz in der Form, dass $[f(b) - f(a)] : (b - a)$ stets zwischen dem grössten und kleinsten Werte von $f'(x)$ (im Intervall a, b) liege[41]). Bei *Cauchy*[42]) tritt zuerst der *erweiterte Mittelwertsatz* für zwei mit ihren Derivierten stetige Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ auf in der Form:

$$B < \frac{F(b) - F(a)}{f(b) - f(a)} < A,$$

falls A und B die extremen Werte von $F'(x) : f'(x)$ im Intervalle sind; dann in der Form[43])

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{F'(x+\theta h)}{f'(x+\theta h)},$$

wobei jedoch vorauszusetzen ist, dass die Derivierte von $f(x)$ innerhalb des Intervalles x, $x + h$ weder unendlich noch Null wird. Die Beweise dieser und ähnlicher Sätze[44]) führt man am bequemsten mit Hülfe der Relation[45])

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} = 0,$$

die in einer allgemeineren Form den *Bonnet*'schen Satz ausdrückt.

Die unmittelbare Ausdehnung des Mittelwertsatzes auf die *komplexe* Funktion $f(t)$ einer reellen Variablen t giebt nur eine weniger brauchbare Formel[46]). Man kann aber unter der Voraussetzung eines für $a \leqq t \leqq b$ stetigen $f(t)$ zeigen, dass der Punkt

$$l = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

nicht ausserhalb irgend einer geschlossenen konvexen Linie liegen

41) *A. M. Ampère*, J. éc. polyt. 1806, p. 153. Der Ampère'sche Satz ist von *H. A. Schwarz* für ein System von n Funktionen verallgemeinert, Ann. di mat. (2) 10, 1880 = Ges. Abh. 2, p. 296. Eine andere Erweiterung bei *Dini-Lüroth*, p. 101.

42) Calc. différ. p. 33—34.

43) Ebenda p. 37 (desgl. *Moigno*, leçons sur le calcul différ. 1, X p. 33 [1840]), auch mit der Bemerkung, dass an den Endpunkten x, $x + h$ die Stetigkeit von $F'(x)$ nicht erforderlich sei.

44) Vgl. z. B. *B. J. Arez*, Teixeira Jorn. 11, p. 187 (1892).

45) *G. Peano*, Calcolo p. XIV. Der erweiterte Mittelwertsatz besteht demnach unter der Voraussetzung, dass die für a bis b stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ zwischen a und b Derivierte besitzen und $f'(x)$ daselbst nirgends ∞ oder 0 wird.

46) Vgl. z. B. *P. Mansion*, Cours d'Analyse p. 97.

kann, welche die Kurve x, y, wo $x+yi=f(t)$, umschliesst[47]). Und für γ als obere Grenze von $|f'(t)|$ wird also $|l|<\gamma$; erreicht nun $|f'(t)|$ für $t=T$ den Wert γ, so folgt

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot\lambda\cdot f'(T),$$

wo $|\lambda|\leqq 1$. Hieraus ergiebt sich für die Funktion einer *komplexen* Variabeln z, die in allen Punkten der Kurve z_0z_1 von der Länge L mit ihrer Derivierten endlich und stetig ist,

$$|f(z_1)-f(z_0)|\leqq gL,$$

wo g die obere Grenze von $|f'z|$; also insbesondere auch

$$f(z_1)-f(z_0)=\lambda(z_1-z_0)f'[z_0+\theta(z_1-z_0)]$$
$$0\leqq\theta\leqq 1,$$

wie *G. Darboux*[48]) schon früher durch eine geometrisch-phoronomische Betrachtung gefunden hatte.

Die Ausdehnung des Mittelwertsatzes auf *höhere* Differenzenquotienten (wohl zuerst durch *Riemann* eingeführt)[49]) wurde von *H. A. Schwarz*[50]) in dem Satze ausgesprochen: Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\right]$$

der für $a\leqq x\leqq b$ stetigen Funktion $f(x)$ für jedes $a<x<b$ Null ist, so ist $f(x)$ eine lineare Funktion. Die Fortsetzung dieser Untersuchungen für höhere Differenzenquotienten ist von *A. Harnack* gegeben[51]).

Die Ausdehnung des Mittelwertsatzes[52]) auf Funktionen von mehr Variabeln möge vorgreifend gleich hier bemerkt werden. Aus der *Identität*

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2)-f(x_1, x_2)=f(x_1+h_1, x_2+h_2)-f(x_1+h_1, x_2)$$
$$+f(x_1+h_1, x_2)-f(x_1, x_2)$$
$$=f(x_1+h_1, x_2+h_2)-f(x_1, x_2+h_2)+f(x_1, x_2+h_2)-f(x_1x_2)$$

folgt

47) *O. Stolz*, Grundzüge 2, p. 69, wo der Satz *Weierstrass* zugeschrieben wird.

48) J. de math. (3) 3, p. 291 (1876); dort eigentlich in der Form des erweiterten Satzes von *Cauchy*.

49) *B. Riemann* (1854), Werke p. 232.

50) J. f. Math. 72, p. 141 (1870) = Ges. Abh. 2, p. 341; Erweiterung bei *Dini-Lüroth*, p. 122.

51) *A. Harnack*, Math. Ann. 23, p. 244—284 (1883/84); vgl. auch die Ausdehnung des *Ampère*'schen Theorems für den zweiten Differenzenquotienten bei *O. Hölder* (Math. Ann. 24, p. 183 [1883/84]).

52) Eine andere Erweiterung nach *Darboux* bei *J. Tannery*, Introduction p. 394.

$$f(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = h_2 D_{x_2} f(x_1 + h_1,\ x_2 + \theta_2 h_2) + h_1 D_{x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1,\ x_2)$$
$$= h_1 D_{x_1} f(x_1 + \eta_1 h_1,\ x_2 + h_2) + h_2 D_{x_2} f(x_1,\ x_2 + \eta_2 h_2),$$

also unter Voraussetzung der Existenz der Derivierten nach $x_1 \ldots x_n$ für jeden Punkt des Gebietes $x_1 \ldots x_n$ die Darstellung des Zuwachses als eine Summe von mit den Zunahmen der unabhängigen Variabeln multiplizierten Derivierten; in der *unsymmetrischen Form* dieser vielgestaltigen Identitäten liegt der Grund des unsymmetrischen Charakters der Bedingungen, welche weiterhin (**10**) für das *totale Differential* sich ergeben.

8. Die Differentiale. Die *Differentiale*, deren sich *Leibniz* bediente, um die Differentialrechnung möglichst einfach zu begründen, erscheinen gegenwärtig in der eigentlichen Theorie als *überflüssig*[53]), wenn auch bei der hergebrachten Bezeichnung in der Integralrechnung und der Lehre von den Differentialgleichungen schwer zu entbehren und in den Anwendungen auf Geometrie und Mechanik in gleich einfacher Weise kaum durch eine andere Darstellung zu ersetzen. Nach *Cauchy*[54]) heisst in der Gleichung

$$\Delta(f(x)) = \Delta x f'(x) + R\Delta x,$$

falls R mit Δx gegen Null konvergiert, $f'(x)\Delta x$ das Differential von $f(x)$ und wird mit $df(x)$ bezeichnet; hiernach ist dann auch für Δx selbst dx zu schreiben, so dass

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

wird[55]), während der *Zuwachs* $\Delta f(x)$ durch die frühere Gleichung ausgedrückt bleibt. Ähnlich sind auch die Definitionen der höheren Differentiale $d^2(x)$ etc. aufzufassen.

Für die *Anwendungen* auf Geometrie und Mechanik bleibt es dagegen bequemer, dx, dy etc. als Bezeichnungen für die gegen Null konvergierenden Grössen Δx, Δy, ... anzusehen, dergestalt, dass die Gleichungen zwischen den Differentialen erst dann einen vollkommen richtigen Sinn erhalten, wenn man den entsprechenden Grenzübergang nach Division mit einem als Einheit gewählten Differential als

53) So schon *d'Alembert* in der Encyclopédie math. 1, p. 523; *A. Harnack*, Festschrift, Dresden 1887, p. 1; ähnlich auch *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 18. Ganz neuerdings *H. Poincaré*, rev. enseign. math. 1 (1899), p. 196.

54) *A. L. Cauchy*, Exerc. d'analyse et de phys. 3, p. 7—16 (1844) = oeuvr. (1) 8, p. 12ff.; vgl. auch *Ch. Hermite*, Cours d'analyse, p. 65 (1873) u. *C. Jordan*, Cours 1, p. 62; *Du Bois-Reymond*, Allg. Funktionenth. p. 82, 128.

55) Daher wurde früher $f'(x)$ auch wohl Differentialkoeffizient genannt (*S. F. Lacroix*, traité 1, p. 147 [1810]; *Cauchy*, Calc. diff. p. 18).

ausgeführt ansieht, womit zugleich ihre Verhältnisse in die *Symbole* $\frac{dy}{dx}$[56]) etc. wieder übergehen[57]).

Hierbei wird es nötig, die „Ordnung des Unendlichkleinwerdens" der Differentiale genau zu beachten, was schon *Leibniz*[58]) als einen wesentlichen Teil seines Algorithmus ansah; die strenge Festsetzung dieser Begriffe brach sich allgemein wohl erst mit *Cauchy* Bahn[59]); gute Vorarbeiten findet man schon bei *S. L'Huilier*[59a]).

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

9. Die partiellen Derivierten und das totale Differential. Bei einer Funktion der Variabeln $x, y, z, \ldots$

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

kann man die *partiellen Differentialquotienten* und die *partiellen Differentiale* ohne weiteres definieren[60]). Die ersteren bezeichnete *Euler* durch[61])

---

56) Als *Symbol* bezeichnet schon *S. L'Huilier* (Princ. calc. diff. expositio p. 36 (Fussnote 59a)) den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$; später *B. Bolzano* (1847) (die Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851, p. 67). Über die verschiedene Auffassung der „unendlich kleinen Grössen" vgl. die Zusammenstellung bei *P. Mansion*, Résumé du cours d'analyse, p. 212—224. Eine formale Theorie der unendlich kleinen Grössen, bei der die 4 Spezies für dieselben erklärt werden, stellte *O. Stolz* auf, Innsbr. Ber. 14, p. 21 (1884), Arithmetik 1, p. 205 (1885).

57) *P. du Bois-Reymond* missbilligt diese Vorstellung, Funktionenth. p. 141.

58) *Leibniz*, historia et origo calculi differentialis, ed. *Gerhardt* 9, 5, p. 394.

59) *Cauchy*, Analyse algébr. p. 27—34 (1821); Exerc. de math. 10, p. 145 (1826). Unter diesen Voraussetzungen ist noch immer *Leibniz*' Äusserung zutreffend: Quoniam tamen methodus directa *brevior et utilior ad inveniendum*, sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, ed. *Gerhardt*, 5, p. 322.

59a) *S. L'Huilier*, Principiorum calc. diff. et int. expositio, Tubingae 1795, praefatio p. II; Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (Berlin, Decker, 1786), insbes. p. 31 u. ff.

60) Hierbei ist zu beachten, dass unter $\frac{\partial f(xy)}{\partial x}$ für $y = b$ nicht zu verstehen ist

$$\lim_{y=b,\, h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

sondern

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h, b) - f(x, b)}{h}.$$

61) *Euler*, Calc. diff. p. 195. *Lacroix* schlug vor, einfacher $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \ldots$ zu schreiben (traité 1, p. 243, 1810), ein Gebrauch, der sich in Frankreich lange erhalten hat (so noch *Ch. Hermite*, Cours d'analyse 1873); gegenwärtig auch dort bei *A. Picard, C. Jordan, G. Darboux* u. a. die *Jacobi*'sche Schreibart.

$$\left(\frac{du}{dx}\right),\ \left(\frac{du}{dy}\right),\ \cdots\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),\ \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right),\ \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right);\ \cdots$$

Lagrange bei *zwei* Variabeln durch[62])

$$u',\ u_1';\quad u'',\ u_1',\ u_{11};$$

Jacobi[63]) durch

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \cdots\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \cdots;$$

die *Cauchy*'sche Bezeichnung[64]), bei der $d_x u$ als partielles Differential nach x, also $d_x u = D_x(u)\,dx$ und ähnlich $d_x d_y(u)$ geschrieben wird ist gegenwärtig wohl aufgegeben.

Wird nun das *totale* Differential als *Summe der Differentiale definiert*, so wird die Frage nach dem Zusammenhang des Zuwachses von u mit den partiellen Differentialen durch den *Satz vom totalen Differential* beantwortet. Aus dem Mittelwertsatze Nr. 7 folgt nämlich, falls sämtliche erste partielle Derivierte *stetige* Funktionen in $x, y, \ldots$ sind:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \cdots$$
$$+ R_1\Delta x + R_2\Delta y + R_3\Delta z + \cdots,$$

wo jedes R_i mit $\Delta x, \Delta y \ldots$ gegen Null konvergiert, so dass das totale Differential bis auf Glieder höherer als erster Ordnung die Änderung von u darstellt. Eine genauere Prüfung der beim Beweise erforderlichen Voraussetzungen insbesondere für *zwei* Variabele zeigt, dass der Satz schon dann gilt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ an der Stelle x, y existieren und *eine* dieser Funktionen in der Umgebung derselben in beiden Variabeln stetig ist[65]). Analoge Sätze lassen sich auch für mehr Variable und höhere Differentiale aufstellen, scheinen aber bisher nur selten besonders formuliert zu sein[66]).

Endlich folgt die *Hauptregel des Differentiierens*[67]):

$$du = \sum_i \sum_k \frac{\partial u}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\,dx_k,$$

---

62) *Lagrange*, oeuvres 9, p. 144.

63) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 22 = Werke 3, p. 395, 396; auch 4, p. 145 = J. f. Math. 23. Nach *P. Stäckel* ist der *Jacobi*'sche Vorschlag schon 1786 von *A. M. Legendre* gemacht (*Ostwald*, Klassikerbibliothek Nr. 78, p. 65 (1896).

64) *Cauchy*, Exercices d'analyse 3, p. 16 (1844).

65) *J. Thomae*, Einleitung p. 37; vgl. auch *O. Hölder*, Diss., Stuttgart 1882, p. 69.

66) Sie finden sich bei *R. Bettazzi*, Giorn. di mat. 22, p. 133 (1884).

67) *P. du Bois-Reymond*, Funktionentheorie p. 136; *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 136.

falls u eine Funktion der Variabeln $y_1 \dots y_m$, deren jede von $x_1 \dots x_n$ abhängt, unter der jedenfalls hinreichenden Voraussetzung der Stetigkeit sämtlicher (ersten) Differentialquotienten, durch welche der Algorithmus der formalen Differentialrechnung zum Abschluss gelangt. Die Differentiation der *impliciten Funktionen* pflegte man früher auf dieselbe zu begründen, doch zeigt diese Darstellung nur[68]), wie unter Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der Derivierten dieselbe gefunden werden kann, während die eigentliche Frage darin besteht, zu präzisieren, wann durch eine Gleichung von der Form

$$f(x_1 x_2 \dots x_n, y) = 0$$

y als stetige Funktion der x_i so definiert wird, dass $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ existiert. Bei der gegenwärtigen Ausbildung der funktionentheoretischen Grundlagen hat dies keine Schwierigkeit[69]). So folgt der *Fundamentalsatz:* Ist $f(x, y)$ nebst seinen beiden ersten Derivierten nach x, y in der Nähe der Stelle x_0, y_0, für die $f(x_0, y_0) = 0$, stetig, und $\frac{\partial f}{\partial y}$ daselbst nicht Null, so *existiert* in der Nähe von x_0, y_0 eine einzige stetige Funktion $y = \varphi(x)$, welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ identisch befriedigt, für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und eine Derivierte nach x besitzt. Letztere kann *nunmehr* nach der Hauptregel durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

gefunden werden.

Alsdann erhält man durch den Schluss von n auf $n + 1$[69a]) das allgemeine *Theorem über die Existenz der durch die Gleichungen*

$$f_1(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0 \dots f_m(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0$$

definierten Funktionen $y_1 \dots y_m$:

In der Nähe der Stelle x_i^0, y_k^0, $i = 1, \dots n$, $k = 1, \dots m$, für die jene Gleichungen erfüllt sind, existiert ein einziges System von in $x_1, \dots x_n$ stetigen Funktionen $y_1, \dots y_m$, welche jene Gleichungen befriedigen und erste Derivierte nach $x_1, \dots x_n$ besitzen, falls die ersten Derivierten der f nach den x und y in der Nähe dieser Stelle stetig sind, und die *Funktionaldeterminante* (41) der f nach den y daselbst nicht Null ist; man erhält diese Derivierten aus den Gleichungen

---

68) Ausdrücklich hervorgehoben z. B. bei *O. Stolz,* Grundz. p. 168.

69) Vgl. *Genocchi-Peano,* Calcolo p. 149—151; *U. Dini,* *Analisi 1, p. 163 (1878), sowie *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 162.

69a) So ausführlich bei *Genocchi-Peano,* p. 153 ff.; mit Hülfe der Integralrechnung bei *R. Lipschitz,* Analysis 2, p. 598.

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_1^s \frac{\partial f_k}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_i} = 0$$

$$k = 1, \ldots m; \quad i = 1, \ldots n.$$

Für die sog. *Ausdrücke von unbestimmter Form* $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ etc. vgl. man II A 1, **13**.[70])

10. Die höheren partiellen Derivierten. Bei den rationalen Funktionen überzeugt man sich leicht davon, dass der Wert der höheren partiellen Derivierten unabhängig ist von der Reihenfolge der Differentiation. Die Untersuchung der allgemeinen Gültigkeit dieses Satzes kommt auf die des *Fundamentalsatzes der zweiten partiellen Derivierten*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

zurück. Noch *Cauchy* begründete denselben durch die *Euler*'sche Überlegung[71]), dass $\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}$ der formalen Darstellung nach eine in Δx und Δy symmetrische Funktion ist, ohne den hierbei erforderlichen doppelten Grenzübergang besonders zu untersuchen[72]). Es lassen sich aber leicht Beispiele angeben, in denen der Satz nicht zutrifft[73]). *H. A. Schwarz* stellte zunächst fest, dass derselbe einwurfsfrei begründet werden kann, wenn die vier zweiten Derivierten nach x und y stetige Funktionen von x, y sind, und zeigte sodann, dass schon die Stetigkeit *einer* zweiten Derivierten nach x und y in diesen beiden Variabeln hinreichend ist, wenn zugleich die beiden ersten Derivierten auch in x nnd y stetig sind[74]).

Nach *Thomae* genügt es jedoch schon, wenn $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ stetige Funktionen von x und y sind[75]); noch umfassendere Bedingungen hat *Dini*[76]) angegeben.

70) *J. Tannery,* Introduction p. 250—267, sowie die Beispiele bei *E. Pascal,* Esercizi p. 233—248.

71) Calc. diff. p. 192; ähnlich auch bei *O. Schlömilch,* Handbuch 1, p. 126.

72) Calcul différ. p. 220; Exercices d'analyse 3, p. 33 (1844).

73) Vgl. z. B. *H. A. Schwarz,* Schweiz. Verhandl. 1873, p. 259 = Ges. Abh. 2, p. 280; *Genocchi-Peano,* Calcolo p. 174; über die ältere Litteratur des Satzes siehe *H. A. Schwarz,* a. a. O. p. 275.

74) *Schwarz,* a. a. O. p. 284; der von *H. Blanchet,* J. de math. 6, p. 65 (1841) für den Satz gegebene Beweis kann wohl nicht als völlig streng angesehen werden.

75) *J. Thomae,* Einleitung p. 22 (1875). Vgl. *G. Peano,* *Mathesis 10, p. 153 (1890).

76) *U. Dini,* *Analisi infinitesimale 1, p. 122 (1878). Man vgl. die zusammenfassende Darstellnng bei *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 146 ff., wo auch die formale Erweiterung auf höhere Derivierte, p. 151—155.

Bei der Erweiterung dieser Betrachtungen auf höhere Derivierte versteht man unter der *Ordnung* derselben die Gesamtzahl aller auszuführenden Differentiationen. Geschehen diese nur nach *einer* Variabeln, so erhält man die *reinen* Differentialquotienten; alle übrigen werden als *gemischte* bezeichnet. Auch hier besteht der Satz von der Unabhängigkeit des Wertes von der Reihenfolge der Operationen unter analogen Voraussetzungen wie vorhin. Erst vermöge desselben erhält das Symbol

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \quad (m = i_1 + i_2 + \cdots i_n)$$

einen bestimmten Sinn; zugleich ergeben sich nun auch die entsprechenden Bemerkungen für die Existenz der höheren Differentiale[77]).

Man findet nun auch die *höheren Derivierten des Funktionensystems* $y_1 \ldots y_m$ bei 9. Unter Voraussetzung der Stetigkeit sämtlicher zweiter Differentialq. der f nach den x und y existieren auch die zweiten Derivierten der y nach den x; man erhält die $\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \partial x_j}$ aus den m Gleichungen, die für $k = 1, \ldots m$ aus der Schlussgleichung von 9 durch Differentiation nach x_j hervorgehen, u. s. w.

III. Anwendungen.

11. Die Taylor'sche Entwickelung für Funktionen einer Variabeln. Der *Taylor*'sche Satz, ursprünglich von *B. Taylor* durch die Methode der endlichen Incremente gefunden[78]), erscheint erst nach der Mitte des 18. Jahrhunderts als eines der Fundamentaltheoreme der Differentialrechnung[79]).

77) *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 155—160.

78) *Brook Taylor*, *Methodus incrementorum 1717, p. 21—23 (vgl. indess *Joh. Bernoulli*'s berechtigte Priorität von 1694, Opera omn. 1, p. 125); ähnlich ist auch die Herleitung bei *L. Euler* (Calc. diff. p. 333) und *J. L. Lagrange* (Berl. Nouv. mém. [1772] = Oeuvr. 3, p. 445), aber dort auf n Variable erweitert, und in die symbolische Form

$$\Delta u = e^{\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} + \cdots} - 1$$

gebracht, vgl. *P. S. Laplace* (Par. Mem. 1770 [80], p. 105); ähnlich auch bei *F. Lacroix* (traité 3, p. 60 [1819]).

79) Die Bezeichnung Theorema Tayloriauum wird auf *S. L'Huilier* zurückgeführt. Indess sagt derselbe in der Exposition élémentaire (1786), p. 47 nur „le beau Théorème que Taylor a le premier developpé . . ."; in dem Princ. Calc diff. (1795) Cap. III, p. 48 heisst es „Theorema quod Taylorianum dicitur", woraus eher zu folgen scheint, dass die Bezeichnung schon damals in Gebrauch gewesen.

Die *Taylor'sche Entwickelung* (der *verallgemeinerte Mittelwertsatz*)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + R_n$$

ist von der *Taylor'schen Reihe* zu unterscheiden. Zur Bestimmung des *Restgliedes* R_n sind die verschiedensten Methoden angewandt worden; eine der ältesten ist wohl die von *d'Alembert*[80]), der wenigstens formal den Rest durch ein n-faches Integral ausdrückte. *Laplace* ermittelte denselben durch die Methode der partiellen Integration[81]); *Lagrange*'s Restformel[82]) in der Théorie des fonctions beruht ebenfalls auf einer Integration. Erst bei *Ampère*[83]) und *Cauchy*[84]) erscheint der Satz als eine Folge der *Mittelwertsätze*.

In einer verhältnissmässig sehr allgemeinen Form hat so *O. Schlömilch* zuerst den Rest bestimmt[85]). Ist nämlich $f(x)$ eine mit den $n-1^{\text{ten}}$ Derivierten im Intervalle x bis $x+h$ stetige Funktion und existiert die n^{te} Derivierte innerhalb desselben ebenfalls, so ist für $a = x + h$

$$\varphi(k) = f(a-k) + \frac{k}{1} f'(a-k) + \frac{k^2}{2!} f''(a-k) + \cdots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a-k)$$

eine von $k = 0$ bis $k = h$ stetige Funktion, für die $\varphi(0) = f(a)$ und

$$\varphi'(k) = -\frac{k^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a-k)$$

wird, und auf die der erweiterte *Cauchy*'sche Mittelwertsatz (**7**)

$$\varphi(k) = \varphi(0) + \frac{\psi(k) - \psi(0)}{\psi'(\theta k)} \varphi'(\theta k)$$

---

80) *J. d'Alembert,* Recherches sur différents points importants du système du monde 1, p. 50 (nach *Lacroix,* traité 3, p. 396).

81) *P. S. Laplace,* Théorie analytique des probabilités (1812) = oeuvres 7, p. 193.

82) Théorie des fonctions 1813, éd. 2 (éd. 1, 1797), p. 67: d'où resulte ce théorème nouveau remarquable par sa simplicité et généralité . . .

83) *Ampère* begründet so das *Lagrange*'sche Resultat in den Leçons sur le calcul des fonct. (J. Éc. polyt. cah. 12 [1805]); ib. cah. 13 (1806) werden für den Rest die beiden Grenzen $M\frac{h^n}{(n+1)!}$ und $N\frac{h^n}{(n+1)!}$ gefunden mit M und N als den extremen Werten von $f^{(n+1)}x$ im Intervalle $x, x+h$.

84) So im Calcul différ. (1829), wo die *Lagrange*'sche und die *Cauchy*'sche Restformel p. 75 gegeben werden (auch schon früher in den Exercices de math. 1, p. 27, 28 [1826]).

85) *O. Schlömilch,* Handbuch 1, p. 177; J. de math. (2) 3, p. 384 (1858); daselbst auch p. 121 die unabhängig von Schlömilch gefundene Formel von *E. Roche* aus den Mém. de l'Acad. de Montpellier (1858). Noch allgemeiner ist die Formel von *É. Roche* ib. 1863.

angewendet werden kann, falls die sonst willkürliche, von 0 bis h endliche und stetige Funktion $\psi(x)$ eine für keinen Wert zwischen 0 und h verschwindende oder unendlich grosse Derivierte hat. Hieraus folgt, wenn man $a = x + h$, $k = h$ setzt,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + R_n$$

$$R_n = \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'(1-\theta')h} \frac{h^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a + \theta' h),$$

und für die jedenfalls gestattete Annahme $\psi(x) = x^p$

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^n(x + \theta h)$$

sowie für $p = n$, $p = 1$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(x + \theta h)$$

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x + \theta h)$$

als *Schlömilch*'sche, *Lagrange*'sche und *Cauchy*'sche Form des Restes, wobei θ jedesmal seinen besonderen Wert (> 0, < 1) hat. Die n^{te} Derivierte von $f(x)$ braucht innerhalb x, $x + h$ nicht durchweg endlich zu sein; ebenso ist nicht nötig, dass $f^n(x)$ an den Grenzen des Intervalles existiert[86]); das allgemeinere Theorem, dass die Existenz von $f'(x) \ldots f^{n-1}(x)$ an der Stelle $x + h$ nicht erforderlich ist, findet sich bei *O. Stolz* vermöge einer von *É. Roche* gegebenen Formel bewiesen[87]). — Von den auf der Integralrechnung beruhenden Ableitungen des Satzes mag hier ausser der oben erwähnten auf der Methode der partiellen Integration fussenden von *Laplace*, welche neuerdings durch *L. Kronecker*[88]) eine formal elegante Darstellung erhalten hat, noch die von *C. Jordan*[89]) erwähnt werden; sie führen zu der Integralform des Restes

$$R_n = \int_x^{x+h} dt \cdot \frac{f^n(t)(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

86) Vgl. *J. Tannery,* Fonctions d'une variable, p. 246.

87) *O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 97—100.

88) *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1884, p. 841—862.

89) *C. Jordan,* Cours 1, p. 245. Bei diesen Ableitungen ist jedoch die Stetigkeit der n^{ten} Ableitung vorauszusetzen, falls man nicht in eine genauere Erörterung der Integraloperationen eintreten will. Hinsichtlich der Interpretation der Taylor'schen Entwickelung vgl. man auch: *J. Plücker,* mechan. Deutung d. T. Satzes, Diss. Marburg, 1823 = Werke 1, p. 41; *A. Möbius,* Leipz. Ber. 1844 = Werke 4, p. 627.

die den formalen Vorzug besitzt, von einer unbestimmten Grösse θ frei zu sein.

12. Ausdehnung auf mehrere Variable. Ist $f(x, y)$ eine Funktion, welche sämtliche partielle Derivierte n^{ter} Ordnung besitzt, so kann man durch zweimalige Anwendung der *Taylor*'schen Entwickelung nach *Lagrange*[90]) für $y + h$, $x + k$ eine analoge erhalten, bei der indessen der Rest eine unbequeme Form annimmt[91]). Eine übersichtlichere Formel erhält man nach *Cauchy*[92]), wenn man vermöge der Substitution $h = th_1$, $k = tk_1$ die auf die Funktion *einer* Variabeln t zurückgeführte Funktion $f(x, y)$ im Intervall 0 bis t entwickelt. So entsteht

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \cdots + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x + \theta h, y + \theta k) + \cdots\right];$$

doch muss man jetzt die Stetigkeit der $n + 1$ n^{ten} Differentialquotienten in x, y voraussetzen[93]). Die einzelnen Koeffizienten lassen sich durch die symbolische Bezeichnung

$$\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f$$

darstellen; die Erweiterung auf n Variable erhellt hieraus von selbst.

13. Verallgemeinerungen. Vermöge der *Darboux*'schen Erweiterung des Mittelwertsatzes ergiebt sich die Taylor'sche Entwickelung für Funktionen einer komplexen Variabeln, wobei dem *Lagrange*'schen Rest nur ein Faktor hinzuzufügen ist, dessen Betrag $\leqq 1$ ist[94]).

Eine andere Erweiterung der Taylor'schen Entwickelung entsteht durch die Betrachtung der *Ampère'schen Interpolationsfunktionen*[95]) $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$. Man erhält so die Formel[96])

---

90) Théorie des fonctions p. 134.

91) Die vollständige Ausführung bei *O. Stolz*, p. 143.

92) Calc. différ. p. 244 (1829); kurz zuvor war durch *A. M. Ampère* (Gerg. Ann. 17, p. 317 [1827]) die Taylor'sche Entwickelung mit Hülfe des Mittelwertsatzes in eben dieser Form für n Variable allgemein aufgestellt.

93) *Peano*, Calcolo p. 145 (p. XXV); desgl. *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 161.

94) *Darboux*, J. de math. (2) 3, p. 294 (1876); *P. Mansion*, Brux. S. sc. 9. B (1885/86), p. 37; die genaueren Voraussetzungen bei *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 93.

95) Siehe die Litteratur bei *G. Peano*, Calcolo p. XXI.

96) Vgl. *Hermite*, J. f. Math. 84, p. 70, 79; *R. Lipschitz*, Par. C. R. 96, p. 119 (1878).

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1 x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1 x_2 x_3)$$
$$+ \cdots + (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_1 x_2 \cdots x_n)$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{n!} f^n(\xi),$$

wo ξ ein Mittelwert von $x_1, \ldots x_n, x$ ist, falls $f(x)$ eine Derivierte n^{ter} Ordnung in diesem Intervalle besitzt. In dieser Formel ist als spezieller Fall die von *Crelle*[97]) betrachtete Verallgemeinerung der Taylor'schen Entwickelung enthalten (vgl. I E). Der Mittelwertsatz ist überhaupt von fundamentaler Bedeutung für alle Restbestimmungen, so z. B. auch bei dem Rest der *Lagrange*'schen Reihe[98]) (in Integralform bei *Popoff*[99])), sowie bei einer exakten Begründung der weitreichenden formalen Entwickelungen *H. Wronski*'s[100]). Aber die steigende Komplikation dieser Restausdrücke selbst vermindert ihre Anwendungsfähigkeit, wie schon die Theorie der Lagrange'schen Reihe gezeigt hat, und damit auch das Interesse an denselben. — Weitere Verallgemeinerungen der Taylor'schen Entwickelung in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln II B 1.

14. Die Taylor'sche Reihe. Die *Taylor'sche Reihe* geht aus der *Taylor*'schen Entwickelung hervor, wenn sämtliche $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n endliche bestimmte (wenn auch nicht beständig unter einer festen Grenze liegende) Werte haben (Voraussetzung V_1), und zugleich das Restglied R_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert (Voraussetzung V_2). Denn alsdann wird

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \cdots \text{ in inf.}^{101})$$

Da der Inhalt von V_2 wegen der völlig unbekannten Grösse θ nicht unmittelbar beurteilt werden kann, haben sich bis in die neuere Zeit über die *Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe* unrichtige Vorstellungen erhalten. Abgesehen davon, dass *Lagrange* die Voraussetzung V_1 als

97) *A. L. Crelle*, J. f. Math. 22, p. 249 (1839); es ist dies die durch den Rest ergänzte nrsprüngliche Formel *Taylor*'s; andere Beweise bei *J. Caqué* (J. de math. 10, p. 379 [1845]); *O. Schlömilch* (Zeitschr. Math. Phys. 2, p. 269 [1857], 25, p. 48 [1880]).

98) Vgl. z. B. *Glashan*, Amer. J. 4, p. 282 (1881).

99) *A. Popoff*, Par. C. R. 53, p. 798 (1861).

100) Exposé des méthodes générales de *H. Wronski*, par *A. Leauté* (J. de math. (3) 7, p. 185 (1881) u. flgde. Bde. Vgl. auch *E. Marchand*, Sur le changement des variables, Ann. éc. norm. 3, p. 137, 343 (1886), sowie über *Wronski*'s Arbeiten im allg. die Encyclopédie math. par *A. de Montferrier* 3, p. 401.

101) Der Fall $x = 0$ giebt die nach *Colin Maclaurin* (Treatise on fluxions, § 828, Edinburg 1742) unnötiger Weise besonders benannte Reihe *J. Stirling*'s (1717).

hinreichend ansah, wurde auch die Ansicht desselben, dass die Reihe, wenn sie konvergiere, notwendig auch den Wert $f(x+h)$ darstelle[102]), erst spät in Zweifel gezogen, obwohl bereits *Cauchy*[103]) darauf aufmerksam machte, dass für $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in der Nähe von $x=0$ die Reihe den Wert Null besitzt, also nicht die Funktion darstellt, und andererseits die prinzipielle Art, in der *P. L. Dirichlet* die analoge Frage bei den trigonometrischen Reihen untersucht hatte, sowie die Möglichkeit, dass bei konvergenter Reihe der Rest nicht verschwindet, zur Vorsicht hätte mahnen können.

Erst *Du Bois-Reymond* suchte *analytisch* vollständig definierte Funktionen zu konstruieren, für die trotz V_1 die Reihe divergiert[104]); in völlig strenger Weise aber hat *A. Pringsheim* die Existenz von Funktionen nachgewiesen, bei denen trotz V_1 die Reihe *divergiert*[105]), oder *konvergiert*, aber zur Summe nicht die erzeugende Funktion der Derivierten hat[106]), oder bei denen nur eine *einseitige Entwickelbarkeit* an einer Stelle besteht[107]). Und während *Du Bois-Reymond* noch 1876 den Ausspruch that: „Von den notwendigen Bedingungen für die Taylor'sche Entwickelung, falls dergleichen existieren, haben wir nicht die geringste Vorstellung“[108]), konnte *A. Pringsheim*[109]) 1893 den folgenden Satz aussprechen:

Damit die für $0 \leqq h < R$ eindeutige Funktion $f(x+h)$ daselbst darstellbar sei durch die Taylor'sche Reihe

$$f(a+h) = \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n$$

ist notwendig und hinreichend,

---

102) Théorie des fonctions chap. 5, § 30 = oeuvr. 9, p. 65; Calcul des fonct. Leçon 3 = oeuvr. 10, p. 72.

103) *Cauchy*, Calc. diff. p. 105; über das Cauchy'sche Beispiel vgl. *A. Pringsheim*, Math. Ann. 44, p. 51.

104) *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 21, p. 119 (1876).

105) *A. Pringsheim*, Math. Ann. 42, p. 159 (1893) [auch Münch. Ber. p. 211 (1892)].

106) Ebenda p. 161, 165.

107) *Pringsheim*, Math. Ann. 44, p. 54 (1894); vgl. auch Chicago Congr. Pp. p. 295 (1893). Aus einer im Nachlass von *Ch. Cellérier* vorgefundenen Note (Bull. Darb. 14, p. 142 [1890]) geht hervor, dass C. sich vielleicht schon vor 1885 mit diesen Fragen beschäftigt hat.

108) Math. Ann. 21, p. 109 (Münch. Abh. Nov. 1876). Notwendig und hinreichend ist freilich neben V_1 das Verschwinden des Integralrestes, aber man kann daraus nicht auf bestimmte Eigenschaften der vorgelegten Funktion schliessen. Vgl. *Pringsheim*, Math. Ann. 44, p. 60.

109) Math. Ann. 44, p. 57—82 (August u. Dezember 1893); vgl. auch *E Pascal*, Esercizi p. 196—207.

1) dass $f(x)$ für $a \leqq x < a + R$ endlich sei und für $x = a$ rechtsseitige, für $a < x < a + R$ vollständige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;

2) dass für irgend einen positiven oder negativen ganzzahligen Wert p (incl. $p = 0$) der Ausdruck

$$\lim \frac{1}{(n+p)!} f^{(n)}(a+h)\, k^n$$

gleichmässig gegen Null konvergiere für alle h, k des Gebietes

$$0 \leqq h \leqq h + k \leqq r < R,$$[110])

oder auch, dass das *Cauchy*'sche Restglied für jeden einzelnen den Bedingungen $0 \leqq h \leqq r < R$ genügenden Wert h und alle θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ mit n gleichmässig verschwinde[111]), während dieselbe Forderung für den *Lagrange*'schen Rest eine unnötige Beschränkung enthalten würde[112]).

15. Analytische Funktionen einer reellen Variabeln. Demgemäss bilden nun die *analytischen Funktionen einer reellen Variabeln* eine besondere Klasse K_0 innerhalb der Klasse K der unbeschränkt differentiierbaren Funktionen einer reellen Variabeln[113]). Während die Funktion eines komplexen Argumentes innerhalb eines Kreises dann schon analytisch ist, wenn sie daselbst eindeutig, endlich und stetig und monogen (d. h. im komplexen Sinne gleichmässig differentiierbar) ist[114]), wird für die Funktionen einer reellen Veränderlichen ausser der Forderung unbeschränkter Differentiierbarkeit noch erforderlich das Vorhandensein gewisser Eigenschaften des Unendlichwerdens von $f^n(x)$ für $n = \infty$.

Hierdurch ist zugleich die prinzipiell verschiedene Bedeutung bezeichnet, die die Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments gegenüber der Lehre von den Potenzreihen einer reellen Variabeln einnimmt.

Die Untersuchung der nicht K_0, sondern nur K angehörigen Funktionen ist durch *É. Borel* neuerdings in Angriff genommen[115]).

16. Maximum und Minimum einer Funktion. Unter dem *absoluten Maximum oder Minimum* (*Extremum*[116])) einer Funktion in

110) a. a. O. p. 68. 111) p. 73. 112) p. 76.

113) p. 79. Vgl. II A 1, **12**.

114) Über den prinzipiellen Unterschied in der Tragweite dieser Bedingung und derjenigen der unbeschränkten Differentiierbarkeit (im reellen Sinne) vgl. *Pringsheim*, a. a. O. p. 58.

115) Vgl. II A 1, Fussn. 124.

116) *R. Baltzer*, Elem. d. Math. 5. Aufl. 1, p. 217; *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 15, p. 564 (1879).

einem gewissen Gebiete möge hier ihre *obere* oder *untere* Grenze, falls sie dieselbe *erreicht*, verstanden werden. Zur Bestimmung derselben lassen sich nur allgemeine arithmetische Vorschriften anwenden. In den meisten Fällen handelt es sich dagegen um die *relativen Extreme*, d. h. um die Frage, wann an einer bestimmten Stelle ein absolutes Extremum in Bezug auf einen dieselbe *umgebenden* beliebig kleinen Bereich vorhanden ist, um ein „extremum inter propinquos" nach *Du Bois-Reymond*'s Bezeichnung[117]).

Für eine Funktion der n unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_n$ entsteht so als *Forderung eines relativen Minimums*

$$f(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \cdots x_n + h_n) - f(x_1, \cdots x_n) > 0$$

für *alle* $|h_i| < \varepsilon$, mit Ausnahme von $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$. Werden unter den $x_1 \ldots x_n$ noch gewisse Bedingungen festgesetzt, so entstehen die *Extreme mit Nebenbedingungen* (*bedingte Extreme*). Von *O. Stolz*[118]) werden noch *eigentliche* und *uneigentliche* Extreme unterschieden; die letzteren finden statt, wenn in der obigen Ungleichung neben dem Zeichen $>$ für gewisse h_i beständig auch das Zeichen $=$ vorkommt; als Beispiel kann die beständig positive Funktion

$$f(x) = \left(x \sin \frac{a}{x}\right)^2$$

in der Umgebung von $x = 0$ dienen.

Bei der *Untersuchung der Extreme mittelst der Differentialrechnung* setzt man meistens die Existenz vollständiger Derivierten in dem ganzen Umfange, in dem diese gebraucht werden, *voraus*. Solche Extreme kann man *gewöhnliche* nennen[119]); von ihnen ist im folgenden fast ausschliesslich die Rede, obwohl die *aussergewöhnlichen* Extreme (z. B. bei einseitigen ersten Derivierten, nicht vorhandenen zweiten Derivierten etc.) häufig genug in den Anwendungen auftreten[120]).

---

117) *Du Bois-Reymond* ebenda p. 565. Die Terminologie in der Lehre der Maxima und Minima ist eine sehr schwankende. Am verbreitetsten ist wohl der Gebrauch, die relativen Extreme des Textes absolute oder Extreme schlechthin, die bedingten relative zu nennen, so z. B. *R. Lipschitz* (Analysis 2, p. 306); *A. Mayer*, Leipz. Ber. p. 122 (1889); *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 200. Dagegen heissen nach *G. Peano* (Calcolo diff. p. 191) die absoluten Maxima des Textes relative und umgekehrt; *C. Jordan* (Cours 1, p. 22) setzt obere Grenze und Maximum als gleichbedeutend. Den *relativen Charakter* der Extreme in der Differentialrechnung hat schon *J. d'Alembert* betont (Encyclopédie math. 2, p. 367 [éd. 1784]).

118) Grundzüge p. 200, 211.

119) *A. Mayer*, Leipz. Ber. 33, p. 28 (1881) gebraucht diesen Ausdruck in einem etwas anderen Sinne.

120) Über derartige Fälle vgl. man z. B. *E. Pascal*, Esercizi p. 215—222 (1895).

17. Extreme der Funktionen einer Variabeln. Bei Funktionen *einer* Variabeln folgt aus dem Fundamentalsatze der Differentialrechnung (7) sofort, dass wenn eine Derivierte vorhanden ist, dieselbe notwendig verschwinden muss, wenn an der betreffenden Stelle ein relatives Extremum stattfinden soll, und dass bei einseitigen Derivierten dieselben nicht von gleichem Vorzeichen sein können[121]).

Ist nun $f'(x_0) = 0$ und $f'(x)$ im Intervalle $x_0 \pm h$ so beschaffen, dass es an der Stelle x_0 von positiven zu negativen Werten übergeht, so ist $f(x)$ daselbst ein Maximum. Diese Regel[122]), welche die Existenz des Extremums auch dann zu entscheiden gestattet, wenn $f'(x_0)$ nicht vorhanden sein sollte[123]), verwandelt sich, wenn $f''(x_0)$ existiert, in die Bedingung, dass das Maximum (Minimum) dem Falle $f''(x_0) < 0\ (> 0)$ entspricht. Verschwinden dagegen mit $f(x_0)$ auch noch

$$f''(x_0), \ldots f^{n-1}(x_0),$$

während $f^n(x_0) \neq 0$ ist, so ist sicher bei ungeradem n kein Extremum vorhanden, während bei geradem n das Maximum (Minimum) dem negativen (positiven) Vorzeichen von $f^n(x_0)$ entspricht[123a]); dies Kriterium versagt nur dann, wenn für x_0 alle Derivierten Null sind[124]).

18. Extreme bei mehreren unabhängigen Variabeln. Auch bei Funktionen von *mehr* Variabeln ist für die Existenz eines gewöhnlichen Extremums notwendig das Verschwinden der sämtlichen ersten Derivierten[125]). Aber erst *Lagrange*[126]) lehrte zunächst bei zwei Variabeln, dann allgemein, vermöge der Transformation der Glieder zweiter Ordnung in der *Taylor*'schen Entwickelung

$$f(x_1 + \xi_1, \cdots x_n + \xi_n) = f(x_1, \cdots x_n) + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k + \cdots$$

auf eine Summe von Quadraten, den Fall des Maximums von dem des Minimums unterscheiden, und auch der *Cauchy*'sche Satz[127]), dass, unter Voraussetzung der Entwickelung

$$f(x_1 + \xi_1, \cdots x_n + \xi_n) = f(x_1, \cdots x_n) + (f_2) + (f_3) + \cdots + (f_n) + R_{n+1},$$

121) *O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 200.

122) *Cauchy,* Calc. différ. p. 63.

123) Ein derartiges Beispiel bei *A. Harnack,* Math. Ann. 23, p. 261.

123a) Diese Regel nach *Lagrange,* Misc. Taur. 1 = oeuvr. 1, p. 4 schon bei *Maelaurin.*

124) *L. Scheeffer,* Leipz. Ber. (1886) = Math. Ann. 35, p. 542. Für den Fall einseitiger n^{ter} Differentialquotienten ist das Kriterium erweitert bei *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 207.

125) Für zwei Variable bei *L. Euler,* Calc. diff. p. 648.

126) Misc. Taur. 1 (1759) = oeuvr. 1, p. 1—20, insbes. p. 7; Th. des fonct. p. 263.

127) Calc. différ. p. 234.

in der (f_i) das Glied i^{ter} Dimension in ξ_i, R_{n+1} den Rest bedeutet, für den Fall des Verschwindens sämtlicher

$$(f_2), (f_3), \ldots (f_{n-1})$$

bei geradem n und definitem Charakter von (f_n) mit Sicherheit auf ein Extremum zu schliessen ist, dagegen bei ungeradem n ein solches nicht stattfindet, findet sich schon bei *Lagrange*[128]).

19. Der semidefinite Fall nach Peano und Scheeffer. Den wahrscheinlich bei Untersuchungen über krumme Flächen schon früher bemerkten Fall, wo die quadratische Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} \xi_1^{\,2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}} \xi_2^{\,2}$$

semidefinit ist[129]), d. h. für gewisse Werte von ξ_1 und ξ_2 verschwindet, die nicht beide Null sind, während sie für alle anderen Wertsysteme von ξ_1, ξ_2 von unverändertem Zeichen ist, finde ich zuerst ausdrücklich hervorgehoben von *Gergonne*[130]). Über denselben haben sich bis in die neueste Zeit unrichtige Vorstellungen erhalten, weil man die Entscheidung der Frage nach der Existenz des Extremums von dem *Verhalten der Funktion für diese besonderen Inkremente* abhängig zu machen suchte[131]). Erst *Peano* wies die Unrichtigkeit dieser Vorstellung nach durch das Beispiel

$$f(x_1 x_2) = (x_1^{\,2} - 2px_2)(x_1^{\,2} - 2qx_2),$$
$$p > 0,\ q > 0,$$

bei welchem ein Minimum für die Stelle $0, 0$ *nicht* vorhanden ist.

Unabhängig von *Peano* war *L. Scheeffer* von seiten der Variationsrechnung aus zu einer kritischen Untersuchung der Extreme veranlasst worden. Sein Satz, durch den die Unmöglichkeit, *allgemein* durch die Betrachtung *einzelner* Entwickelungsglieder die Entscheidung zu gewinnen, dargethan wurde, lautet[132]): Lässt sich eine positive ganze Zahl n und eine positive Zahl a finden, so dass die extremen

128) Th. des fonctions p. 266. Ein strenger Beweis dieses Satzes zuerst bei *Peano* (Calcolo p. 197); etwas kürzer bei *L. Scheeffer* (Math. Ann. 37, p. 557); vgl. *C. Jordan* (Cours 1, p. 377); mit der Ausdehnung auf implicite Funktionen von *A. Mayer* (Leipz. Ber. 41, p. 124 [1889]).

129) Nach der von *L. Scheeffer* (Math. Ann. 35, p. 555 [1885]) eingeführten Bezeichnung.

130) Gerg. Ann. 20, p. 331 (1830).

131) So noch bei *Serret-Harnack* Bd. 1; berichtigt im Bd. 2, 1, p. 380 mit Beziehung auf *Peano*'s Beispiel (Calcolo diff. p. XXIX [1884]).

132) *L. Scheeffer*, Leipz. Ber. 1886 = Math. Ann. 35, p. 554; vgl. *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 211. Letzterer dehnte den von *Scheeffer* nur für zwei Variable bewiesenen Satz auf n aus (Wien. Ber. 99, p. 499 [1890]); Grundz. 1, p. 237.

Werte von $f(x_1 x_2)$ auf jedem um den Punkt (0, 0) mit dem Radius $r < \delta$ beschriebenen Kreise absolut genommen grösser als ar^n sind, so kommt die Untersuchung auf das Verhalten der ganzen rationalen Funktion G_n hinaus, die aus den $n+1$ ersten Gliedern der *Lagrange*schen Entwickelung von f in der Nähe von 0, 0 gebildet wird. Die weitere Diskussion ist einfach[133]), wenn G_n eine ganze homogene Funktion ist; im allgemeinen Falle führt ein der *Puiseux*'schen Untersuchung der singulären Stellen einer algebraischen Funktion nachgebildetes Verfahren zum Ziel, das nach einer endlichen Zahl von Operationen seinen Abschluss findet, falls nicht G_n das Quadrat einer rationalen Funktion von ξ_1, ξ_2 zum Faktor hat[134]).

20. Die Arbeiten von Stolz. Da die *Scheeffer*'schen Gesichtspunkte, soweit sie die Durchführung der Operationen betreffen, sich nicht unmittelbar auf mehr als zwei Variable ausdehnen lassen, formulierte *O. Stolz* in Verfolgung des *Lagrange*'schen Gedankens, bei zwei Variabeln die Untersuchung auf eine einzige zurückzuführen[135]), zunächst den *Scheeffer*'schen Satz für n Variable, und gebraucht eine Methode, welche bei drei Variabeln, allerdings nicht ohne Komplikation, zur Entscheidung führt[136]).

21. Die Arbeiten von v. Dantscher. An einen anderen Punkt der *Scheeffer*'schen Arbeit knüpfte *v. Dantscher* an[137]). Zur Existenz eines etwa bei dem Punkte 0, 0 stattfindenden Extremums genügt es nicht, dass die Funktion $f(x, y)$ auf jeder durch den Nullpunkt gehenden *Geraden* ein Extremum besitze; ja es kann hierzu nicht einmal die entsprechende Eigenschaft auf allen rationalen Kurven, die durch den Nullpunkt verlaufen, ausreichend sein[138]). Achtet man jedoch auf die *beiderseitige Ausdehnung* des Intervalles auf jeder solchen Geraden, in dem die Funktion grösser oder kleiner ist als ihre Nachbarwerte, so gelangt man zu einer sicheren Entscheidung[139]). Bezeichnet man nämlich diese Geraden durch

$$x = \lambda \varrho, \quad y = \mu \varrho, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

und ist auf jeder derselben für *alle* Werte eines gleichen Intervalles

133) *Scheeffer*, a. a. O. p. 556.

134) *Scheeffer*, p. 572. Vgl. auch die Darstellung bei *C. Jordan*, Cours 1, p. 381.

135) Théorie des fonctions p. 256.

136) Wien. Ber. 99, p. 496 (1890); 100, p. 1167 (1891); 102, p. 85 (1893). Vgl. auch die Darstellung in Grundz. 1.

137) *V. v. Dantscher*, Math. Ann. 42, p. 89 (1893).

138) *L. Scheeffer*, Math. Ann. 35, p. 548.

139) *v. Dantscher*, a. a. O. p. 91.

$$-p_{\lambda\mu} < \varrho < +q_{\lambda\mu}, \quad f(\lambda\varrho, \mu\varrho) - f(0, 0) < 0,$$

so ist ein wahres Maximum vorhanden, wenn die untere Grenze der kleinsten der positiven Zahlen p, q von Null verschieden ist.

Und hieraus ergiebt sich eine Methode der Untersuchung, welche ebenfalls nach einer endlichen Zahl von Operationen abschliesst oder die Unmöglichkeit eines solchen Abschlusses zu erkennen giebt[140]). Die Fortbildung dieser Untersuchung für mehr als zwei Variable scheint aber gegenwärtig noch nicht zum Abschluss gelangt zu sein.

22. Bedingte Extreme. Soll $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ ein Extremum sein, während die Bedingungen

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots \ \varphi_k = 0 \quad (k < n)$$

bestehen, so kann man, falls k der x durch die übrigen als ausdrückbar angesehen werden, diesen Fall auf den der unabhängigen Variabeln zurückführen. Aber schon *Lagrange* hat diese unzweckmässige und bei mehreren Variabeln gar nicht ausführbare Behandlung durch seine *Methode der Multiplikatoren* ersetzt, nach welcher die *notwendigen* Bedingungen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

erhalten werden[141]). Bereits *Cauchy*[142]) bemerkt, dass wegen der Vertauschbarkeit von f mit jedem der φ eine Reziprocität in den Extremen hervortrete, aber erst *A. Mayer* hat diesen — in den einfachsten Fällen natürlich oft bemerkten und namentlich bei den isoperimetrischen Problemen (II A, 9) hervortretenden — *Reziprocitätssatz* genau präzisiert[143]). Bestehen nämlich zwischen den $n+1$ Variabeln

$$x_0, x_1 \ldots x_n$$

Bedingungen

$$\varphi_0 = 0, \ \ldots \ \varphi_r = 0,$$

in denen wenigstens *ein* Parameter y_0 vorkommt, so besteht zwischen der Lösung der Aufgabe, x_0 zu einem Extremum für konstantes y_0 zu machen, und der reciproken durch Vertauschung von x_0 und y_0 entstehenden, die Beziehung, dass, wenn

$$x_0 = X(y_0)$$

den extremen Wert von x_0 liefert, umgekehrt die Auflösung dieser Gleichung

$$y_0 = Y(x_0)$$

---

140) A. a. O. p. 102, 109, 131.

141) *Lagrange*, Th. des fonct. p. 268; Mécanique analytique = oeuvr. 11, p. 78.

142) *Cauchy*, Calc. différ. p. 250, 252.

143) *A. Mayer*, Leipz. Ber. 41, p. 308 (1889).

einen extremen Wert von y_0 bei konstantem x_0 bestimmt, dessen Charakter sich vollständig durch $\frac{\partial x_0}{\partial y_0}$ bestimmen lässt.

Da die allgemeinen Methoden *Scheeffer*'s eine besondere Behandlung für jeden einzelnen Fall erfordern, suchte *A. Mayer*[144]) ferner in verschiedenen Arbeiten solche Fälle auf, in denen, wie auch im semidefiniten Falle, die Benutzung der Entwickelungsglieder höherer Dimension notwendig und allgemein durchführbar wird. Von der, bis jetzt nicht völlig bewiesenen, Voraussetzung ausgehend, dass ein Extremum sicher vorhanden sei, wenn ein solches auf allen analytischen Kurven

$$x_i = \xi_i + t\xi_i^{(1)} + t^2\xi_i^{(2)} + \cdots$$

durch den betreffenden Punkt ξ_i stattfindet, ergiebt sich, dass für ganze Funktionen zweiter und dritter Ordnung die Untersuchung der dritten und vierten *Variation* in Bezug auf t (d. h. des Entwickelungskoeffizienten der entsprechenden Potenz von t) bereits „im allgemeinen" hinreichend ist.

23. Definite homogene Formen. Wann ist nun eine ganze rationale Funktion, insbesondere eine homogene Form definit oder semidefinit oder indefinit? Diese Frage lässt sich für die *quadratischen Formen* mittelst ihrer Transformation auf eine Summe von Quadraten beantworten, und führt zu einem eleganten, auch in dem Falle, wo noch lineare Bedingungen zwischen den Variabeln bestehen, übersichtlichen Kriterium[145]). Die bereits von *Lagrange*[146]) gegebene Anregung, den definiten Charakter höherer Formen allgemein zu charakterisieren, ist neuerdings durch *D. Hilbert* weiter gefördert. Während eine definite (positive) *binäre Form* (I B 2) immer als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, lässt sich eine solche *biquadratische ternäre Form*

144) *A. Mayer,* Leipz. Ber. 41, p. 129 (1889), daselbst der Ausdruck des *Scheeffer*'schen Theorems für bedingte Extreme; desgl. Leipz. Ber. 44, p. 54 (1892); vgl. auch die älteren Arbeiten in Leipz. Ber. 33, p. 28 (1881); daselbst p. 42 Bemerkungen über den schon von *Cauchy* (Calc. diff. p. 233) angeführten Fall, wo die notwendigen Bedingungen des Extremums für eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Werten bestehen. (Vgl. *S. Spitzer,* Arch. Math. 22, p. 187 [1854].)

145) In den Grundzügen (abgesehen von *Lagrange*) schon bei *Cauchy* (Calc. différ. p. 246); zum ersten Male für n unabhängige Variable bei *J. J. Sylvester* (Lond. Trans. 143, p. 481 [1853]; auch Phil. mag. 1852); Beweis der *Sylvester*schen Formel bei *B. Williamson* (Quart. J. 7, p. 48 [1872/73]). Die Behandlung von *F. Richelot* in den Astr. Nachr. 48, p. 273 (1858) wurde in kürzerer Weise dargestellt durch *F. Brioschi* (Ann. di mat. (1), 2 p. 61 [1859]); sodann durch *O. Stolz,* mit spezieller Beziehung auf die Theorie der Extreme, Wien. Ber. 68, p. 1063 (1868); man vgl. auch *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 248.

146) Th. des fonctions, p. 266.

durch die Summe dreier Quadrate darstellen[147]), aber unter den definiten Formen einer (geraden) Ordnung n von m Variabeln, abgesehen von den drei besonderen Fällen $n = 2$, m beliebig; n beliebig, $m = 2$; $n = 4$, $m = 3$, finden sich immer auch solche, die überhaupt nicht als eine endliche Summe von Quadraten sich darstellen lassen[148]). Die Entscheidung für höhere Formen ist also überhaupt keine zum Falle $n = 2$ analoge Aufgabe der Formentheorie[148a]), sondern die Frage ist nach dem Extremum der homogenen Function $G_n(x_1, \ldots x_n)$ unter der Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

zu stellen.

24. Independente Darstellung höherer Derivierten. Da für $y = \varphi(x)$, $f(x) = F(y)$ die Gleichung

$$f^{(n)}(x) = \sum_k X_k^n F^{(k)}(y), \quad k = 1, \ldots n$$

besteht, in der die X_k^n von der Form des $F(y)$ unabhängige Funktionen k^{ten} Grades der $1, 2 \ldots n - k + 1^{\text{ten}}$ Derivierten von $\varphi(x)$ sind, so kann man dieselben aus den linearen Gleichungen bestimmen, die aus n für $F(y)$ passend gewählten Funktionen (z. B. Potenzen von y) entstehen. Dies ist von *Hess*[149]) mit Benutzung der Determinantentheorie geschehen; zweckmässiger ist das auf der Vergleichung beider Seiten der obigen Gleichung mit Hülfe der Taylor'schen Reihe beruhende Verfahren *Hoppe*'s[150]) und *U. Meyer*'s[151]). *Schlömilch* gab dann[152]) die Formeln für die von ihm als zweites Hauptproblem bezeichnete Aufgabe, die $F^{(n)}(y)$ durch die $f^{(k)}(x)$ auszudrücken, d. h. die independenten Formeln zur Vertauschung der unabhängigen Variabeln; erst *Steinbrück*[153]) wies auf die selbstverständliche Identität

147) *D. Hilbert,* Math. Ann. 32, p. 342 (1888).

148) Ebenda p. 344.

148a) Vgl. indess den weiteren Satz von *D. Hilbert*, Acta math. 17, p. 169 (1893), nach dem jede ternäre definite Form als Quotient zweier Summen von Quadraten von Formen darstellbar ist.

149) *E. Hess,* Zeitschr. Math. Phys. 17, p. 1—12 (1872); für mehr Variable ähnlich bei *F. Mertens,* Krakau. Ber. 20, p. 251 (1890).

150) *R. Hoppe,* Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipz. 1845 (J. f. Math. 32, p. 78); erste allgem. Behandlung der Aufgabe, von welcher z. B. noch J. f. Math. 32, p. 1 (1846) durch *Schlömilch* ganz spezielle Fälle betrachtet werden.

151) *U. Meyer,* Arch. Math. 9, p. 96 (1847).

152) *O. Schlömilch*, Leipz. Ber. 1857; Zeitschr. Math. Phys. 3, p. 65 (1858); Kompendium 2, p. 16 (1879).

153) *G. Steinbrück*, Diss. Berl. 1876, p. 2.

der beiden Fragen hin, vermöge der neben der obigen Gleichung auch

$$F^{(n)}(y) = \sum Y_k{}^n f^{(k)}$$

wird. Ein wesentlicher Fortschritt aber ergab sich, als nach *Götting*'s Entwickelung der Potenz y^k [154]) *Most* den n^{ten} Differentialquotienten mittelst des *Cauchy*'schen Integrals in die Betrachtung einführte[155]); eine Konsequenz davon war die Erweiterung des Problems auf die Derivierten einer Funktion von beliebig vielen Variabeln. Übrigens ist die Integraldarstellung nur ein Durchgangspunkt, denn es genügt, falls $y = \varphi(x)$ und $F(y)$ als konvergente Potenzreihen vorausgesetzt werden, in der Entwickelung von $f(x + \xi)$ den Koeffizienten von

$$\frac{1}{n!}\xi^n$$

zu nehmen; derselbe ist nach dem polynomischen und Taylor'schen Satze gleich

$$f^n(x) = \sum F^k(y) \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots} \left(\frac{\varphi^{k_1}(x)}{k_1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\varphi^{k_2}(x)}{k_2!}\right)^{i_2} \cdots,$$

wobei

$$i_1 + i_2 \quad + \cdots = k,$$
$$i_1 k_1 + i_2 k_2 + \cdots = n,$$

womit *Faà di Bruno*'s Formel[156]) gefunden ist.

Die *Most*'schen Resultate hat neuerdings *Königsberger* elementar nach der Methode der vollständigen Induktion hergeleitet[157]). Erwähnt sei noch eine Untersuchung von *Fr. Meyer*[158]) über den algebraischen Charakter der *Bruno*'schen Formel.

D. Integralrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

a) Das unbestimmte Integral.

25. Die unbestimmte Integration. *Euler* definiert die Integralrechnung folgendermassen: Calculus integralis est methodus, ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum,

154) *R. Götting,* Math. Ann. 3, p. 276 (1870).

155) *R. Most,* Math. Ann. 4, p. 499 (1871).

156) *Faà di Bruno,* Ann. fis. mat. (1855), erweitert bei *Most,* a. a. O. p. 502. Durch die im Texte angedeutete, übrigens schon von *S. F. Lacroix* (traité 1, p. 325 [1810]) angegebene Methode wird eigentlich die Ausbildung einer besonderen Theorie überflüssig.

157) *L. Königsberger,* Math. Ann. 27, p. 473 (1886).

158) *Fr. Meyer,* Math. Ann. 36, p. 435, 453 (1890); man vgl. auch Mon.h. 1, p. 33 (1890).

et operatio, qua hoc praestatur, integratio vocari solet[159]). Gegenwärtig pflegt man dagegen aus der eigentlichen Integralrechnung die Lehre von den Differentialgleichungen (II A 4—8) auszuscheiden, und dieselbe auf den Fall zu beschränken, wo aus der functio derivata die functio integra (primitive F. nach *Lagrange*'s Bezeichnung[160]) gesucht werden soll.

Giebt es überhaupt zwei stetige Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$, deren Differentialquotient (allgemeiner deren vorwärts genommene Derivierte) $f(x)$ ist, so ist nach dem Fundamentalsatze der Differentialrechnung

$$F(x) - \Phi(x) = \text{const.}$$

Der Ausdruck[161])

$$\int f(x)\,dx + \text{const.}$$

stellt daher *alle* Integralfunktioneu der bezeichneten Art von $f(x)$ vor, wenn $\int f(x)\,dx$ *irgend eine* derselben bedeutet; er heisst das *unbestimmte Integral* von $f(x)$. Aus den Formeln der Differentialrechnung (3) ergeben sich so die für die Elemente der Integralrechnung ausreichenden Formeln

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \gtrless -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = l(x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Wird die Integralfunktion so bestimmt, dass sie für $x = a$ verschwindet, so heisst das Integral ein *bestimmtes*, und wird durch

$$J = \int_a^x f(x)\,dx$$

bezeichnet[162]).

---

159) *Euler*, Inst. calc. int. 1, p. 1 (1768); ähnlich Calc. diff. praefatio p. VIII (1755).

160) *Lagrange*, Fonct. analyt. = oeuvr. 9, p. 33.

161) Das Zeichen $\int$ (eigentlich ein S = Summe, vgl. Fussn. 186) stammt von *Leibniz*, dem Begründer der Integralrechnung (*Joh. Bernoulli*, opera 1, p. 96; vgl. auch dessen Lectiones mathematicae, opera 3, p. 387), Manuscr. v. 29. Okt. 1675 (*Gerhardt*, Entdeckung der höheren Analysis p. 125); zum ersten Mal gedruckt in der Geometria recondita 1686 (*Leibniz*, math. Schriften 5, p. 226); zu allgemeiner Anwendung kam es seit 1696, wo *Joh. Bernoulli* (*Leibniz*, Schriften 7, p. 262) dasselbe annahm.

162) Diese Bezeichnung der *Grenzen des Integrals* rührt von *J. B. Fourier*

Ist also $F(x)$ eine der stetigen durch das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ dargestellten Funktionen, so wird

$$J = F(x) - F(a);$$

für den Substitutionsprozess auf der rechten Seite werden häufig die Zeichen

$$|F(x)|_a^x, \quad \Big|_a^x F(x)^{163})$$

gebraucht.

26. Die rationalen Funktionen. Das Integral einer Funktion ergiebt sich, sobald durch eine der folgenden Methoden: Zerlegung der Funktion in eine Summe einfacherer, Substitution einer neuen Variabeln, partielle Integration, Differentiation resp. Integration nach einem Parameter etc., von denen die drei ersten unmittelbar mittelst der Differentialrechnung begründet werden können, das vorgelegte Integral auf die elementaren Integrale zurückgeführt werden kann.

Die Integration der irreducibeln rationalen gebrochenen Funktionen[164]) $F(x):f(x)$, bei denen $F(x)$ von vorneherein von niedrigerem Grade als $f(x)$ vorausgesetzt werden soll, beruht auf der *Partialbruchzerlegung*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \cdots,$$

wo $a, b, \ldots$ die Wurzeln von $f(x) = 0$ und $A, B, \ldots$ Konstanten sind, zu deren Berechnung die von *Lagrange*[165]) herrührende Entwickelung

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} = \left| \frac{F(x+h)}{f(x+h)\cdot(x-a-h)} \right|_{h^{-1}}$$

her (Théorie analyt. de la chaleur p. 252 [1822] = oeuvr. 1, p. 226) Nach *Lacroix*, 3, p. 468 schrieb *Euler*

$$\int f(x)\,dx \Big|_{x=b}^{x=a}.$$

Kronecker (Vorlesungen p. 1) beanstandet die Bezeichnung „bestimmtes" Integral; schon der Bearbeiter des Artikels Integralrechnung in *Ersch* und *Gruber's Encyclopädie* Teil 19, p. 183 (1841) schlug den Namen „abgegrenztes Integral" vor.

163) Eingeführt von *F. Sarrus* (Gerg. Ann. 14, p. 197 (1823); auch Par. sav. étr. 10 (1848); man vgl. auch *Moigno* 4, 1, p. XI und 1, sowie *Cauchy*, Exercices d'analyse 3, p. 100 (1844).

164) *Leibniz* und *Joh. Bernoulli*, Act. erud. 1702/3 (*Leibniz*, math. Schriften 5, p. 350; *J. Bernoulli*, opera 1, p. 393); vgl. auch *Dirksen*, J. f. Math. 1, p. 53 (1826); *L. A. Crelle*, J. f. Math. 9, p. 32 (1832).

165) *Lagrange*, Berl. nouv. mém. 1792/93 = oeuvr. 5, p. 640.

nach *Jacobi*'s[166]) Bezeichnung angewandt werden kann. Bei komplexen Wurzeln von $f(x)$ tritt hiernach das Resultat in imaginärer Form auf. Man vermeidet dies bei reellen Funktionen durch paarweises Zusammenfassen der komplex konjugierten Teile; diese sehr weitläufige Behandlung wird vereinfacht durch die Methode, die komplexen Partialnenner in der Form

$$\frac{A_n x + B_n}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^n} + \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

anzusetzen[167]), doch müssen auch hier noch die einzelnen Glieder durch partielle Integration auf logarithmische und Kreisfunktionen reduziert werden.

Diese Rechnungen werden vermieden durch den von *Baltzer* wieder hervorgehobenen Ansatz[168])

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\frac{F_1(x)}{f_1(x)} + \sum \frac{A_l}{x-a_l} + \sum \frac{B_k x + C_k}{(x-b_k)^2 + c_k^2}$$

($f_1(x)$ der grösste gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, $F_1(x)$ eine ganze Funktion, deren Koeffizienten, ebenso wie die B_k, C_k durch Auflösung linearer Gleichungen zu bestimmen sind). Lässt man an Stelle dieser Formel den Ausdruck

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{P}\right) + \frac{N}{Q}$$

treten, wo Q das Produkt der einfachen Wurzelfaktoren von $f(x)$, P der grösste gemeinsame Faktor von $f(x)$ und $f'(x)$, M (und N) von niedrigerem Grade sind wie P (und Q), so gelangt man zur Bemerkung von *Hermite*[169]), dass diese letzte Zerlegung *rational* ausgeführt werden kann, ohne die Wurzeln von $f(x)$ zu kennen, so dass diese selbst nur zur Kenntnis des aus $\frac{N}{Q}$ entspringenden transcendenten Integralteiles erforderlich sind. Im übrigen gehören diese Partialbruchzerlegungen in das Gebiet der *Algebra*, der es obliegt, zu zeigen, dass die angegebenen Entwickelungen 1) auf eine *einzige* Art möglich

166) *C. G. J. Jacobi*, Diss. Berol. 1825 = Werke 3, p. 12; auch 6, p. 27. Der Koeffizient A_α ist immer gleich $F'(\alpha) : f_1(\alpha)$, wo $f_1(x) = f(x) : (x-\alpha)^\alpha$.

167) So schon bei *Euler*, Calc. int. 1, p. 24 (Salomon); *Lacroix*, traité 2, p. 15 (1814); desgl. *F. Minding*, Handbuch der Diff.- u. Integralrechn. 1, p. 167; so auch noch bei *J. Houël*, 2, p. 390 (1878).

168) *R. Baltzer*, Leipz. Ber. p. 535 (1873), mit dem Hinweis auf *Newton*'s quadratura curvarum (1704); das Verfahren indessen weit früher schon von *Weierstrass* bei ähnlichen Reduktionen gebraucht.

169) *Hermite*, Ann. Éc. norm. (2) 1, p. 215 (1872), Cours d'analyse p. 265 (1873).

sind[170]), 2) durch *rationale* Operationen ausgeführt werden können, sobald man die irreducibeln reellen Faktoren von $f(x)$ als bekannt voraussetzt[171]). (Vgl. I B 1 a, **2. 5. 14**). Eine dem heutigen Standpunkt entsprechende Behandlung der Integrale rationaler Funktionen ist wegen der Vieldeutigkeit der Integrale erst auf Grund der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln möglich.

27. Transcendente Funktionen. Auf den Fall der rationalen Funktionen lassen sich die Integrale der *rationalen* Funktionen von den *goniometrischen* oder der *Exponentialfunktion* durch Substitution zurückführen. Insbesondere gilt das auch noch von der rationalen *ganzen* Funktion

$$f(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots \sin \alpha x, \cos \alpha x; \sin \beta x, \cos \beta x, \ldots),$$

deren Berechnung in Analogie mit der Theorie der Integrale doppeltperiodischer Funktionen *Hermite* ausführlich dargelegt hat[172]).

28. Algebraische Funktionen vom Geschlechte Null. Die Integrale irrationaler Funktionen von der Form

$$J = \int f(xy)\,dx,$$

wo f eine rationale Funktion von x und $y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ ist, lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten behandeln. *Erstens* kann man durch die bei den hyperelliptischen Integralen überhaupt gebräuchlichen Methoden das Integral zunächst auf die Form[173])

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} \frac{1}{y}\,dx$$

bringen und dann die rationale Funktion von x in Partialbrüche zerlegen. So gewinnt man die Entwickelung

$$\frac{F(x)}{f(x)} \frac{1}{y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{F_1(x)}{f_1(x)}\right) y + \sum \frac{A_r}{x - a_r} \frac{1}{y} + \sum \frac{(B_k x + C_k)'}{y((x - c_k)^2 + e_k^2)},$$

wo $F_1(x)$ und $f_1(x)$ teilerfremd sind, in völliger Analogie mit der Entwickelung der rationalen Funktionen.

Zweitens kann man durch eine geeignete Substitution[174]) die Irra-

170) *Ch. Duhamel,* Cours d'analyse, 2. éd. 1847, deutsch v. *H. Wagner,* Braunschw. 1855, Teil I, p. 192.

171) Erschöpfende Darstellung bei *Genocchi-Peano,* Calcolo, p. 261—266 und *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 275—304; 2, p. 104—108.

172) *Hermite,* Cours d'analyse p. 258, 320—380.

173) Vgl. die Auseinandersetzung dieses von *K. Weierstrass* in Vorlesungen behandelten Verfahrens bei *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 305—333; 2, 109—155.

174) So schon bei *Euler,* Calc. int. 4, p. 17 (Salomon); vgl. auch z. B. *Genocchi-Peano,* p. 268.

tionalität überhaupt beseitigen und damit das Problem auf das der Integration einer rationalen Funktion zurückführen. Diese Methode erweist sich als ein Spezialfall der allgemeineren über eine *Kurve* vom *Geschlechte Null* erstreckten Integrale. (Vgl. II B 3a.)

29. Methode von Aronhold. Alle diese Operationen liefern aber selbst in den einfachsten Fällen zunächst keine Einsicht in die formentheoretische Natur des Endresultates. Die prinzipielle Untersuchung des Integrales J, falls zwischen x und y eine *allgemeine Gleichung zweiten Grades* besteht, nahm zuerst *S. Aronhold*[175]) vor. Er beseitigt die Zerlegung in Partialbrüche, das wiederholte Rationalmachen, und setzt an Stelle desselben eine Zerlegung in *exakte Differentiale*, für die der Zusammenhang zwischen y und x gleichgültig ist[176]). Durch die *Einführung homogener Koordinaten* (die hier zum ersten Male zur Untersuchung transcendenter Funktionen benutzt werden) gelingt es zugleich, den algebraischen Aufbau der Resultate mit der *Methode der Formenbildung* zu beherrschen. Indem *Aronhold* so jedes Differential in die *Abel*'sche Form

$$\frac{\Pi(x_1, x_2, x_3)\,\Delta}{f(\xi, x)}$$

bringt, wo Π eine gebrochene Funktion -1ter Ordnung, Δ die Determinante $(\xi x\, dx)$, $f(\xi, x)$ aber gleich

$$\frac{1}{2}\sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f(\xi, x),$$

wenn unter $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes verstanden wird, auf den sich das Differential bezieht, lässt sich das *Fundamentalintegral*[177])

$$\varpi = \int^{x} \frac{\Delta}{u f(\xi x)}, \quad u = \sum u_i x_i,$$

als Logarithmus darstellen, und aus diesem gewinnt man durch den *Aronhold*'schen δ-Prozess[178]) wieder das Integral

$$\varpi_n = \int^{a} \left(\frac{a}{u}\right)^n d\varpi, \quad a = \sum a_i x_i,$$

---

175) Berl. Ber. 1861; J. f. Math. 61, p. 95 (1863), (1862). Diese Arbeit gab den Anstoss zu den Untersuchungen von *Clebsch* (J. f. Math. 63, 64) und der Theorie der Abel'schen Funktionen von *Clebsch* und *Gordan* (Leipz. 1866), sowie zu der ganzen Entwickelung der algebraischen Integrale in homogenen Koordinaten.

176) Diese Methode ist daher auch für höhere Irrationalitäten anwendbar; die von *Aronhold* in Aussicht gestellte Fortsetzung für hyperelliptische Integrale ist aber nicht erschienen.

177) Daselbst p. 101.

178) Desgl. p. 106.

endlich hieraus durch *symbolische Substitution* das Integral einer jeden ganzen rationalen Funktion von x, y.[179])

30. Schlussbemerkung. In den Fällen, wo die unbestimmte Integration sich nicht auf die besprochenen Fälle zurückführen liess[180]), suchte man entweder durch Reihenentwickelung das Integral zu gewinnen, von dessen Existenz man auf Grund der *Newton*'schen Bemerkung überzeugt war, dass der Flächeninhalt der Kurve mit der Ordinate $f(x)$ zum Differentialquotienten $f(x)$ hat[181]), oder dasselbe angenähert durch *Summation* zu ermitteln[182]). In prinzipieller Weise scheint man aber vor *Cauchy* die Existenzfrage überhaupt nicht gestellt zu haben. Selbst bei dem Satze, durch den die *Leibniz*'sche Summation

$$f(x) - f(a) = \sum d_i f' a_i + \sum \varepsilon_i d_i$$

vermöge des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung begründet wird[183]), vermisst man nicht selten den Beweis, dass die so gewonnene Funktion wirklich zur Derivierten $f'(x)$ habe[184]). Und bei einer Durchsicht auch der ausführlicheren Lehrbücher der Integralrechnung tritt deutlich hervor, wie sehr die Begründung der Integralrechnung in diesem Teile der Litteratur bis in die neuere Zeit vernachlässigt worden ist[185]).

---

179) Die Erweiterung der Methode auf höhere Fundamentalintegrale etc. p. 133. Kurze Darstellung des *Aronhold*'schen Verfahrens bei *Harnack*, Elemente p. 219; desgl. bei *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 148—154 (1896); vom Standpunkt der homogenen Koordinaten aus bei *F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie von *A. Clebsch*, p. 766 (1876), sowie *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus d. anal. Geom. der Kegelschnitte, Leipzig 1895, p. 415.

180) Bei *Joh. Bernoulli*, lect. math. de meth. integralium, Opera 3, p. 371, wird die Existenz des Integrals vom Erfolge der Integration abhängig gemacht.

181) *Newton*, de quadratura curvarum (1711), Opuscula 1, p. 125 u. p. 212.

182) *Euler*, Calc. int. 2, p. 200.

183) Diese den Übergang zum *Cauchy*'schen Integralbegriff zweckmässig vermittelnde, auch heute noch übliche Darstellung (vgl. z. B. *Harnack*, Elem. p. 184; *Dini-Lüroth*, p. 318; *Picard*, traité 1, p. 2) findet sich schon bei *A. de Morgan* (Differential and integral calculus, London 1842, p. 100); von wem mag sie herrühren?

184) So z. B. bei *J. A. Serret*, Cours de calcul diff. et intégral 2, p. 3 (1880); erst in *A. Harnack*'s Bearbeitung 2^1, p. 5 (1884) finden sich die nötigen Ergänzungen. Den *Cauchy*'schen Integralbegriff findet man bereits in *F. Minding*'s Handbuch 1, p. 158, 160 (1836) benutzt.

185) Etwa bis auf *R. Lipschitz*' Lehrbuch der Analysis (1880), doch bildet schon *Schlömilch*'s Handbuch der Diff.- u. Integralrechnung (1847—48) eine Ausnahme, vgl. z. B. Integr.-R. p. 3.

b) Das bestimmte Integral.

31. Das bestimmte Integral nach Cauchy, Riemann und Darboux. Durch *Joh. Bernoulli*'s und *L. Euler*'s Ausbildung der formalen Integralrechnung war der ursprüngliche Begriff derselben als der des calculus summatorius von *Leibniz*[186]) zurückgedrängt worden. Erst *Cauchy* ging auch hier wieder auf die ursprünglichen Vorstellungen zurück und definierte das Integral zwischen den Grenzen a und b durch den Grenzwert

$$(1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (b - x_n)f(x_n)],$$

zunächst unter der Voraussetzung eines im ganzen Intervalle stetigen und endlichen $f(x)$.[187]) Von dieser Beschränkung befreite erst *B. Riemann*[188]) den Integralbegriff durch die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen für eine im Intervalle *endliche* Funktion jener Grenzwert ein vollkommen bestimmter, von der Art der Einteilung des Intervalles völlig unabhängiger ist. Zugleich tritt an die Stelle von (1) die Definition[189])

$$\lim[(x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \cdots + (b - x_{n-1})f(\xi_{n-1})],$$

wo ξ_k irgend einen dem Intervalle $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ angehörigen Wert bedeutet. Bezeichnet nun O_k die obere, o_k die untere Grenze von $f(x)$ in diesem Intervalle, $D_k = O_k - o_k$ die *Schwankung* des Funktionswertes, so muss *notwendig*[190])

$$(2)\qquad \lim \sum D_k \Delta x_k = 0$$

186) *Leibniz,* math. Schriften 3, p. 118. Bei *Euler* wird der Summenbegriff nur zur angenäherten Berechnung des Integrals herangezogen. Vgl. auch Calc. int. p. 3, scholium 1: hoc signum $\int$ vocabulo summae efferri solet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tanquam summa omnium differentialium spectatur, est natum. Dagegen beruhen die Integrationen bei *P. Fermat* (Varia opera [1679], p. 44), *Wallis* u. anderen auf dem eigentlichen Summenbegriff. Über neuere Berechnungen bestimmter Integrale auf Grund dieser Vorstellung vgl. *Dirichlet* bei *G. F. Meyer,* p. 9—15 (1858); *Dini-Lüroth,* p. 341; *Lipschitz,* Lehrb. d. Analysis 2, p. 109; *E. Netto,* Ztschr. f. Math. Phys. 40, p. 185 (1895).

187) *A. L. Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 571 u. 590 (1823); auch schon im „Résumé des leçons etc." von 1823, p. 81. (Vgl. I A 1, Fussn. 81.) Vgl. auch *P. L. Dirichlet* (Repert. Phys. 1, p. 153 [1837] = Werke 1, p. 135).

188) *B. Riemann,* Hab.-Schr. Gött. 1854 (publ. 1867) = Werke p. 213.

189) Ebenda p. 225. Noch allgemeiner kann man in der Integraldefinition des Textes unter $f(\xi_k)$ irgend einen zwischen O_k und o_k gelegenen Wert verstehen, gleichgültig, ob die Funktion denselben wirklich annimmt oder nicht. Vgl. z. B. *G. Ascoli,* Ann. di mat. (2) 23 (1895), p. 68.

190) Desgl. p. 226.

sein, und diese Bedingung, die man auch so aussprechen kann: Die Summe der Intervalle, in denen die Schwankungen grösser sind wie eine bestimmte positive Zahl δ, muss durch Verkleinerung der Intervalle kleiner gemacht werden können, wie eine noch so kleine Zahl ε, ist zugleich die *hinreichende* für die Existenz des Grenzwertes in dem oben angegebenen Sinne.

Der *Riemann*'sche Beweis[191]) hierfür ist erst durch *Thomae*[192]) und *Du Bois-Reymond*[193]) mittelst des bereits von *Cauchy* benutzten Prinzipes der Superposition der Teilungen völlig ausgeführt worden. Eine Funktion, welche der oben angeführten Bedingung (2) in einem gewissen Intervalle genügt, heisst daselbst *integrierbar* oder *integrabel*. *G. Darboux*[194]) und fast gleichzeitig *Thomae* nnd *G. Ascoli*[195]) haben die *Riemann*'sche Vorstellung noch erweitert. Unter allen Umständen haben die beiden Summen

$$\sum O_k \Delta x_k, \quad \sum o_k \Delta x_k$$

völlig bestimmte *untere* und *obere* Grenzwerte S und s; diese heissen oberes uud unteres Integral bei *Pasch*[196]), Intégrale par excès et par défaut bei *C. Jordan*[196a]), und können nach *V. Volterra* und *G. Peano* zweckmässig durch:

$$\int_a^b, \quad \underline{\int}_a^b$$

bezeichnet werden[196b]).

32. Integrable Funktionen. *H. Hankel*[197]) unterschied *punktiert unstetige* Funktionen, d. h. solche, deren Stetigkeitspunkte überall

---

191) p. 227.

192) *J. Thomae,* Einleitung p. 11—13; hierzu die Bemerkungen von *P. du Bois-Reymond* (Ztschr. Math. Phys. 20, h.-l. A. p. 123); vgl. auch *J. Thomae,* ib. 21, p. 224 (1876).

193) J. f. Math. 79, p. 259 (1874); vgl. auch *A. Harnack,* Elemente p. 253 bis 258; *Dini-Lüroth,* p. 323—332.

194) *G. Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 4, p. 64 (1876) [datiert v. März 1873, Januar 1874].

195) *J. Thomae,* Einl. p. 12 (1875); *G. Ascoli,* Linc. atti, Juni 1875, p. 863.

196) Nach Vorgang von *V. Volterra,* Giorn. di mat. 19, p. 340 (1881); *M. Pasch,* Math. Ann. 30, p. 151 (1887), sowie *G. Peano,* Lezioni 1, p. 139 und Ann. di mat. (2) 23, p. 157 (1895); *O. Stolz,* Monatsh. 7, 1896, p. 291; 8, 1897, p. 95.

196a) *C. Jordan,* Cours 1, p. 34. 196b) Vgl. neben Fussn. 196 *Pringsheim,* Münch. Ber. 28, p. 65 (1898).

197) Progr. Tübingen 1870 = Math. Ann. 20, p. 89. Nach *Dini* (1878); vgl. *Dini-Lüroth,* p. 341, sind zunächst nur diejenigen endlichen Funktionen integrierbar, deren Unstetigkeiten in eine Punktmenge erster Art (abzählbare Menge) fallen, dann diejenigen, deren Unstetigkeiten eine unausgedehnte Menge

dicht liegen, und *total unstetige*; erstere erklärte er als integrierbar, letztere nicht. Eine exakte Darstellung dieser Unterscheidungen gelang erst auf Grund der von *G. Cantor* ausgebildeten Mengenlehre[198]). Stetige Funktionen von integrabelen Funktionen sind wieder integrabel[199]); andererseits ist ein Produkt sicher nicht integrabel, wenn ein Faktor integrabel ist, der andere nicht[200]).

33. Eigenschaften des bestimmten Integrals. Diese Auffassung des Integrationsprozesses, *welcher hiernach den sehr beschränkenden Forderungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit in der Diff.-Rechn. gegenüber als eine Operation von der grössten Allgemeinheit erscheint*, erfordert es nun, dass die aus der älteren Integralrechnung bekannten Sätze, welche auf der Umkehrung der Differentiation beruhen, aufs *neue* begründet werden. Schon *Dirichlet*[201]) machte auf die *Cauchy*schen Sätze aufmerksam, nach denen

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b = -\int_b^a,$$

$$\int_a^b \sum f_i(x)dx = \sum \int_a^b f_i(x)dx,$$

ist; in systematischer Weise ist aber diese Forderung namentlich durch *Du Bois-Reymond* gestellt worden[202]). Die Abschätzung eines Integralwertes geschieht mittelst der beiden „Mittelwertsätze".

34. Der erste Mittelwertsatz[203]) bezieht sich auf das Integral

bilden, während *A. Harnack* den *Hankel*'schen Begriff der punktierten Unstetigkeit so veränderte, dass der Wortlaut des Textes richtig bleibt (Math. Ann. 19, p. 242; 24, p. 218). Vgl. II A 1, 19, insb. Fussn. 208.

198) Aufzählung integrabeler Funktionen bei *Dini-Lüroth*, p. 332—341.

199) *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 79, p. 23 (1874), dann Math. Ann. 16, p. 112 (1879) und 20, p. 122 (1881); für uneigentliche Integrale bestehen diese Sätze zum Teil nicht.

200) Ähnliche Untersuchungen für das Doppelintegral bei *O. Stolz*, Math. Ann. 26, p. 83 (1884).

201) *Dirichlet*, Werke p. 136 (1837).

202) Münch. Abh. 12, p. 161 (1876). Dem gegenwärtigen Standpunkt würde es entsprechen, diese Forderung so zu stellen, dass dabei immer *oberes* und *unteres* Integral *unterschieden* wird.

203) *P. G. L. Dirichlet* in Repert. Phys. a. a. O. p. 152 = Werke 1, p. 138. Der Satz selbst ist natürlich weit älter und findet seinen geometrischen Ausdruck darin, dass ein zwischen zwei Abscissen begrenztes Flächenstück einer

$$J = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

unter der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ im Intervall $a - b$ sein Zeichen nicht ändert und $\varphi(x)$ und $f(x)$ integrabel sind. Ist dann M die obere, m die untere Grenze von $f(x)$, so hat man

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq J \leqq M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

oder, falls $f(\xi)$ den unbekannten Mittelwert von m, M für $\xi = a + \theta(b-a)$ wirklich annimmt $(0 \leqq \theta \leqq 1)$,

$$J = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$[204]

Aus diesem Satze folgt, dass das bestimmte Integral eine stetige Funktion seiner oberen Grenze ist. Er gilt aber auch für komplexe Funktionen $f(x)$ einer reellen Variabeln, wenn man auf der rechten Seite nach *Darboux*[205] einen Faktor λ hinzufügt, dessen Betrag $\leqq 1$ ist und kann in dieser Form dann überhaupt auf Funktionen einer komplexen Variabeln ausgedehnt werden[206] (II B 1).

35. Der zweite Mittelwertsatz ist zuerst von *O. Bonnet*[207] in der Form ausgesprochen worden, dass das Integral J (**34**), falls $f(x)$ im Intervalle $a - b$ nicht zunimmt und positiv (oder Null) ist, der Bedingung

$$Af(a) \leqq J \leqq Bf(a)$$

oder auch

$$J = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

genügt, wo A und B die Extreme der *stetigen* Funktion $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ sind, blieb aber zunächst trotz der von *Bonnet* gemachten Anwen-

Kurve gleich einem Rechteck ist, das zur Höhe eine mittlere Ordinate hat; so schon bei *Newton*.

204) Eine Verallgemeinerung des Satzes bei *Dini-Lüroth*, p. 361; eine andere bei *Du Bois-Reymond*, Math. Ann. 7, p. 605 (1874).

205) *Darboux*, J. de math. (2) 3, p. 294. Über die Erweiterung der Integralsätze auf komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen siehe *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 157—169. Eine andere Erweiterung des Mittelwertsatzes rührt von *Weierstrass* her, vgl. *Ch. Hermite*, Cours d'analyse p. 47, 2. éd. (1881).

206) *Hermite*, a. a. O. p. 50.

207) *O. Bonnet*, Brux. Mém. 23, p. 8 (1849); J. de math. 14, p. 249 (1849).

dungen auf die Theorie der *Fourier*'schen Reihe[208]) unbeachtet. Von der Beschränkung, dass $f(x)$ sein Zeichen nicht ändern dürfe, befreit man ihn durch die Betrachtung, dass bei monoton *zunehmendem* $f(x)$ die *Bonnet*'sche Regel auf $f(b-0)-f(x)$, bei monoton *abnehmendem* $f(x)$ auf $f(x)-f(b-0)$ angewandt werden kann; so erhält man den von *Weierstrass* in seinen Vorlesungen unabhängig von *Bonnet* durch partielle Integration bewiesenen Satz:

$$J = f(a+0)\int_a^{\xi}\varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_{\xi}^{b}\varphi(x)\,dx.$$

Erst *P. du Bois-Reymond* hat die Bedeutung des Satzes gerade für die allgemeinen Fragen der Integralrechnung betont. Sein erster allerdings nicht übersichtlicher Beweis[209]) wurde bald durch *Hankel*[210]) mittelst des auch von *Bonnet* benutzten *Abel*'schen Hülfssatzes[211]) vereinfacht. Erst 1875 aber befreite sich *Du Bois* von der Voraussetzung[212]), dass $\varphi(x)$ nur eine endliche Anzahl von Zeichenänderungen erfahren dürfe[213]). Neuerdings hat *O. Hölder* den Satz noch einmal in möglichst präziser Form gegeben[214]).

36. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung und die Integrationsoperationen. Da für die stetige Funktion $F(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

der Differenzenquotient $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ gleich dem Mittelwert von $f(x)$ im Intervalle x, $x+\Delta x$ ist, so hat $F(x)$ überall da, wo $f(x)$ stetig ist, die Derivierte $f(x)$.[215]) Ist dagegen $f(x)$ an der Stelle x nicht stetig,

208) *Bonnet*, a. a. O. p. 13 u. 18. Bemerkungen über die Geschichte des Satzes bei *Pringsheim*, Ztschr. Math. Phys. 39, p. 66 (1894); desgl. von *A. Wangerin*, daselbst 28, h.-l. A., p. 109 (1883).

209) J. f. Math. 69, p. 81 (1869), (1868).

210) *H. Hankel*, Ztschr. Math. Phys. 14, p. 436 (1869).

211) *N. H. Abel*, J. f. Math. 1, p. 314, Satz III = oeuvr. 1, p. 222.

212) Beweise unter dieser Voraussetzung von *Hankel*, a. a. O.; *G. F. Meyer*, Math. Ann. 6, p. 315 (1872); *C. Neumann*, Kreis-, Kugel- u. Cyl.-Funkt. (Leipz. 1881) p. 28.

213) *Du Bois-Reymond*, J. f. Math. 79, p. 42 (1875); vgl. auch *J. Thomae*, Einl. p. 18 (1875). Die Voraussetzung, dass $f(x)$ monoton sei, ist dagegen eine notwendige, vgl. z. B. *L. Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 63.

214) *O. Hölder*, Gött. Anz. p. 519 (1894), anderer Beweis von *E. Netto*, Ztschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 180.

215) So bei *Moigno* nach *Cauchy*, 2^1, p. 4 (1844); *Darboux*, ann. éc. norm. (1875) p. 75.

jedoch $f(x+0)$ vorhanden, so ist die vorwärts genommene Derivierte von $F(x)$ gleich $f(x+0)$ und entsprechendes gilt eventuell für die hintere Derivierte. Umgekehrt aber ist diese Bedingung nach *Thomae*[216]) nicht notwendig für die Existenz einer (vorderen) Derivierten. Und ist $f(x)$ im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einer abzählbaren aber nicht ausgedehnten Menge von Punkten des Intervalles stetig, $F(x)$ ferner irgend eine stetige und endliche Funktion, deren vordere Derivierte überall mit $f(x)$ resp. $f(x+0)$, wo $f(x)$ oder $f(x+0)$ existiert, übereinstimmt, so ist

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

womit das unbestimmte Integral mit Hülfe des bestimmten gewonnen ist[217]). *Diesem Fundamentalsatz der Integralrechnung*, der in speziellen Fällen bereits von *Dini* ausgesprochen, dann von *Du Bois-Reymond*[218]) verallgemeinert wurde, kann man nach *Dini-Lüroth*[219]) folgende Form geben:

---

216) *J. Thomae*, Gött. Nachr. p. 696 (1893), entgegen der z. B. bei *Dini-Lüroth* (1892), p. 369 ausgesprochenen Ansicht.

217) Bei der hier massgebenden historischen Entwickelung durfte die Betrachtung der formalen Integralrechnung *vor* der Lehre vom bestimmten Integral nicht fehlen. Der gegenwärtigen Ausbildung der Theorie scheint es aber zu entsprechen, diesen Teil erst da zu behandeln, wo aus dem Begriff des „bestimmten" Integrals der des „unbestimmten" gewonnen ist, um so von vornherein den Dualismus im Integralbegriff zu vermeiden. Allerdings ist — abgesehen von sehr berechtigten didaktischen Einwendungen — hierbei zu berücksichtigen, dass der *Bernoulli*'sche Integralbegriff (*Joh. Bernoulli*, Lect. math. 1691/92; Opera 3, p. 387: Integrales, id est eae quantitates, quarum sunt differentiales) umfassender ist als der *Riemann*'sche. Diese schon von *Dini* ausgesprochene Ansicht hat *V. Volterra* durch Beispiele von Funktionen bestätigt, welche eine nicht integrable Derivierte haben, so dass für die letztere ein Integral im Sinne *Riemann*'s nicht existiert. Vgl. *V. Volterra*, Giorn. di mat. 19, p. 333 (1881) und *Dini-Lüroth*, p. 381. Vgl. auch II A 1, Fussn. 223.

218) Litt. bei *Pasch*, a. a. O. p. 152, 154. An Stelle der Gleichung:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)\,dx$$

tritt in diesem Falle die (sie umfassende) Ungleichung

$$\underline{\int_a^x} F'(x)\,dx \leqq F(x) - F(a) \leqq \overline{\int_a^x} F'(x)\,dx,$$

siehe *A. Pringsheim*, Münch. Ber. 29 (1899) p. 57; ein etwas allgemeinerer Satz dieser Art schon bei *Pasch*, a. a. O. p. 153. Vgl. auch *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 282 (1884); desgl. p. 183.

219) *Dini-Lüroth*, p. 377, 379. Vgl. *M. Pasch*, Math. Ann. 30, p. 153.

Wenn die endliche und stetige Funktion $F(x)$ so beschaffen ist, dass eine ihrer vier Derivierten endlich und integrabel ist, so sind es auch die drei anderen und das bestimmte Integral dieser vier Funktionen zwischen den Grenzen $a - x$ ist gleich $F(x) - F(a)$; zugleich mit der Umkehrung, dass die vier Derivierten der Integralfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

selbst zum Integralwerte bis auf eine Konstante wieder $F(x)$ haben.

Bei der *Substitution einer neuen Variabeln* t an Stelle von x durch eine Beziehung $x = \varphi(t)$ ist vorauszusetzen[220]), dass $\varphi(t)$ im Intervalle stetig wächst (monoton ist) und eine endliche integrabele Derivierte besitzt; dann gilt die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Am eingreifendsten äussert sich der *Riemann*'sche Integralbegriff bei der *partiellen Integration*. Indem *Du Bois-Reymond*[221]) die *Leibniz*'sche Formel

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du,$$

welche bei u und v eine Derivierte voraussetzt, in die Gestalt

$$\int_a^b f(x)\Big[\int_c^x \varphi(x)\,dx\Big]dx = \int_c^b \varphi(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\Big[\int_a^x f(x)\,dx\Big]dx$$

brachte, entsteht ein ganz allgemeines Integrationstheorem, bei dem $\varphi(x)$ und $f(x)$ nur als integrabele Funktionen vorausgesetzt zu werden brauchen[222]); der Beweis kann auch hier durch die Methode der partiellen Summation geführt werden[223]).

Die Frage nach der *Differentiation eines Integrals* (resp. der Integration desselben) *nach einem Parameter* kann man unter den allgemeinen Gesichtspunkt bringen[224]), wann

220) Vgl. z. B. *J. Tannery*, Introduction p. 328; *Dini-Lüroth*, p. 497. *C. Jordan* dehnt diese Regel noch auf das obere und untere Integral aus, Cours 1, p. 35.

221) *P. du Bois-Reymond*, Münch. Abh. 12, p. 129 (1876).

222) Auch dies ist nicht notwendig, wenn man das obere und untere Integral unterscheidet.

223) *J. Thomae*, Ztschr. Math. Phys. 20, p. 475—478 (1875).

224) Vgl. *Dini-Lüroth*, p. 530; desgl. *E. Hossenfelder*, Programm Strasburg i. Westpr. Nr. 41 (1891).

$$\lim_{y=\alpha\pm 0}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)=\int_a^b \lim_{y=\alpha\pm 0} f(x,y)\,dx$$

gesetzt werden darf. Hierbei kommt, wenn es sich um hinreichende Kriterien handelt, der Begriff der gleichmässigen Konvergenz gegen die Grenzfunktion in Betracht (II A 1, **16**). Bei der Bildung der Derivierten nach einem Parameter y hat man schon längst bemerkt, dass die *Leibniz*'sche Regel[225]) häufig versagt, weil z. B. die Derivierte nicht mehr integrabel ist[226]). Setzt man in

$$\frac{\Delta J}{\Delta y}=\int_a^x \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\,dx}{\Delta y},$$

$$f(x,y)+\Delta y-f(x,y)=\Delta y\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\Delta y\cdot M,$$

so wird es sich darum handeln, wann bei integrabelem $\frac{\partial f}{\partial y}$ das Integral

$$\int_a^x M\,dx$$

kleiner als ε genannt werden kann für alle $\Delta y<\eta$. Sicher ist diese Forderung erfüllt, wenn der Differentialquotient eine stetige Funktion von x, y in den bezüglichen Intervallen ist[227]). Diese sehr eng gefasste Bedingung kann dahin erweitert werden, dass der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta y}$ im allgemeinen (d. h. mit Ausschluss einer Menge *vom Inhalt* 0 (vgl. I A 5 u. II A 1) gleichmässig gegen den integrabelen Differentialquotienten konvergieren muss.

37. Uneigentliche Integrale. Lässt man die Voraussetzung der Endlichkeit von $f(x)$ oder des Intervalles (ab) fallen, so verliert der *Riemann*'sche Integralbegriff seine Bedeutung[228]). Wächst $f(x)$ für $x=b$ über alle Grenzen, so setzt man[229])

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

225) *Leibniz*, Commercium epistolicum Leibnitii et Joa. Bernoulli 1684—1699 (Lausanne 1745) 1, epistola 59.

226) In Vorlesungen wohl zuerst von *Dirichlet* hervorgehoben, vgl. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis wirkenden Kräfte [1856/57], herausgegeben von *F. Grube*, Leipzig 1876, p. 9.

227) *J. Thomae*, Einl. p. 20—22. Daselbst auch ein Beispiel, wo der Satz unrichtig wird, obwohl die Derivierte integrabel ist.

228) *Riemann*, a. a. O. p. 226.

229) So bei *Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 19, p. 572 (1823); aber schon 1814 treten bei *Cauchy* die singulären Integrale auf (vgl. ib. p. 572).

falls die rechte Seite eine bestimmte Bedeutung hat, und analog falls $f(x)$ für $x = c$ unendlich wird,

$$\int_a^b = \lim \int_a^{c-\varepsilon} + \lim \int_{c+\eta}^b;$$

ebenso verfährt man, wenn das Intervall unendlich wird. Alle diese durch einen *neuen Grenzprozess* definierten Integrale heissen *uneigentliche Integrale*, Intégrales définies généralisées bei *C. Jordan*, Integrali improprii. Vgl. im übrigen II A 3, 2.

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

38. Das n-fache Integral. Die Aufgabe, zu der Funktion $f(xy)$ die primitive Funktion zu suchen, kann analog wie bei *einer* Variabeln durch das Symbol

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

bezeichnet werden; sie führt naturgemäss auf einen wiederholten Integrationsprozess, und bot keine besonderen Schwierigkeiten dar, wenn auch das Verhältnis, in dem diese Auffassung zu der Volumbestimmung steht, nicht immer ganz klar erschien[230]). *Riemann* selbst hat in seiner Habilitationsschrift den Begriff des mehrfachen Integrals nicht berührt; die *Cauchy*'sche rein arithmetische Definition lässt sich aber auch hier zu Grunde legen und in *Riemann*'s Sinne verallgemeinern. Doch ist auch heute noch die Theorie der mehrfachen Integrale nicht allgemein zu solcher Durchführung gediehen[231]). Der Grund hierfür liegt, abgesehen von dem erforderlichen mehrfachen Grenzübergange, mit darin, dass hier die — allerdings auch schon bei einer Variabeln notwendige — genaue Definition des *Bereiches* erforderlich wird, über welchen der Prozess der *bestimmten* Integration

$$\int^n f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \lim \sum^n f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1,\ x_2 + \theta_2 \Delta x_2,\ \ldots\ x_n + \theta_n \Delta x_n) \Delta x_1 \ldots \Delta x_n$$

sich zu erstrecken hat[232]). Es sind hiermit die allgemeinen Unter-

230) Vgl. die Bemerkungen von *Du Bois-Reymond*, J. f. Math. 94, p. 275 (1883); neuerdings bei *Ch. Méray*, Par. C. R. 128 (1899), p. 913 eine neue Auffassung des Doppel- (mehrfachen) Integrals.

231) Diese Äusserung von *Du Bois* (ebenda, insbesondere mit Rücksicht auf die uneigentlichen Integrale) scheint auch heute noch nicht uuzutreffend.

232) Die Bezeichnungsweise $\int^n f dx_1 \ldots dx_n$ an Stelle von $\int \ldots \int f dx_1 \ldots dx_n$ bei *F. Lacroix*, traité 3, p. 397.

suchungen über die Theorie der n-fachen Mannigfaltigkeit bezeichnet, wie sie bereits *K. Weierstrass* in seinen Vorlesungen in den sechziger Jahren behandelte, die aber erst durch *G. Cantor* in seinen Arbeiten über unendliche Punktmannigfaltigkeiten (I A 5; II A 1, **21**) zu voller Schärfe ausgearbeitet sind. Dabei wird man, insbesondere in Rücksicht auf die Anwendungen, an einer der Geometrie entlehnten Ausdrucksweise festhalten, wie dies neuerdings in systematischer Weise von *C. Jordan* geschehen ist. Was man dabei als Entfernung zweier Punkte x_i, y_i bezeichnet, ist an und für sich gleichgültig. Man kann darunter $|\sum(x_i - y_i)^2|^{\frac{1}{2}}$ verstehen; einfacher erscheint aber der von *Jordan* eingeführte Begriff des *écart* $\sum|x_i - y_i|$.[233]) Wird so das Integrationsgebiet hinsichtlich seiner Begrenzung, seiner innern und äusseren Ausdehnung[234]), seiner Messbarkeit (Quadrierbarkeit, Integrabilität) definiert, und der Integrationsprozess zunächst auf quadrierbare Gebiete eingeschränkt, so ergiebt sich die Möglichkeit, ein beliebiges Gebiet E in *Elementargebiete* Δe zu zerlegen und den Beweis zu führen, dass die Bedingung für die Existenz des Integrals wieder die *Riemann*'sche wird, so dass auch hier notwendig und hinreichend ist, dass die Summe der Elemente, in denen die Schwankungen der Funktion grösser als σ sind, durch Verkleinerung der Elemente kleiner gemacht werden kann, als eine noch so kleine Zahl[235]). Dabei gilt wieder der erste Mittelwertsatz[236]).

39. Ermittelung desselben durch successive Integration. Insbesondere für das eigentliche Doppelintegral hat schon *Du Bois-Reymond* die wesentlichsten Gesichtspunkte skizziert. Während der Hauptsatz, dass ein solches durch zwei einfache, in der Reihenfolge vertauschbare Integrationen nach x und y gefunden werden kann, bei ihm auf einer allgemeinen Grenzwertformel beruht, suchte *Harnack*[237]) durch direkte Summationsbetrachtung diesen Satz zu begründen[238]). Dabei findet aber die begriffliche Schwierigkeit statt, dass

233) *Jordan*, Cours 1, p. 18. Vgl. II A 1, **21** u. Fussn. 233.

234) *O. Stolz*, Math. Ann. 23, 1884, p. 152; Wien. Ber. 106^{2a}, 1897, p. 461. *Jordan*, Cours 1, p. 28 (étendue extérieure et intérieure d'une domaine); champ mésurable p. 78; vgl. die Bemerkungen bei *Harnack-Serret*, 2^1, p. 221, 267.

235) *Thomae*, Einl. p. 33 für das Doppelintegral; desgl. *O. Stolz*, Math. Ann. 26, p. 90 (1884).

236) *Thomae*, Einl. p. 34.

237) *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 94, p. 277—279. *Harnack-Serret*, 2^1, p. 284, Vervollständigung beider Beweismethod. bei *Pringsheim*, Münch. Ber. 28, p. 69 (1898).

238) Aus der Beziehung $\int dx \int f.dy = \int dy \int f.dx$ darf, auch wenn durch-

die *Existenz* des *Riemann*'schen einfachen Integrals nach einer der Variablen unbekannt ist, so dass die bei *Harnack* gegebene Darstellung als definierter Integrationsprozess gar nicht *ausführbar* ist. Daher bewies *Stolz*[239]) zunächst den folgenden spezielleren Satz: Wenn für das Integral $J = \int f(x,y)\,dx\,dy$ bezogen auf eine „konvexe" Fläche mit den extremen Abscissen (und Ordinaten) a, a'; (b, b') $f(x, y)$ als Funktion von x auf jeder zur x-Axe parallelen Sehne im allgemeinen integrierbar ist, so ist die auf solche Art erhaltene Funktion

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$$

im Intervalle (b, b') nach y integrierbar und liefert den Wert J.

In voller Allgemeinheit aber hat erst *C. Jordan*[240]) durch Unterscheidung des *Darboux*'schen oberen und unteren Integrals die begriffliche Reduktion des n-fachen Integrals auf n successive Integrationen nachgewiesen und insbesondere für das Doppelintegral völlig ausgeführt, während wieder sein spezielles Theorem über die Ausführung[241]) des Integrationsprozesses die *Stolz*'sche Bedingung unnötig einengt. Dem gegenwärtigen Standpunkt der Theorie scheint es zu entsprechen, wenn unter Voraussetzung der Existenz des Doppelintegrals im Sinne *Riemann*'s, und unter Anwendung der Nr. **32** erwähnten Bezeichnung das Theorem (der Einfachheit halber für ein Rechteck $x_0, x;\ y_0, y$) so gefasst wird, dass *stets*

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f\cdot dx\,dy = \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} f\cdot dx = \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} f\cdot dx$$

$$= \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} f\cdot dy = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} f\cdot dy$$

gesetzt werden kann[241a]).

---

weg $f \geqq 0$ nicht auf die Existenz von $\int\int f\,.\,dx\,dy$ geschlossen werden: *Pringsheim*, Münch. Ber. 29, p. 47 (1899). Bedingung für die Existenz jener Beziehung *ohne* vorausges. Existenz von $\int\int f\,.\,dx\,dy$ bei *C. Arzelà*, Bologna Mem. (5), 2, p. 143 (1892). Erstes Beispiel, bei dem *trotz* $f \geqq 0$ *nur* $\int dx \int f\,.\,dy$ existiert, dagegen *nicht* $\int dy \int f\,.\,dx$, $\int\int f\,.\,dx\,dy$, bei *Thomae*, Ztschr. Math. Phys. 23, p. 67 (1878), allgemeiner bei *Pringsheim*, a. a. O. p. 52.

239) *O. Stolz*, Math. Ann. 26, p. 93 (1884).

240) *C. Jordan*, J. de math. (4) 8, p. 69 (1892); Cours 1, p. 42—45, unabhäng. v. *Jordan* auch bei *Arzelà*, a. a. O. p. 136.

241) Ebenda 1, p. 45.

241a) *Pringsheim*, Münch. Ber. 28, p. 69, (1898). Erstes Beispiel, wo der

Das Integral mit rechteckigem Gebiet

$$J = \int_a^x \int_b^y f\,dx\,dy$$

insbesondere ist eine stetige Funktion der beiden Variabeln, welche partielle Derivierte nach x und y und ein totales Differential besitzt, und es ist auch der Satz

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 J}{\partial y\,\partial x} = f$$

gültig, falls in der Umgebung von x, y f eine stetige Funktion der beiden Variabeln x, y ist[242]).

40. Integrale geometrischer und mechanischer Grössen. Der *Inhalt* eines ebenen Flächenstückes, das durch die Gleichungen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

einer einfachen Mannigfaltigkeit mit der x-Axe bestimmt ist, erhält nun durch diese Betrachtungen seine vollständige *Definition*, ebenso das Volumen eines Körpers. Nicht so unmittelbar ist das der Fall bei der Bogenlänge einer Kurve und der Oberfläche eines körperlichen Raumes. *L. Scheeffer*[243]) hat zuerst ausreichende Kriterien angegeben, unter denen die „Länge" eines Kurvenbogens sich definieren lässt; dieselben sind neuerdings von *C. Jordan*[244]) wiedergefunden und von *E. Study*[245]) verschärft und erweitert worden. Dass die ältere Darstellung des Inhaltsbegriffes einer krummen Fläche Modifikationen erfordert, hat zuerst *H. A. Schwarz* betont[246]); eine auf rein arithmetischen Grundlagen beruhende Entwickelung des zweidimensionalen Kontinuums im Raume ist wohl zuerst von *O. Hölder*[247]) ausgeführt, dessen Arbeit *C. Jordan* unbekannt geblieben zu sein scheint. Die in der *Mechanik*

Satz in dieser Form noch gilt, obschon $\int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dy$ für unendlich viele pantachische x nicht existiert: *Du Bois-Reymond*, a. a. O. p. 278; allgem. *Pringsheim*, Münch. Ber. 29, p. 42, (1899).

242) *Harnack*, Elemente p. 317, wo der Satz noch etwas allgemeiner gefasst ist.

243) *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 49 (1885).

244) *C. Jordan*, Cours 1, p. 90—108.

245) *E. Study*, Math. Ann. 47, p. 313 (1896).

246) *H. A. Schwarz*, J. de math. (3) 6, p. 111 (1880), Gesamm. Abh. 2, p. 292; auch bei *Hermite*, Cours d'analyse, éd. 2, p. 35 (1881).

247) *O. Hölder*, Diss. Tüb. (Stuttgart 1882), p. 20ff., insbesondere p. 31; *Jordan*, Cours 1, préface p. VI und p. 146—150; vgl. auch *Harnack-Serret*, 2^1, p. 294—301.

üblichen Definitionen der Masse, Dichtigkeit und der aus diesen abgeleiteten Begriffe haben ihre genauere Fassung durch *Cauchy* erhalten[248]); aber auch diese werden den schärferen Bestimmungen der Gegenwart sich nicht mehr entziehen können, insbesondere in Rücksicht auf Stetigkeit und Differentiierbarkeit[249]).

41. Transformation der mehrfachen Integrale. Die *formalen Prozesse*, welche erforderlich sind, um ein n-faches Integral

$$\int^{n} f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

unter der Voraussetzung, dass das Integrationsgebiet etwa auf das durch

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) \gtrless 0$$

abgegrenzte Gebiet zu erstrecken ist, zu berechnen, sind allgemein wohl zuerst von *Ostrogradsky*[250]) dargestellt worden. Fast immer führt aber dieser primitive Weg wegen der Ermittelung der successiv einzuführenden Integrationsgrenzen zu Weitläufigkeiten, die man durch eine *zweckmässige Gebietseinteilung*, d. h. durch eine *Transformation* zu vermeiden sucht.

Die *Transformation des Doppelintegrales* hat zuerst *Euler*[251]), die des *dreifachen Lagrange*[252]) behandelt, der bereits die ausgeführten Formeln für Polar- und allgemeine krummlinige Koordinaten angiebt. Aber erst *Jacobi*[253]) gab die allgemeine Transformation des n-fachen Integrals unter der Voraussetzung, dass an Stelle der unabhängigen Variabeln x_i eben soviele neue y_i treten, die mit ihnen durch die Beziehungen

$$y_i = \varphi_i(x_1 \ldots x_n), \quad x_i = \psi_i(y_1 \ldots y_n)$$

so verbunden sind, dass zu jedem $x_1 \ldots x_n$ eindeutig definierte Werte der y_i und umgekehrt gehören; so wird

$$\int^{n} f \cdot dx_1 \ldots dx_n = \int^{n} f(\psi_1 \ldots \psi_n) \Delta\, dy_1 \ldots dy_n,$$

248) *Moigno*, Leçons de mécanique analytique 1 (statique), p. 140. Das von *Lagrange* (oeuvr. 11, p. 85) für solche mehrfache Integrale benutzte Zeichen S ist neuerdings von *C. Jordan* wieder zu allgemeinem Gebrauche eingeführt worden (Cours 1, p. 37).

249) Vgl. z. B. *L. Boltzmann*, Vorl. üb. d. Prinzipe d. Mechanik 1, p. 26 (1896).

250) *M. Ostrogradsky*, J. f. Math. 14, p. 332 (1836).

251) *L. Euler*, *Petr. N. Comm. 14, 1759 [70], p. 72; Inst. calc. int. 4, p. 416.

252) *Lagrange*, Berl. nouv. mém. 1773, p. 125 = oeuvr. 3, p. 624; auch *Laplace*, mécanique céleste 2, p. 3.

253) *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1833) = Werke 3, p. 233; J. f. Math. 22 (1841) = Werke 3, p. 436.

wo Δ die *Jacobi*'sche Determinante

$$\Delta = \frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(y_1 \dots y_n)}$$

nach *Donkin*'s[254]) Bezeichnung ist (I A 2). Da hierbei das Produkt $dx_1 \dots dx_n$ durch $\Delta dy_1 \dots dy_n$ zu ersetzen ist, wird man, wenn (wie gewöhnlich) die Integrationen durch *positive* Inkremente vollzogen werden, voraussetzen, dass rechterhand der *absolute* Wert von Δ benutzt wird, der überdies an keiner Stelle des Gebietes *Null* sein darf. Diese bereits von *Euler*[255]) gemachte, von *Jacobi* nicht ausdrücklich wiederholte Bemerkung hat neuerdings *Kronecker*[256]) wieder hervorgehoben. Zugleich hat man die *Jacobi*'sche, auf dem Zusammenhang korrespondierender Differentiale beruhende Ableitung durch andere Betrachtungen ersetzt, wobei für zwei Variable insbesondere der *Green*'sche Satz zur Anwendung kommt[257]). Hierbei wird man im allgemeinen die Transformation so zu wählen haben, dass die Bestimmung der Integrationsgrenzen für die einzelnen Variabeln übersichtlich wird. Von diesem Gesichtspunkt aus gewinnen die *Einteilungen mehrdimensionaler Gebilde durch krummlinige Koordinaten* Bedeutung; namentlich das von *Jacobi* erfolgreich verwandte System der *elliptischen Koordinaten*[258]). Andererseits sind hier zu erwähnen die besonderen Transformationen, welche zur Ermittelung der Oberfläche des Ellipsoids und verwandter Aufgaben von *Catalan, Schlömilch* und anderen benutzt sind[259]).

42. Der Diskontinuitätsfaktor von Dirichlet. Auf einem anderen Wege suchte *P. L. Dirichlet*[260]) die Schwierigkeiten zu beseitigen,

254) *W. F. Donkin,* Lond. Trans. (1854) 144, p. 72.

255) *Euler,* Inst. calc. int. 4, p. 433 (*Salomon* 4, p. 409).

256) *Kronecker,* Vorlesungen 1, p. 235; vgl. auch dessen Bemerkungen J. f. Math. 72, p. 155 (1869); *É. Picard,* traité 1, p. 131.

257) *J. A. Gmeiner,* Monh. 4, p. 217 (1893); desgl. die interessante, auch der Erweiterung fähige Darstellung von *E. Goursat* (Bull. Darb. (2) 18, p. 72 [1894]). Vgl. auch *C. Jordan* (J. de math. (4) 8, p. 94 [1892] und Cours 1, p. 138—146), sowie die Ableitung bei *J. Bertrand,* Calcul intégral p. 225.

258) *J. Haedenkamp,* J. f. Math. 22, p. 184 (1841); *Jacobi,* Vorles. über Dynamik 1842/43 = Werke, Supplementbd., p. 198 ff.

259) Vgl. die Arbeiten von *E. Catalan,* J. de math. (1) 4, p. 323; *R. Lobatto,* ib. (1) 5, p. 115; *O. Schlömilch,* Ztschr. Math. Phys. 1, p. 376; 6, p. 207, sowie die Darstellung bei *G. F. Meyer,* Vorl. üb. best. Integrale, p. 437—549 (1871); *Moigno,* Calcul intégral 2^1, p. 228—256; *L. Natani,* Höhere Analysis, p. 137 ff.

260) *P. L. Dirichlet,* Berl. Ber. (1834) = Werke 1, p. 383; auch J. de math. (1) 4, p. 164 (1839).

welche die Begrenzung des Gebietes hervorruft. Handelt es sich z. B. um das Integral

$$\int^{3} \varphi \cdot f \cdot dx\,dy\,dz,$$

ausgedehnt über das Innere S der etwa ganz im Endlichen liegenden geschlossenen Fläche F, so kann man an Stelle von F jede andere S völlig umschliessende Begrenzung Σ wählen, falls man an Stelle von φ eine Funktion Φ substituiert, die im Innern von S mit φ übereinstimmt, in dem Gebiet zwischen S und Σ aber gleich Null ist. Eine solche Funktion heisst nach *Dirichlet* ein *Diskontinuitätsfaktor*[261]). Dabei wird man z. B. Σ als eine Kugel ansehen können; in den meisten Fällen wird es sich aber empfehlen, Σ ins unendliche auszudehnen; allerdings werden dabei die Integrale uneigentliche, und die Berechtigung der weiteren Operationen ist jedesmal besonders zu rechtfertigen. Solche Diskontinuitätsfaktoren liefert der *Cauchy*'sche Fundamentalsatz der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln[262]), die Theorie der *Fourier*'schen Integrale (II A 8), die Potentialtheorie[263]) etc. *Dirichlet* selbst[264]) hat zunächst den Faktor

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos(g\varphi)\,d\varphi = \begin{cases} 1\,; & 0 < g < 1, \\ \frac{1}{2}, & g = 1, \\ 0\,, & 1 < g, \end{cases}$$

d. h. den reellen Teil von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, e^{ig\varphi}\,d\varphi$$

angewandt, so in der Abhandlung über die Attraktion des Ellipsoids, wo das über alle positiven Koordinatenwerte

$$g = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$$

erstreckte Potential

$$-\frac{1}{p-1}\int \frac{dx\,dy\,dz}{\varrho^{p-1}}$$

in die Form

$$-\frac{2}{\pi(p-1)}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(g\varphi)\,\frac{dx\,dy\,dz}{\varrho^{p-1}}$$

---

261) Oder diskontinuierlicher Faktor, Werke 1, p. 400, 384.
262) Vgl. z. B. *Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 175.
263) Ebenda in ganz allgemeiner Form, p. 271.
264) *Dirichlet*, a. a. O.

verwandelt wird, dessen Behandlung freilich noch einen gleich zu besprechenden Kunstgriff erfordert, durch den die Entfernungspotenz $\varrho^{-(p-1)}$ in das Integral einer Exponentialfunktion verwandelt wird; desgleichen bei dem *Dirichlet*'schen[265]) durch Γ-Funktionen ausdrückbaren Integral. Zur Bestimmung des Potentials zweier Ellipsoide gebrauchte *Mertens*[266]) den schon von *Dirichlet*[267]) angegebenen Faktor

$$\frac{\Gamma(m)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,\frac{e^{(k+i\lambda)x}}{(k+i\lambda)^m} = \begin{cases} 0, & x<0,\\ x^{m-1}, & x>0, \end{cases}$$

wo k und m positiv sind. Den Fall $m=1$ hat *Kronecker*[268]) in seinen Vorlesungen in einer Reihe von Anwendungen behandelt. In naher Beziehung zu dem *Dirichlet*'schen Verfahren steht übrigens die *Cauchy* von *Moigno*[269]) zugeschriebene Methode, bei welcher in dem Integrale

$$J = \int^{n} \frac{P}{\mu Q}\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

wenn der reelle Teil von μ positiv ist und Q sein Zeichen nicht wechselt, für $Q>0$

$$\frac{1}{\mu Q} = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{0}^{\infty} t^{\mu-1}e^{-Qt}\,dt$$

gesetzt wird, was zum Ziele führt, wenn P ein Produkt, Q eine Summe von Funktionen je *einer* der Variabeln $x, y\ldots$ ist, dagegen die Bestimmung der Integrationsgrenzen (im allgemeinen) nicht vereinfacht und daher auch fast immer nur bei konstanten (ins unendliche ausgedehnten) Grenzen Verwendung findet.

III. Anwendungen.

43. Integration totaler Differentiale. Die *notwendige* Bedingung, damit

$$P\,dx + Q\,dy$$

265) *Dirichlet*, a. a. O. p. 389. Dies Integral ist alsbald von *J. Liouville* (J. de math. (1) 4, p. 225) direkt ermittelt, ja noch verallgemeinert; vgl. *O. Schlömilch*, Ztschr. Math. Phys. 1, p. 75; Lpz. Ber. 1857, p. 22; *R. Most* (Ztschr. Math. Phys. 14, p. 422); man vgl. auch *Liouville*'s Arbeiten J. de math. (2) 1, p. 82, 289 (1856), sowie *G. F. Meyer*, p. 564—628.

266) *F. Mertens*, J. f. Math. 63, p. 360 (1864).

267) *Dirichlet*, a. a. O. p. 401. In etwas anderer Form tritt dieser Faktor bei *F. G. Mehler* (J. f. Math. 40, p. 321 [1862]) auf.

268) *Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 215—228.

269) *Moigno*, Calcul intégral 2, p. 256 (1844); übrigens schon bei *Dirichlet*, a. a. O. p. 386.

ein totales Differential dz sei, ist nach dem Fundamentalsatze der zweiten Derivierten (**10**)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dass sie auch *hinreichend* ist, damit die Integralfunktion z existiere, war schon *Euler*[270]) bekannt, der

$$z = \int P dx + \psi$$

setzt, wenn ψ aus der Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx$$

genommen wird, welche einen von x unabhängigen Wert für $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ liefert.

Und ebenso ist der Differentialausdruck

$$\sum X_i dx_i$$

ein exaktes Differential, wenn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

bestehen. Jedoch zeigte *Jacobi*[271]) mit Hülfe seiner Identität, dass diese Bedingungen auf $2n - 1$ andere reduziert werden können. Da die Ermittelung der Integralfunktion auf dem *Euler*'schen Wege umständlich wird, verlangt *Cauchy*[272]) die Bestimmung derjenigen Funktion z, welche sich für $x_i = x_i^0$ auf eine Konstante z^0 reduziert, und gab die Lösung in der Form

$$z = z_0 + \int_{x_1^0}^{x} X_1^{(0)} dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} X_2^{(1)} dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} X_3^{(2)} dx_3 + \cdots,$$

wobei in $X_k^{(k-1)}$ jedesmal $x_1, x_2 \ldots x_{k-1}$ durch $x_1^0 \ldots x_{k-1}^0$ zu ersetzen sind.

Durch die auf der Anwendung des *Green*'schen Satzes beruhende Betrachtung bei *Lipschitz*[273]) hat *Morera*[274]) dem *Cauchy*'schen Satze eine andere Fassung gegeben, indem er, falls die X_i eindeutige end-

270) *Euler*, Inst. calc. int. 3, p. 517 (Petersb. 1770).

271) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 23 (1842) = Werke 4, p. 250.

272) *Moigno*, 2^1, p. 489.

273) Analysis 2, p. 569.

274) *G. Morera*, Math. Ann. 27, p. 403 (1886). Über die Übertragung der Differential- und Integraloperationen auf das komplexe Gebiet vgl. man die (erste) systematische Darstellung bei *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 1—208.

liche und stetige Funktionen mit integrabelen Derivierten in einem gewissen *Monodromiegebiete* G sind, nachweist, dass

$$\int \sum X dx$$

vom Integrationswege den obigen Bedingungen zufolge unabhängig wird, sobald derselbe ganz innerhalb G verläuft. Man kann daher $x_i = x_i^0 + (x_i - x_i^0)t$ setzen und einfach das Integral der Funktion *einer* Variabeln t suchen.

44. Integrabilität der Differentialausdrücke. Eine weitere Fortbildung erhalten die formalen Integrationsprozesse durch die Betrachtung von Differentialfunktionen mit höheren Derivierten. Schon *Euler*[275]) hatte mit Hülfe der Variationsrechnung gefunden, dass die notwendige und hinreichende Bedingung, damit

$$f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})$$

ein vollständiges Differential nach x ist, durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \cdots = 0$$

ausgedrückt wird. *Lagrange*'s Bemerkung[276]), dass f notwendig von der Form

$$P + Qy^{(n)}$$

sein müsse, führte zu dem weiteren Satze, dass die *Euler*'sche Bedingung n einzelnen Bedingungen äquivalent ist. Erst *Joachimsthal*[277]) aber gab den Beweis für diese Behauptung und fügte hinzu, dass diese Bedingungen sich auf $\frac{1}{2}(n+1)$ resp. $\frac{n}{2}+1$ reduzieren, jenachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Es bestehen keine Hindernisse, die von *Euler* sofort auf den Fall, wo f mehrere von x abhängige Funktionen $y, z, u \ldots$ und deren Derivierte enthält, verallgemeinerten Untersuchungen, bei denen an Stelle der einen Gleichung dann ebenso viele entsprechende für $y, z, u \ldots$ treten, auf Funktionen mit zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen auszudehnen.

---

275) *Euler,* Petrop. N. Comm. 15, p. 35. Bereits von *Lexell, Condorcet* direkt bewiesen. Andere Beweise bei *Lagrange*, oeuvr. 10, p. 365, *J. Bertrand,* J. de math. 14, p. 123 (1848); noch allgemeiner daselbst von *F. Sarrus*, p. 131. Über *Sarrus* Arbeiten vgl. Gerg. Ann. 14, p. 179 (1823); Par. C. R. 1, p. 115 (1835); 28, p. 439 (1849).

276) Leçons sur le calcul des fonctions, p. 421 = oeuvr. 10, p. 374.

277) *F. Joachimsthal,* J. f. Math. 33, p. 95 (1848); Programm von 1844. Zu demselben Resultat gelangte gleichzeitig *J. L. Raabe,* J. f. Math. 31, p. 195, 212 (1846).

45. Der Satz von Green in der Ebene. Als *Green*'sche Sätze bezeichnen manche[278]) gegenwärtig alle diejenigen Theoreme, durch welche über ein *Gebiet* E erstreckte Integrale in solche transformiert werden, die sich auf die *Begrenzung* von E beziehen. Betrachtet man erstens das Integral

$$J = \int\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

ausgedehnt über ein zunächst einfach zusammenhängendes ebenes Flächenstück (III A 4) E, dessen Randelemente durch die Charakteristik D bezeichnet werden, unter der Voraussetzung, dass jeder der beiden Differentialquotienten eine in E integrabele Funktion ist[278a]) und P und Q stetig sind, so erhält man durch partielle Integration

$$J = -\int (P\,D(x) + Q\,D(y))$$

bei *positiver* Umlaufung von E.[279]) Diese Gleichung spricht den *Green*'schen Satz für jede (allerdings erst auf die Form $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ zu bringende) Funktion f aus. Besteht daher im ganzen Innern — etwa mit Ausnahme von Punkten mit der Flächengrenze Null[279a]) — die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

so ist das Integral

$$W = \int P\,D(x) + Q\,D(y) = 0.$$

Dieses Theorem, den *Cauchy*'schen *Integralsatz*[280]) kann man auch dahin auffassen, dass das Kurvenintegral[280a]) W, genommen zwischen irgend zwei in E liegenden Punkten A und B, *unabhängig* von dem *Integrationswege* wird; es erhält bei festem A einen nur von B ab-

---

278) *A. Harnack,* Elemente p. 327; *E. Pascal,* Calcolo' integrale p. 156. Als Prinzip indess so *nicht* bei *G. Green* (1828), dort nur der Satz Nr. 47 des Textes (J. f. Math. 44, p. 360).

278a) Nach *Pringsheim*, Münch. Ber. 29, p. 55 (1899) genügt schon die Existenz der *Doppel*integrale $\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, $\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$; eine Voraussetzung über $\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$, $\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx$ ist dann unnötig.

279) *B. Riemann,* Werke p. 14 (1851).

279a) Genauere Untersuchung bei *Pringsheim,* Münch. Ber. 25, p. 59 (1895).

280) Par. C. R. 23, p. 251 (1846).

280a) Der Begriff des Kurvenintegrals ist wohl erst durch die Betrachtung der komplexen Ebene entstanden, seine ausführliche Definition z. B. bei *É. Picard,* traité 1, p. 70. Vgl. auch *Pringsheim,* Münch. Ber. 25, p. 48 (1895).

hängigen Wert und stellt, abgesehen von den oben ausgeschlossenen Stellen, eine Funktion der oberen Grenze vor, deren partielle Derivierte P und Q sind[281]), womit man auf die Integration der totalen Differentiale zurückgeführt wird. Dass auch umgekehrt nur dann, wenn die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ erfüllt ist, W unabhängig vom Wege wird, hat *Picard* durch Variation von W, *Pringsheim* auf elementarere Weise gezeigt[282]).

46. Der Satz von Stokes. Eine ähnliche Betrachtung bezieht sich auf das über den zunächst einfach zusammenhängenden Raum R erstreckte Integral

$$J = \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

welches unter der Voraussetzung, dass die äussere Normale der Oberflächenelemente der Begrenzung $d\omega$ mit den Axen der Koordinaten die Cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bildet, in die Gestalt des über die Begrenzungsfläche erstreckten Integrales

$$J = \int (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,d\omega = W$$

gebracht wird[283]). Ist also im ganzen Innern von R

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

so ist W stets gleich Null. Setzt man zur Erfüllung der letzten Gleichung

$$X = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

so wird das so erhaltene Integral V, erstreckt über ein Flächenstück E im Innern von R, dessen Begrenzung L ist, nur abhängig sein von der Natur der Kurve L.[284]) Den Beweis hierfür hat zuerst *Stokes*[285]) gegeben, welcher zeigte, dass in der That die Gleichung

$$V = -\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

---

281) Vgl. *J. Thomae*, Einl. p. 41; auch bei *Picard*, traité p. 81, *Pringsheim*, a. a. O. p. 63.

282) *É. Picard*, traité 1, p. 75; *Pringsheim*, a. a. O. p. 60.

283) Eine bloss formale Verallgemeinerung erhält man, wenn statt X, Y, Z die mit σ multiplizierten analogen Werte X', Y', Z' eingesetzt werden.

284) Die Umkehrung auch hier bei *É. Picard*, traité 1, p. 115.

285) *G. Stokes*, *A Smiths prize paper, Cambridge university calendar (1854); vgl. *Thomson* u. *Tait*, treatise on natural philosophy 1, p. 143, ed. 2 (1879).

besteht, wobei das Integral jetzt in bestimmtem Sinne[286]) über L zu erstrecken ist. Seine hydrodynamische Deutung als displacement function[287]), circulation und surface integral of rotation[288]) kann hier nur erwähnt werden. Die formale Verallgemeinerung auf krummlinige Koordinaten allgemeinster Art hat *Picard* durchgeführt[289]); ähnliche Betrachtungen finden sich neuerdings bei vielen anderen Autoren[290]).

47. Der Satz von Green und seine Anwendungen. Aus der Gleichung $J = W$ entspringt nun endlich (über die analoge Betrachtung in Bezug auf die Gleichung

$$\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = -\int P dx + Q dy$$

(vgl. II B 1) durch die Annahme

$$X = U\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = U\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = U\frac{\partial V}{\partial z}$$

der spezielle *Green*'sche Satz im Raume; nämlich

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz + \int U\Delta(V)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int U\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma\right] d\omega,$$

welcher unter der Voraussetzung stetiger erster Derivierten und eines endlichen integrabelen $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ jedenfalls gültig, anderenfalls aber weiter zu untersuchen ist. Durch Vertauschung von U mit V und unter Benutzung der gebräuchlichen Abkürzungen folgt dann auch das Theorem[291])

286) Z. B. *Picard,* traité p. 118; desgl. *G. Königs,* J. de math. (4) 5, p. 324 (1889). Der bei *H. Hankel* (Preisschrift, Gött. 1861) gegebene Beweis ist wohl auf *Riemann*'s Vorlesungen zurückzuführen (*Riemann,* Vorlesungen über Schwere etc., 1861, herausg. v. *K. Hattendorff,* 2. Ausg. p. 252 [Hann. 1880]); ein anderer Beweis bei *J. C. Maxwell,* treatise on electricity etc. 1, p. 26 (1873).

287) *Thomson* u. *Tait,* treatise 1, p. 144.

288) *W. Thomson,* on Vortex motion, Edinb. Trans. 25, p. 217—260 (1869); vgl. auch *W. K. Clifford,* Elements of dynamics, London 1878, p. 197.

289) *É. Picard,* traité 1, p. 115 und J. de math. (4) 5 (1889), p. 145; bei diesen Untersuchungen handelt es sich um exakte Differentiale auf einer krummen Fläche im Sinne der Funktionentheorie.

290) S. z. B. **A. Maggi*, Atti dell' Accademia di Catania (4) 4, 1892; **Ph. Gilbert,* Brux. soc. scient 16, A, p. 2 (1892) etc.

291) Weitere formelle Ausdehnung des *Green*'schen Satzes bei *Thomson* u. *Tait,* treatise 1, p. 167; seine Ausdehnung auf n Variable bei *C. Neumann,*

$$\int (U\Delta(V) - V\Delta(U))\,dx\,dy\,dz = \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\omega,$$

vgl. II A 7 b.

Analytische Anwendungen des Satzes auf die Transformation von Differentialausdrücken. Während *Laplace* die Transformation von ΔV für Polarkoordinaten durch direkte Rechnung ausführte[292]), zeigte *Jacobi*, wie dieselbe ganz allgemein durch Variation des ersten Differentialparameters von *Lamé*[293]) auch für eine beliebige Zahl von Variabeln sich ergiebt. Die eigentliche Quelle aller dieser und ähnlicher in der mathematischen Physik erforderlichen Transformationen mittelst der Prinzipien der Invariantentheorie gab im Anschluss an *E. B. Christoffel*'s Untersuchungen[294]) jedoch erst *Gundelfinger*[295]). Einen Teil dieser Fragen beantwortet[296]) nun auch der *Green*'sche Satz (und ähnlich das *Gauss*'sche Theorem[297]), (vgl. II A 7 b), da nach der Gleichung

$$\int \Delta(V)\,dx\,dy\,dz = -\int \frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega$$

die Bedingung für das Verschwinden von ΔV auf das des einfacheren Oberflächenintegrales reduziert werden kann, welches nun für ein durch krummlinige Koordinaten begrenztes Raumelement auszuführen ist[298]); wie man sieht, leistet hier die geometrische Auffassung dasselbe, was in allgemeinerer Gestalt durch die Invariantentheorie der Differentialausdrücke (II A 4) geliefert wird.

48. Die Differentiation zu allgemeinem Index; ältere Arbeiten. Wir gedenken hier noch der Bestrebungen, den Differentiations- und Integrationsprozess unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen, *der Differentiation mit allgemeinem Index*, durch welche eine allgemeine formale Behandlung des bezüglichen Problems erreicht werden soll.

Um den Differentialquotienten zu beliebigem, auch komplexem, Index μ zu definieren, d. h. Operationen zu gewinnen, die für ganze

Ztschr. Math. Phys. 12, p. 117 (1867), sowie *E. Beltrami*, Bol. mem. (2) 8, 1868; *A. Gutzmer*, J. de math. 5, p. 420 (1889).

292) *Laplace*, Par. Mém. 1782, p. 135.

293) *G. Lamé*, J. éc. polyt. cah. 23, p. 215 (1834); *Jacobi*, J. f. Math. 36, p. 113 (1848) = Werke 2, p. 199.

294) *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 70, p. 46 (1869).

295) *S. Gundelfinger*, J. f. Math. 85, p. 295 (1878).

296) *E. Heine*, Kugelfunktionen 1, p. 307, 2. Ausg. 1878.

297) *Riemann*, Vorlesungen über Schwere etc. p. 128.

298) Vgl. die Note von *W. Fr. Meyer*, Math. Ann. 26, p. 513 (1885)

positive resp. negative μ sich auf die μ-fache Differentiation resp. Integration reduzieren und soweit wie möglich dem *Leibniz*'schen Algorithmus sich anschliessen, kann man entweder eine geeignete für positive μ bestehende Formel, wie z. B.

$$D_x^\mu x^n = n(n-1)\cdots(n-\mu+1)x^{n-\mu}, \quad (1)$$ [299]

oder

$$D_x^\mu \cos x = \cos\left(x + \mu\frac{\pi}{2}\right), \quad (2)$$ [300]

$$D_x^\mu e^{mx} = m^\mu e^{mx} \quad (3)$$

für beliebige μ als gültig ansehen, oder aber auf den Begriff des höheren Differentialquotienten resp. des Integrals als Grenzwert zurückgehen. Auf dem ersten Gesichtspunkt beruhen die Betrachtungen von *Leibniz* und *Joh. Bernoulli*[301], *Euler*[302], *Fourier*[303], *Lagrange*[301] und anderen. Den Übergang zur zweiten Behandlungsweise leiten die Arbeiten *Liouville*'s[304] ein, der von der Formel (3) zunächst ausgehend, zu der Definition

$$D_x^\mu f(x) = (-1)^\mu \lim_{h=0} h^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\binom{\mu}{k-1} f(x+(k-1)h) \quad (4)$$

gelangt[305], aus der weiter sich die Integraldarstellung

$$D_x^\mu f(x) = \frac{(-1)^\mu}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty f(x+t)t^{-(\mu+1)}dt, \quad \mu \lesseqgtr -1, \quad (5)$$

ergiebt. Bei *Liouville* ist zu beanstanden die vorausgesetzte Entwickelbarkeit der Funktion nach Potenzen der Exponentialfunktion, ferner, dass der Begriff der unbestimmten Integration festgehalten wird, wodurch die Hinzufügung besonderer Funktionen, wie sie auch schon bei der mehrfachen Integration auftreten, der *komplementären Funktionen*, nötig wird[306].

---

299) *L. Euler,* Petrop. Comm. 5, p. 55 (1730/31); vgl. *Lacroix,* 3, p. 409; so auch bei *Ph. Kelland,* Edinb. Trans. 14, p. 567, 604 (1840); 16, p. 241 (1849); desgl. *A. Buchwaldt,* Tydskrift (3) 5, p. 1 u. 95 (1875).

300) *S. B. Fourier,* Théorie de la chaleur (1822) = oeuvr. 1, p. 508.

301) Die ältere Litteratur bei *C. W. Borchardt,* Berl. Ber. 1868 = Werke p. 483, 486.

302) *Euler,* a. a. O.

303) *Fourier,* a. a. O.

304) *J. Liouville,* J. éc. polyt. cah. 21, p. 1 u. 71 (1832); cah. 24, p. 17 (1835); cah. 25, p. 58 (1836); desgl. J. f. Math. 11, p. 1; 12, p. 273 (1834); 13, p. 219 (1835).

305) *Liouville,* J. éc. polyt. cah. 21, p. 107.

306) A. a. O. p. 95.

49. Die Arbeiten von Riemann, Grünwald, Most und anderen. Diese Beschränkungen und Komplikationen sind, wenn man von *B. Riemann* absieht, der in einer Jugendarbeit dieselben auf einem anderen Wege zu vermeiden suchte[307]), zuerst von *A. K. Grünwald*[308]) beseitigt, der auf Grund von *Liouville*'s Formel (4) den Grenzwert

$$\lim_{h=0} F(ux\xi h) = \lim_{h=0} h^{-\xi}\Big[f(x) - \binom{\xi}{1} f(x-h) + \binom{\xi}{2} f(x-2h) \cdots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x-nh)\Big],$$

in welchem x, a, ξ komplexe Zahlen, n ganz und positiv so ins unendliche geht, dass $x - nh = u$ wird, als die begrenzte, auf dem geradlinigen Intervall x, u genommene ξ^{te} Ableitung der (eindeutigen endlichen und stetigen) Funktion $f(x)$ bezeichnet[309]). Dabei ergiebt sich die Formel[310])

$$D_u^{x\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x f(t)\,(x-t)^{-(\xi+1)}\,dt, \quad \Re(\xi) \lesseqgtr -1,$$

und damit die schon von *Riemann*[311]) erhaltene Erweiterung des *Liouville*'schen Integrals, dessen Grenzen x, ∞ sind. Für andere komplexe ξ ergiebt sich ein weitläufigerer Ausdruck[312]). *R. Most*[313]) ging an Stelle von (4) von dem Grenzwert aus, durch den das mehrfache bestimmte Integral definiert werden kann; wichtiger erscheint aber die bei ihm und *Grünwald*'s, *Letnikoff*'s späteren Arbeiten[314]) auftretende Benutzung des komplexen Integrals, durch welches der ξ^{te} Differentialquotient von vornherein nach *Cauchy* definiert werden kann. So ergiebt sich die allgemeine Formel[315])

$$D_u^{x-\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_u^{x^+} \frac{(x-t)^{\xi-1}}{1-e^{2\pi i\xi}} f(t)\,dt,$$

bei der das Integral um den Verzweigungspunkt x auf beliebigem

307) *B. Riemann* [1847], Werke p. 332.

308) *A. K. Grünwald,* Ztschr. Math. Phys. 12, p. 441 (1867).

309) A. a. O. p. 451.

310) p. 455. $\Re(\xi)$ bezeichnet den reellen Teil von ξ.

311) *Riemann,* a. a. O. p. 340.

312) *Grünwald,* a. a. O. p. 457.

313) *R. Most,* Ztschr. Math. Phys. 16, p. 190 (1871).

314) *A. W. Letnikoff,* vgl. Fortschr. d. Math. 6, p. 167; 14, p. 206; *Grünwald,* Prag. Ber. 1880, p. 276; desgl. *H. Laurent,* Nouv. Ann. (3) 3, p. 240 (1883).

315) *Most,* a. a. O. p. 193.

Wege von u aus auf einer Schleife geführt wird. Für $\Re(\xi) > 0$ kann dasselbe durch ein gewöhnliches Integral ausgedrückt werden; andernfalls ist dasselbe durch partielle Integration in geeigneter Weise umzuformen. Für diesen Prozess gelten nun z. B. die Formeln[316])

$$D_{-\infty}^{x\,\xi} e^{\alpha x} = \alpha^{\xi} e^{\alpha x},$$

$$D_{+\infty}^{x\,\xi} e^{-\alpha x} = (-\alpha)^{\xi} e^{-\alpha x}, \quad x > 0,$$

womit zugleich die bei *Liouville* auftretenden Widersprüche beseitigt werden, während die formale Gleichung[317])

$$D_u^{x_\nu} D_u^{x_\mu} f(x) = D_u^{x_\nu + \mu} f(x)$$

nur unter gewissen Einschränkungen bestehen bleibt und im allgemeinen μ und ν auch nicht vertauscht werden dürfen.

Unter den zahlreichen neueren Behandlungen des Gegenstandes, die sich auf formal verschiedene Gesichtspunkte, resp. die von *Grünwald* nicht behandelte Erweiterung auf Funktionen beziehen, die bei u nicht mehr endlich und eindeutig sind, nennen wir noch die Arbeiten von *K. Bochow*[318]), *P. Lindner*[319]) und insbesondere *A. Krug*[320]).

50. Die mechanische Quadratur. Da ein bestimmtes Integral sich im allgemeinen nicht durch zu bequemer Berechnung geeignete Formeln ausdrücken lässt, ist es die *Aufgabe der mechanischen Quadratur*, Methoden zur näherungsweisen Berechnung der bestimmten Integrale anzugeben. Man kann hier dreierlei verschiedene Gesichtspunkte unterscheiden: 1) die elementaren Summationsmethoden, 2) die durch *Gauss* nova methodus eingeschlagene Richtung, 3) die *Euler*sche Summationsformel[321]); über die letztere siehe I E.

316) p. 197.

317) p. 199.

318) *K. Bochow*, Diss. Halle 1885.

319) *P. Lindner*, Progr. Cöslin 1890, Nr. 125.

320) *A. Krug*, Wien. Denkschr. 57, p. 151 (1889); vgl. auch *E. Schimpf*, Progr. Bochum 1885, Nr. 318, und *v. Schäwen*, Progr. Strasburg i. W.-Pr. 1881 u. 1882.

321) Monographieen: *P. Mansion*, Brux. soc. scient. 2, p. 231 (1881); vgl. *A. Harnack*, Civiling. 28^4 (1882).

E. Heine, Kugelfunktionen 2, p. 1—29 (1879).

R. Radau, J. de math. (3) 5, p. 283 (1879).

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, St. Petersb. 1891, dtsch. von *T. Friesendorff* u. *E. Prümm*, Leipzig 1896, 1, p. 1—97.

Ch. Possé, Sur quelques applications des fonctions continues. Paris 1886.

51. Die elementaren Summationsmethoden entsprechen der Definition des bestimmten Integrals selbst, nach welcher man das Intervall in eine hinreichende Anzahl von Abschnitten zu zerlegen hat. Für den Inhalt eines solchen Flächenstreifens $ABab$ von der Breite $2h$ bildet unter der Voraussetzung, dass die Begrenzung AB stets konkav zur x-Axe liegt, das Trapez $ABab$ eine untere Grenze; eine obere ergiebt sich durch das dem mittleren Punkt C entsprechende Trapez $A'B'ab$, mit dem Inhalte $2hy_2$. Zerlegt man also ein Kurvendiagramm des Inhalts F in $2n$ solche Streifen von der Breite h mit den Ordinaten

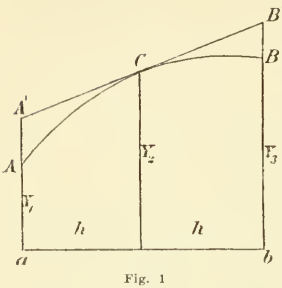


Fig. 1

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3 \ldots Y_{2n},\ Y_{2n+1},$$

so ist eine obere Grenze $M = 2hg$, während als untere Grenze durch verschiedenartiges Zusammenfassen in einfache und Doppelstreifen

$$m_1 = 2gh - hd$$
$$m_2 = 2hu + h[Y_1 + Y_{2n+1}]$$
$$m_3 = \frac{h}{2}[Y_1 + Y_{2n+1} + h(g+u)]$$

für

$$u = Y_3 + \cdots + Y_{2n-1}$$
$$g = Y_2 + Y_4 + \cdots + Y_{2n}$$
$$d = \frac{1}{2}[Y_2 - Y_1 + Y_{2n} - Y_{2n+1}]$$

genommen werden können. Die *Poncelet*'sche Tangentenformel setzt dann

$$F = \frac{1}{2}(M + m_1) = 2hg - \frac{1}{2}hd,$$

die Trapezformel

$$F = \frac{1}{2}(M + m_2) = h\Big[(g+u) + \frac{1}{2}(Y_1 + Y_{2n+1})\Big];$$

die *Parmentier*'sche Formel[322])

$$F = \frac{1}{3}[2M + m_1] = 2hg - \frac{1}{3}dh,$$

die *Simpson*'sche Formel[323])

322) *Th. Parmentier*, Nouv. ann. 14, p. 370 (1855).
323) *Th. Simpson*, Mathematic. dissertations, p. 109 (London 1743).

$$F = \frac{1}{3}[M + 2m_3] = \frac{1}{3}h[2u + 4g + Y_1 + Y_{2m-1}];$$

der hierbei begangene Fehler ist in den beiden ersten Fällen mit h^2, im dritten und vierten bezüglich mit h^3 und h^4 proportional[324]).

52. Die Gauss'sche Methode, Jacobi's und Christoffel's Arbeiten. Zur Berechnung des Integrals

$$J = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

dessen Grenzen man gleich 0, 1 (*Jacobi*), ± 1 (*Gauss*, *Christoffel*), $\pm \frac{1}{2}$ (*A. Andrae*) wählen kann, ersetzte schon *Newton*[325]) $f(x)$ durch eine für die n Werte $x = a_i$, $i = 1, \ldots n$, mit $f(x_i)$ übereinstimmende ganze Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades $F(x)$. Setzt man

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)C, \tag{2}$$

so ist nach der *Lagrange*'schen Interpolationsformel[326])

$$F(x) = \sum \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)} \frac{\varphi(x)}{x - a_i} \tag{3}$$

und man erhält als *angenäherten* Wert von J durch Substitution von $F(x)$ an Stelle von $f(x)$

$$J = \sum A_i f(a_i), \tag{4}$$

so dass der Koeffizient

$$A_i = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x - a)\varphi'(a_i)} \tag{5}$$

unabhängig von $f(x)$ ein für allemal bestimmt werden kann[327]). Ist das Intervall 0, 1 in $n - 1$ gleiche Teile geteilt, so erhält man insbesondere die bereits von *Cotes*[328]) für n bis 11 angegebenen Koeffizienten.

Die Formel (4) liefert den *genauen* Ausdruck von J, so lange

---

324) *Chévilliet*, Par. C. R. 78, p. 1841 (1874); desgleichen a. a. O. *Mansion* u. *Harnack*. Vgl. im übrigen I E.

325) *Newton* (1711): Invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit, Methodus differentialis = Opusc. 1, p. 271, auch p. 275.

326) *Lagrange*, Leçons élémentaires 1795 = oeuvr. 7, p. 285. Vgl. I B 1ª, 3.

327) Die durch $b - a$ dividierten A_i sind also die *Gewichte*, die den einzelnen $f(a_i)$ beizulegen sind (*Radau*, p. 284).

328) *R. Cotes*, *Harmonia mensurarum, Cantabrigiae 1722; *Gauss*, Werke 3, p. 202.

$f(x)$ eine ganze rationale Funktion, deren Grad $< n$ ist. *Gauss*[329]) hat zuerst gezeigt, wie man durch *geeignete Wahl der* a_i erreichen kann, dass die Formel exakt bleibt, falls der Grad $< 2n$ ist[330]).

Ist überhaupt $f(x)$ in eine Potenzreihe

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

entwickelbar, so muss in diesem Falle die Gleichung

$$\sum A_i [\alpha_0 + \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_i^2 + \cdots + \alpha_{2n-1} a_i^{2n-1}] = \left| \alpha_0 x + \alpha_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha_{2n-1} \frac{x^{2n}}{2n} \right|_a^b \tag{6}$$

für alle Werte der α bestehen. Hieraus folgt, falls man die n Grössen a_i als Wurzeln der Gleichung

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

ansieht und $p_k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$ setzt, das Gleichungssystem

$$c_0 p_k + c_1 p_{k+1} + \cdots + c_n p_{n+k} = 0, \quad k = 0, 1, \cdots n-1;$$

mithin zur Bestimmung der a_i die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n-1} & p_n & \cdots & p_{2n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

doch bleibt dann zu beweisen, dass die Wurzeln dieser Gleichung alle reell sind und in das Intervall a, b fallen[331]).

Setzt man nach *Jacobi*[332])

$$f(x) = Q(x)\varphi(x) + R(x),$$

329) *C. F. Gauss*, Gött. Comm. rec. 3, 1816 [1814] = Werke 3, p. 168. Dort übrigens nicht nur die Cotesischen Koeffizienten, sondern auch ihre weiteren Korrektionsglieder; über *Druckfehler* bei *Gauss* vgl. *Heine*, Kugelf. 2, p. 9.

330) Sie besitzt dann den Präzisionsgrad $2n-1$ (*Gauss*, a. a. O. p. 181, *Radau*, a. a. O.)

331) Dies ist zuerst von *F. Joachimsthal*, J. f. Math. 48, p. 386, 411 (1854) mit Hülfe der *Sturm*'schen Reihe gezeigt. Die $2n$ Gleichungen (6) des Textes hat *W. Scheibner* benutzt, um auch die weiteren Resultate von *Gauss* mit Hülfe von Kettenbruchentwickelungen herzuleiten (Leipz. Ber. 8 [1856], p. 73). Die Heranziehung transcendenter Operationen ist überhaupt nicht unbedingt erforderlich, wie neuerdings von *K. Heun* (Progr. 1. höh. Bürgersch. Berl. 1892, p. 3) gezeigt ist; nach *A. Hurwitz* (Fortschr. d. Math. 24, p. 271) besteht der *algebraische Charakter* des Problems darin, eine binäre Form $2n-1^{\text{ter}}$ Ordnung auf eine Summe von n Quadraten linearer Formen zu transformieren.

332) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 1, p. 301 (1826) = Werke 6, p. 5.

wo $R(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $\leqq n-1$, so muss, falls für jedes den $2n-1^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigende Polynom $f(x)$ die Gleichung

$$J = \int_a^b R(x)\,dx$$

bestehen soll,

$$\int_a^b Q(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

sein, daher müssen die n Bedingungen

$$\int_a^b x^h \varphi(x)\,dx = 0, \quad h = 0, \cdots n-1,$$

bestehen. Hieraus findet *Jacobi*[333])

$$\varphi(x) = C\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n, \tag{7}$$

womit zugleich evident wird, dass die Wurzeln von $\varphi(x)$ sämtlich reell sind und innerhalb a, b liegen[334]).

Eine eingehendere Untersuchung erfordert nicht allein die Abschätzung des von den Gliedern höherer als $2n-1^{\text{ter}}$ Ordnung von $f(x)$ abhängigen Fehlers[335]), sondern auch die Bestimmung der Koeffizienten A_i in (5), welche den aus (6) folgenden Wurzeln a_i entsprechen. Die hierauf bezüglichen Resultate von *Gauss* beruhen im wesentlichen darauf, dass für

$$A_i\varphi'(a_i) = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-y} - \varphi(y)\int_a^b \frac{dx}{x-y}, \quad (y = a_i)$$

die rechte Seite, welche eine *ganze* Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades von y ist, als ganzer Teil der nach absteigenden Potenzen von y entwickelten Funktion

$$\varphi(y)\log\left(\frac{y-b}{y-a}\right)$$

dargestellt wird[336]).

Diese Resultate hat zuerst *Christoffel* vereinfacht und erweitert[337]). Unter Voraussetzung einer Potenzreihe für $f(x)$ setzt sich der *Fehler*

---

333) In kürzerer Form bei *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1884, p. 841.

334) *Jacobi*, a. a. O. p. 8; doch für die Grenzen 0, 1. Bei *Gauss* erscheint $\varphi(x)$ in der Gestalt der hypergeometrischen Funktion $F[n+1, -n, 1, x]$.

335) *Jacobi*, a. a. O. p. 10.

336) Vgl. z. B. *H. Schellbach*, J. f. Math. 36, p. 192 (1836).

337) *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 55, p. 61 (1858).

aus den Partialfehlern Δx^ν, die bei der Berechnung von x^ν ($\nu \gtrless n$) mit Hülfe von (4) auftreten, zusammen. Setzt man demgemäss

$$\Delta x^\nu = \int_a^b x^\nu dx - \sum_1^n \frac{a_i^\nu}{\varphi'(a_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x - a_i},$$

so hat man als *erzeugende Fehlerfunktion*[338])

$$\sum_\nu \frac{\Delta x^\nu}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{\varphi(z)} \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{z - x} \tag{8}$$

und, unter Voraussetzung der Grenzen ± 1, falls

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n}\,\Gamma(n+1)\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n$$

gewählt wird,

$$A_i = \frac{2}{1 - a_i^2}\,\frac{1}{(\varphi' a_i)^2}\,.^{339}) \tag{9}$$

Christoffel's Erweiterung[340]) des *Gauss*'schen Verfahrens besteht darin, dass die Funktion $\varphi(x)$ vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade so bestimmt werden soll, dass sie für n gegebene willkürliche Werte verschwindet und die Formel (4) den Präzisionsgrad $2m + n - 1$ erreicht; sie kann nützlich werden, wenn $f(x)$ für irgend welche auch ausserhalb des Intervalles liegende Werte bekannt ist. In Analogie mit (7) ergiebt sich

$$\varphi(x) = \frac{d^m (x^2-1)^m V}{dx^m},$$

wo V ein bis auf einen konstanten Faktor durch die n gegebenen Werte bestimmtes Polynom ist.

53. Erweiterungen von Heine, Mehler und anderen. Eine weitere Verallgemeinerung der *Gauss*'schen Methode besteht in der Betrachtung des Integrales

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx \tag{10}$$

an Stelle von (1). Setzt man wieder für $f(x)$ die Werte (3) ein, so

338) So schon bei *Gauss*, a. a. O. p. 181. Die théorie des fonctions génétrices stammt von *Laplace*, Théor. des probabilités (1812) = oeuvr. 7, p. 8, 88.

339) *Christoffel*, a. a. O. p. 69. Daselbst auch der von *Gauss* (Werke 3, p. 192) gefundene Ausdruck für A_i. Tabelle der A_i und a_i für $n = 1$ bis $n = 7$ bei *Gauss*, Werke 3, p. 192, für $n = 1$ bis $n = 10$ bei *Radau*, a. a. O. p. 301; Tabelle für die Korrektionen, wenn $f(x)$ den $2n^{\text{ten}}$ Grad erreicht, daselbst p. 302.

340) *Christoffel*, a. a. O. p. 62.

ergiebt sich für die A_i eine ganz analoge Darstellung; die erzeugende Funktion (8) enthält unter dem Integralzeichen ebenfalls den Faktor $\psi(x)$ und es ist zu bewirken, dass

$$\int \varphi(x)\psi(x)x^h dx, \quad h = 0, \cdots n-1, \tag{10a}$$

verschwindet, wenn der Präzisionsgrad $2n-1$ erreicht werden soll[341]). Dazu hat man nach *Heine*[342]) für $\varphi(x)$ den n^{ten} Näherungsnenner des in einen Kettenbruch entwickelten Integrals

$$\sigma = \int \frac{\psi(x)\,dx}{z-x} \tag{11}$$

zu setzen. Und ist $Z(x)$ der zugehörige Zähler, so ergiebt sich als angenäherter Integralwert

$$\sum \frac{Z(a_i)}{\varphi'(a_i)} f(a_i),$$

wobei die Wurzeln a_i von $\varphi(x) = 0$ sämtlich reell sind und innerhalb des Intervalls der Integration liegen, *wenn $\psi(x)$ innerhalb desselben sein Zeichen nicht wechselt,* wie jetzt vorausgesetzt werden soll. Den Fall $\psi = (1-x)^\lambda(1+x)^\mu$ hatte (Grenzen ± 1) mit der notwendigen Bedingung $\lambda, \mu > -1$ bereits *Mehler*[343]) behandelt, wobei die *Christoffel*sche Formel (9) fast unverändert wieder auftritt, und gleichzeitig für $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ die Formel[344])

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx f(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_1^n f(a_i), \quad a_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n} \tag{12}$$

entsteht. Dieses auch von *Hermite*[345]) hergeleitete Resultat veranlasste *Tchebycheff*[346]), die Form derjenigen Funktionen $\psi(x)$ zu bestimmen,

---

341) Hierdurch ist die Funktion $\varphi(x)$ n^{ten} Grades *eindeutig* bestimmt, wenn $\psi(x)$ im Intervall a, b sein Zeichen nicht wechselt. Für andere $\psi(x)$ kann es mehrere, ja selbst unendlich viele, Polynome geben; vgl. z. B. *P. Appell,* Toul. Ann. 4, p. H 11 (1890).

342) *E. Heine,* J. f. Math. 67, p. 315 (1867); Kugelfunkt. 1, p. 291; 2, p. 20. Der Zusammenhang mit der Kettenbruchentwickelung tritt schon bei *Gauss* auf, der das einfachere Problem aus viel weiter reichenden Prinzipien hergeleitet hatte, Werke 3, p. 117, 185. Man vgl. auch die *Christoffel*schen Resultate (Ann. di mat. (2) 8, p. 1 [1876]).

343) *F. Mehler,* J. f. Math. 63, p. 152, 154 (1863).

344) A. a. O. p. 157.

345) *Hermite,* Cours p. 452; daselbst p. 450 auch die Hauptresultate von *Christoffel,* vgl. auch *Radau,* p. 316, sowie *A. Markoff,* Math. Ann. 25, p. 430 (1885).

346) *P. Tchebycheff,* J. de math. (2) 19, p. 19 (1874).

für die das Integral (6) durch $k\sum f(a_i)$ ausdrückbar wird. Der Fehler wird dabei im allgemeinen von der $n+1^{\text{ten}}$ Ordnung ausfallen; in der That zeigte auch *Possé*[347]), dass die Annäherung auf einen Rest $2n^{\text{ter}}$ Ordnung *nur* für $\psi(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ stattfindet.

Um die Grenzen der Integration auf 0 bis ∞ auszudehnen, setzte *Radau*[348]) in

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

$f(x) = e^{-x}F(x)$. Wird nun wieder $F(x)$ nach der *Lagrange*'schen Formel ersetzt, so zeigt eine ganz analoge Behandlung, dass $\sum A_i F(a_i)$ ein angenäherter Wert vom Präzisionsgrad $2n-1$ ist, wenn

$$\int_0^\infty e^{-x}dx\,\varphi(x)x^h, \quad h = 0, \cdots n-1,$$

verschwindet, sodass nach der *Kronecker*'schen Identität[348a])

$$\varphi(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$$

zu setzen ist. Ähnlich wählt *E. Gourier*[349]) für die Grenzen $\pm\infty$ die Funktion

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^{n+1}}.$$

Den Fall, dass $f(x)$ in eine Reihe entwickelbar ist, deren Exponenten eine arithmetische Reihe mit ganzzahliger Differenz bilden, während das Anfangsglied einen beliebigen Exponenten hat, hat *F. August* durch Substitution auf die *Jacobi*'sche Darstellung zurückgeführt[350]).

54. Markoff's Darstellung. Eine ganz andere Behandlung des *Gauss*'schen Problems ergiebt sich, wenn man von vornherein nicht von der angenäherten Formel (3), sondern von der exakten Interpolationsformel **13** ausgeht. Sucht man eine Funktion $F(x)$ vom Grade $2n-1$, welche an n zu bestimmenden Punkten $a_1 \ldots a_n$ die Kurve $f(x)$ *berührt*, so ist

$$f(x) - F(x) = (\varphi(x))^2 \frac{f^{2n}(\xi)}{2n!},$$

wo ξ ein Mittelwert von $a_1 \ldots a_n, x$, und es wird

347) *Ch. Possé*, Nouv. ann. (2) 14, p. 49 (1875).
348) *R. Radau*, Par. C. R. 97, p. 157 (1884). 348a) Vgl. Fussn. 333.
349) *E. Gourier*, Par. C. R. 97, p. 79.
350) *F. August*, Arch. Math. 56, p. 72 (1881).

$$F(x) = \sum f(a_i)\, P_i(x) + \sum f'(a_i)\, Q_i(x).$$

Demgemäss erhält man jetzt

$$\int F(x)\psi(x)\,dx = \sum A_i f(a_i) + \sum B_i f'(a_i).$$

Verlangt man nun, dass die Koeffizienten

$$B_i = \int \frac{\psi(x)\,(\varphi(x))^2\,dx}{(x-a)(\varphi' a_i)^2}$$

verschwinden sollen, so folgen wieder die Bedingungen (10a). Und so ergiebt sich *A. Markoff*'s Formel[351])

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \sum \frac{Z(a_i)}{\varphi'(a_i)} f(a_i) + \frac{f^{2n}(\xi)}{2n!}\int_a^b [\varphi(x)]^2 \psi(x)\,dx,$$

in welcher $\varphi(x)$ den n^{ten} Näherungsnenner des Integrales σ (11), $Z(x)$ den zugehörigen Zähler bedeutet. Diese Betrachtung stellt nicht allein den Fehler *formal* völlig dar, sondern zeigt auch, dass die Annäherung den Präzisionsgrad $2n-1$ erreicht, weil thatsächlich eine Funktion konstruiert wird, die $2n$ *Punkte mit der gegebenen gemein hat,* und giebt hierdurch den eigentlichen *Zusammenhang* der *Gauss*schen und *Newton*'schen Methode zu erkennen.

55. Erweiterung auf mehrfache Integrale. Durch Einführung des komplexen Integrationsgebietes hat *Callandreau* für das über eine beliebige Kurve innerhalb des Konvergenzkreises der analytischen Funktion $f(x)$ erstreckte Integral die *Gauss*'sche Entwickelung ausgeführt[352]). Eine Ausdehnung auf *reelle* mehrdimensionale Gebiete scheint dagegen zuerst von *Maxwell* versucht zu sein, der das Integral

$$\iint f(ax + by + c)\,dx\,dy$$

in Analogie mit der *Gauss*'schen Theorie behandelte[353]). *P. Appell* hat neuerdings diese Betrachtungen wieder aufgenommen[354]). In dem Integrale

$$\iint \psi \cdot f(x, y)\,dx\,dy,$$

wo ψ eine im Integrationsgebiete integrierbare Funktion von konstantem Zeichen, f nach Potenzen von x und y entwickelbar ist, wird

351) So Math. Ann. 25, p. 428 (1884), aber dort mit Benutzung der *Hermite*schen Interpolationsformel (J. f. Math. 84, p. 79) hergeleitet; so auch bei *Ch. Possé* a. a. O. p. 78; die vereinfachte Darstellung bei *A. Markoff*, Differenzenrechnung p. 80, nebst weiteren Verallgemeinerungen; vgl. auch *Possé*, a. a. O. p. 80—89.

352) *E. Callandreau*, Par. C. R. 84, p. 1225 (1877).

353) *J. C. Maxwell*, Cambr. Proc. 3, p. 39 (1877).

354) *P. Appell*, Toul. Ann. 4, H (1890).

man f durch ein Polynom ersetzen können, dessen Wert an n vorgeschriebenen Stellen mit f übereinstimmt. Diese letzteren sind nun wieder so zu bestimmen, dass der Fehler in den Gliedern möglichst hoher Dimension auftritt. Hierbei ergiebt sich die Möglichkeit einer zur *Jacobi*'schen Behandlung des früheren Problems analogen; zugleich aber treten Schwierigkeiten hervor, wenn die Bedingung aufrecht erhalten werden soll, dass diese Stellen dem Integrationsgebiet angehören sollen, wozu der positive Charakter von ψ nicht mehr ausreicht.

E. Anhang.

56. Planimeter und Integratoren. Instrumente, welche die Ausführung von Integrationen durch mechanische Hülfsmittel bewirken, werden besonders dann wichtig, wenn es sich um — zunächst zweidimensionale — Gebiete handelt, deren Begrenzung nur graphisch gegeben ist. Insbesondere gestatten die *Planimeter*, den Flächeninhalt einer ebenen oder sphärischen Kontur durch *Umfahren*[355]) derselben mit dem sogenannten *Fahrstift* an einer Rolle, der *Integrirrolle*, abzulesen.

Man kann drei *Perioden* in der Entwickelung der Integratoren unterscheiden: 1) die älteren Planimeterkonstruktionen von 1814—1850; 2) das *Amsler*'sche Planimeter 1854 und die Konstruktion von Apparaten ohne Gleitbewegung (*J. C. Maxwell* 1851); 3) die auf allseitiger Verwendung der Kinematik beruhenden neueren Apparate (Präzisionsplanimeter, Integratoren der verschiedensten Art), etwa seit 1870.

Die *kinematischen Prinzipien* dieser Apparate (umfassend zuerst von *J. Amsler*[356]) dargelegt) beruhen fast durchweg[357]) entweder auf der Anwendung einer Rolle mit glattem Rande, deren Drehung um ihre Axe (den *Stab* oder *Fahrarm*) die erzeugte Fläche misst, oder auf der Benutzung von geeigneten auf einander rollenden Flächen (Ebene, Kugel, Kegel, Cylinder)[358]).

---

355) Mathematisch aufgefasst handelt es sich also um eine an der Begrenzung auszuführende Operation zur Ermittelung des Doppelintegrals, d. h. um eine kinematische Deutung des *Green*'schen Satzes.

356) *J. Amsler,* Zürich. Viert. 1, p. 44—48 (1856); (auch sep. Schaffhausen 1856), weiterhin zitiert mit *A.*; desgl. mit der Ausdehnung auf *sphärische* Figuren Zeitschr. Instr. Berlin 1884, p. 11.

357) Eine Ausnahme macht das theoretisch und praktisch gleich interessante Beilplanimeter von *Prytz* (1887) (vgl. *O. Henrici,* Brit. Ass. 1894, p. 516—520, sowie *Hill,* Phil. mag. 1894, p. 265).

358) *A.* p. 65.

Die *geometrische Theorie* beruht im ersten Falle auf der Erzeugung des Flächeninhaltes durch eine Strecke von unveränderlicher Länge l, deren Enden die Kontur der Fläche durchlaufen (Stab der Rolle). Bei der *Translation* des Stabes über eine parallelogrammatische Figur ist die Drehung der Rolle der erzeugten Fläche proportional; will man auf diese Art beliebige Flächenstücke, z. B. ein von der X-Axe, zwei Ordinaten und der Kurve begrenztes Stück messen, so muss die Veränderlichkeit der Ordinaten durch eine entsprechende Drehung der Rolle kompensiert werden. So beim *Kegelplanimeter Gonnella*'s[359]), dem *Scheibenplanimeter Oppikofer*'s (1826), und den Instrumenten[360]) von *Ernst* (1836), *Wetli* (1849) und *Hansen* (1853). Bei der *Rotation* des Stabes um das eine Ende ist ebenfalls die Drehung der Rolle dem erzeugten Inhalt proportional; wird auch hier die Veränderlichkeit des Radius vector eines im Sinne der Polarkoordinaten betrachteten Flächenstücks in geeigneter Weise kompensiert, so entstehen die seltener ausgeführten Polarkoordinatenplanimeter (vgl. die soeben besprochenen Orthogonalkoordinatenplanimeter[361]).

57. Das Amsler'sche Planimeter[362]), an Einfachheit und Eleganz auch heute noch unübertroffen (erste Konstruktion 1854), entsteht, wenn Anfang A und Ende A' des Stabes l auf zwei geschlossenen Kurven C, C' geführt werden. Sind (Figur 2, s. pag. 130) x, y; x', y' die Koordinaten der entsprechenden Punkte A, A', F, F' die Inhalte von C, C', ferner α, β die Winkel von l und der Tangente an C' in A' mit der X-Axe, ist endlich $A'B' = ds$, so wird

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}(x'dy' - y'dx') + \frac{l}{2}d(x'\sin\alpha - y'\cos\alpha)$$
$$- l\,ds\sin(\alpha - \beta) + \frac{l^2}{2}d\alpha,$$

also, wenn beide Punkte A und A' gleichzeitig die Anfangslage wieder annehmen[363]),

359) *T. Gonnella,* *Antologia di Firenze 18 (1825); opusc. mat., Firenze 1841. Erstes Planimeter jedoch von *J. M. Hermann* (1814) nach *C. M. Bauernfeind* (Polyt. J. 137, p. 82 [1855]). Vgl. *A. Favaro,* Wien. Allg. Bauz. 38 (1873), p. 68.

360) *C. M. Bauernfeind,* *Ber. polyt. Vereins für Bayern 1853, p. 130—147; *A.* p. 114—118; vgl. auch die Litteratur bei *W. Jordan,* Vermessungskunde, Stuttgart 1893, p. 117.

361) Nach *Henrici*'s Terminologie a. a. O. p. 496.

362) *A.* p. 44—48. Unabhängig davon das 1855 von *Miller von Hauenfels* erfundene sehr ähnliche Instrument (Katalog math. Apparate und Modelle, München 1892, p. 190, weiterhin zitiert unter K. M. A.).

363) Geometrische Begründung dieser Gleichung bei *A.* p. 58; *J. Amsler,*

$$F = F' - l\int \sin(\alpha - \beta)\, ds + \frac{l^2}{2}\int d\alpha.$$

Das erste Integral rechts wird durch die totale Drehung der Rolle R

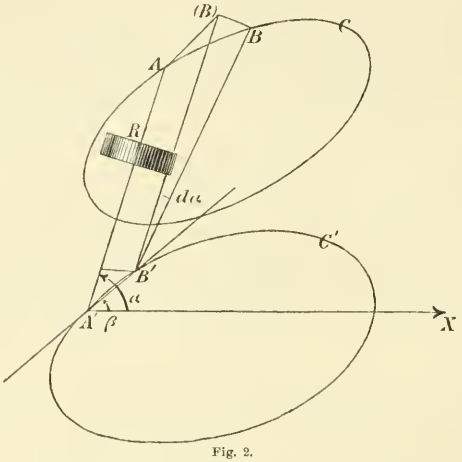


Fig. 2.

gegeben, das zweite hat den Wert 0 oder $2n\pi$. Wählt man für C' einen Kreis, so entsteht das *Polarplanimeter Amsler*'s (Figur 3).

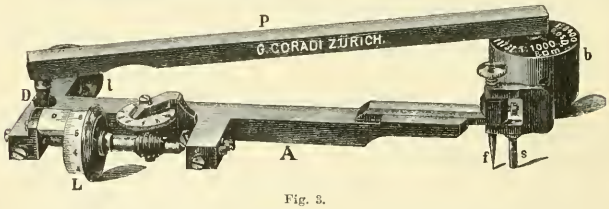


Fig. 3.
Amsler'sches Planimeter nach G. Coradi.

58. Die Präzisionsplanimeter. Die Genauigkeitsfehler dieses und ähnlicher Instrumente beruhen — abgesehen von den durch Übung zu vermeidenden, sowie den mechanischen Ungenauigkeiten der Kon-

---

Zeitschr. f. Instr. 1884, p. 12; desgl. *A. Amsler,* Ueber den Flächeninhalt und das Volum etc. und über mechanische Integrationen, Schaffhausen 1880, p. 5, (auch mit Erweiterungen für den Raum p. 17).

struktion[364]) — wesentlich auf dem *veränderlichen* Einfluss der Unterlage, auf der die Rolle sich abwälzt, und der *gleitenden* Bewegung derselben[365]). Dies veranlasste die Konstruktion von Planimetern, bei denen die Rolle auf einer unveränderlichen Unterlage geführt wird, und zugleich die Gleitbewegungen ganz oder fast ganz fortfallen. So entstanden die Präzisionsplanimeter von *Amsler*, *F. Hohmann-Coradi* (erste Ausführung 1880, das freischwebende Präzisionsplanimeter 1882—1884, das Kugelrollplanimeter[366])); durch grosse Genauigkeit zeichnen sich namentlich die neuen Instrumente von *G. Coradi* aus[367]).

Die bereits von *J. Amsler*[368]) angegebene Erweiterung der Planimeter zu Integratoren für Flächenmomente und Trägheitsmomente, für die mechanische Ermittelung von Potentialfunktionen und Attraktionskräften[369]) ist neuerdings von den verschiedensten Seiten fortgebildet; man vgl. die Angaben im K. M. A. von 1892, p. 197—224.

59. Die Integraphen. Während die Planimeter den Inhalt einer geschlossenen Kurve abzulesen gestatten, zeichnen die *Integraphen* direkt die Integralkurve $z = \int y\,dx$, welche zu einer gegebenen Differentialkurve $y = f(x)$ gehört. Nach früheren Vorschlägen von *Żmurko* (1864)[370]) und *J. Thomson*[371]), *Cayley*[372]) ist zu vielseitiger Ausführung gelangt der Integraph von *Abdank-Abakanowicz* 1882 (erstes Modell

364) Theoretische Erörterungen über die Fehler bei *F. H. Reitz*, Zeitschr. f. Vermess. 7, p. 264 (1878); *P. Wilski*, ib. 21, p. 609 (1892); *G. Coradi*, praktische Anleitung zum Gebrauch des einfachen Polarplanim., Zürich 1892; Zusammenfassung bei *O. Henrici*, Brit. Ass. 1894, p. 510—512.

365) *A.* p. 131; schon *J. C. Maxwell* (Edinb. Trans. 4 = Coll. pap. 1, p. 230) gab 1855 ein Instrument ohne Gleitbewegung an; vgl. auch das Planimeter von *J. Stadler* (K. M. A. p. 184); ein anderes Instrument beschreibt *J. Amsler*, Ztschr. f. Instrum. 1884, p. 21.

366) Theorie bei *F. Lorber*, Zeitschr. f. Instrum. 1882, p. 327; Zeitschr. f. Vermess. 17, p. 161 (1888).

367) Die Kugelplanimeter Coradi, Beschreibung u. Anleitung z. Gebrauch etc. von *G. Coradi*, Zürich 1889, Litteratur im Vorwort; Genauigkeitstabellen daselbst p. 32; ferner: „Die Planimeter Coradi", Zürich 1895.

368) *A.* p. 101—107.

369) *A. Amsler*, Repert. Phys. 15 (1879), p. 389.

370) Über *Zmurko*'s Integrator (1861 erfunden, 1881 von *G. Coradi* ausgeführt) vgl. *K. Skibinski*, Wien. Denkschr. 53, p. 35 (1887). Von *Ż.* stammt auch die von *Abakanowicz* benutzte Eigenschaft der Integralkurve.

371) *J. Thomson*, Lond. Roy. Proc. 24 (1876) = Treatise on natural philosophy, 1, p. 488, 2. ed.

372) *A. Cayley*, Brit. Ass. 1877.

1878)[373]). Das von *G. Coradi* angeführte Instrument (Figur 4) besteht (Fig 5 s. p. 133) *erstens* aus dem in der X-Richtung auf Laufrollen L' beweglichen Wagen W, dem längs BD beweglichen Wagen W' mit

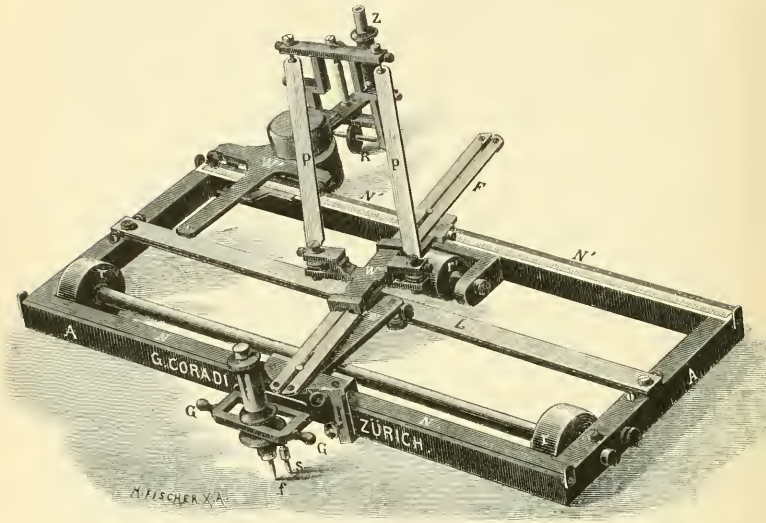


Fig. 4
Integraph von Abakanowicz nach G. Coradi.

dem auf der Differentialkurve C zu führenden Fahrstifte F, *zweitens* aus der *scharfrandigen* Rolle R,[374]) welche vermöge des Parallelogramms $abcd$ und des durch die festen Punkte A und B der Wagen W und W' gehenden geschlitzten Lineals, auf dem das Gleitstück G verschieblich ist, ihre Bewegungsrichtung stets dem Lineal parallel erhält[375]), während der Punkt M durch einen längs PP' verschiebbaren

373) *Abdank-Abakanowicz*, Les intégraphes et la courbe intégrale, Paris 1889, deutsch mit Zusätzen von *E. Bitterli*, Leipzig 1889; dort p. 51 weitere Litteratur.

374) Auf diesem schon von *J. Amsler*, *A.* p. 65 angegebenen Prinzipe beruht auch das Planimeter von *Hine* und *Robertson*, *Henrici*, Brit. Ass. 1894, p. 515, K. M. A. im Nachtrag (ohne pag.).

375) Auf andere Art wird der Parallelismus erreicht im Integrator von *C. V. Boys*, Phil. mag. Mai 1881.

Wagen W'' geführt wird. Für die von M oder J beschriebene Kurve C' wird daher

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{AD}; \quad z \cdot AD = \int y\,dx,$$

so dass M oder J die Integralkurve beschreibt[376]).

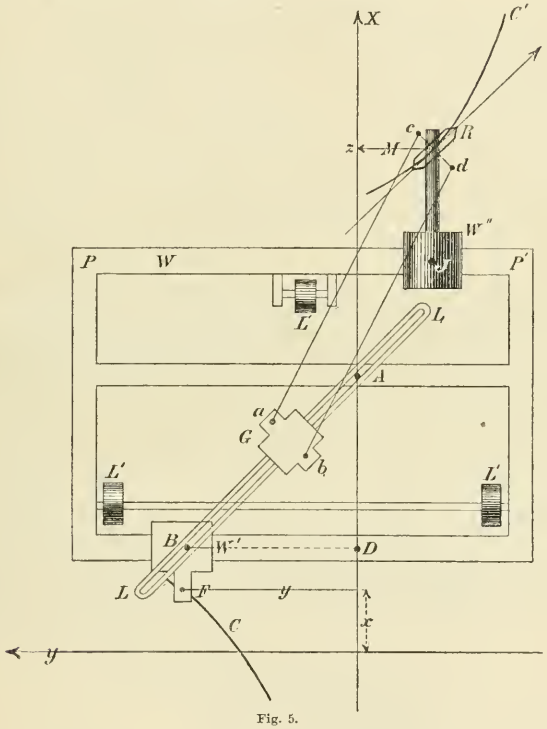


Fig. 5.

60. Harmonische Analysatoren (Harmonic analysers) konstruieren graphisch die Koeffizienten der *Fourier*'schen Reihe, d. h. die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

376) Verwendung des Integraphen zur Lösung mathematischer Fragen bei *Abakanowicz*, p. 84 ff.; K. M. A. p. 201.

Frühere Konstruktion von *W. Thomson* (*Lord Kelvin*)[377]); durch partielle Integration der Integrale vereinfachter Apparat von *O. Henrici*[378]); besonders leistungsfähig scheint ein neuerdings von *Michelson* und *Stratton* mit Benutzung von Spiralfedern konstruiertes Instrument[379]).

61. Die graphischen Methoden. In engster Verbindung stehen damit die Integratoren von linearen Differentialgleichungen, wie sie ebenfalls von *W. Thomson* 1876[380]) angegeben sind. Die kinematischen Hülfsmittel aller dieser, wenn auch unabhängig entstandenen, Apparate beruhen auf den von *J. Amsler* 1856 ausgesprochenen Ideen und scheinen bestimmt, bei den Aufgaben der modernen Naturforschung noch vielfache Verwendung zu finden[381]). Sie bilden aber nur einen kleinen Teil der *graphischen Methoden*[382]) überhaupt, deren konsequente Verfolgung immer mehr Einfluss auf eine Umbildung der mathematisch-technischen Hülfsmittel zu gewinnen scheint.

377) *W. Thomson*, Lond. Roy. Proc. 24 (1876) = Treatise 1, p. 493—496. Man vergleiche indessen *J. Amsler*'s frühere Versuche *A.* p. 107—113.

378) K. M. A. p. 131, 213. Erster Versuch von *Henrici* 1889, Abbildung des von *G. Coradi* nach *O. Henrici* und *A. Sharp* konstruierten Instrumentes K. M. A. Nachtrag p. 34; vgl. Der harmon. Analysator konstr. von *G. Coradi*, Zürich 1894, desgl. K. M. A. p. 125, Gött. Nachr. 1894, p. 30 und Phil. mag. 1894, p. 110.

379) *A. A. Michelson* und *S. W. Stratton*, Phil. Mag. (1898), p. 85.

380) Treatise 1, p. 493—504; speziellere Ausführung bei *A. Amsler*, Schaffhausen 1880, p. 52—60.

381) Nach *H. S. Hele-Shaw* (Lond. Trans. 176, p. 365) soll bereits *J. V. Poncelet* 1834 ähnliche Prinzipe benutzt haben.

382) Vgl. z. B. **Nehls*, Graphisch-mechanisches Integrieren, Leipzig 1885, 2. Ausg.; **E. Massau*, Ann. de l'association des ingénieurs 1, 2, Brux. 1878; 3, Liège 1884; ferner die Litteratur im K. M. A. p. 99, 202—207, 211—212 etc.; desgl. **H. S. Hele-Shaw*, Proc. civil eng. 1885.

Berichtigungen und Nachträge.

S. 56, Z. 12 u. 14 v. o. lies Michelsen statt Michelson.
S. 56, Z. 10 v. u. lies processes statt progresses.
S. 61, Z. 6 v. o. lies ou statt où.
S. 61, Fussn. 15 füge hinzu: für komplexe Variable bei *Pringsheim*, Münch. Ber. 25, 1895, p 303.
S. 62, Z. 7 v. o. lies cx statt e^x.
S. 70, Fussn. 58 streiche 9 hinter *Gerhardt*.
S. 71, Fussn. 67 füge hinzu: Bei nur einer unabhängigen Variabelen fällt natürlich die Bedingung der Stetigkeit der Derivierten der y_i weg.
S. 81, Fussn. 118 lies Grundzüge 1.
S. 88, Z. 7 v. u. lies Ann. fis. mat. 6.

II A 3. BESTIMMTE INTEGRALE

VON

G. BRUNEL

IN BORDEAUX.

Inhaltsübersicht.

1. Eigentliche bestimmte Integrale.
2. Uneigentliche bestimmte Integrale.
3. Kennzeichen der absoluten Konvergenz der bestimmten Integrale.
4. Nicht absolut-konvergente bestimmte Integrale. Nicht-monotone Integranden.
5. Eigenschaften der uneigentlichen bestimmten Integrale.
6. Integration unendlicher Reihen
7. Bestimmte Integrale, die einen Parameter enthalten.
8. Mehrfache bestimmte Integrale.
9. Verschiedene Methoden zur Auswertung der bestimmten Integrale.
10. *Cauchy*'scher Satz.
11. Integration rationaler Brüche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$.
12. Γ-Funktion.
13. *Euler*'sche Konstante.
14. Integrallogarithmus.
15. B-Funktionen.
16. Andere Integrale, welche auf Gammafunktionen zurückführbar sind.
17. Anwendungen der bestimmten Integrale in der Reihenlehre.
18. *Bernoulli*'sche Zahlen.
19. Besondere bestimmte Integrale.
20. *Gauss*'sche Summen.

Litteratur.

Allgemeine Lehrbücher.

Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa, 1878; dtsch u. d. T.: Grundlagen der Theorie der Funktionen einer veränderlichen Grösse, hsg. von *Lüroth* und *Schepp*, Leipzig, 1892.

A. Harnack, die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, 1881.

O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Erster Teil. Leipzig, 1893.

C. Jordan, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, deuxième édition. Paris, t. I, 1893; t. II, 1894.

Spezielle Lehrbücher.

D. Bierens de Haan, Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Amsterdam, 1862.

G. F. Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen (nach *P. G. Lejeune-Dirichlet*). Leipzig, 1871.

J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle, 1875.

L. Kronecker, Vorlesungen über Mathematik. I. Bd. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale, hsg. von *E. Netto.* Leipzig, 1894.

Monographien.

H. Limbourg, Théorie de la fonction Gamma. Gand, 1859.

G. Brunel, Monographie de la fonction Gamma. Bordeaux, 1885 (auch Bord. Mém.).

E. Schenkel, Kritisch-historische Untersuchungen über die Theorie der Gammafunktionen und Eulerschen Integrale, Uster-Zürich, 1894.

J. H. Graf, Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale. Bern, 1895.

L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin, 1893.

D. Bierens de Haan, Tables d'intégrales définies. Amsterdam, 1858.

---

1. Eigentliche bestimmte Integrale. Bezeichnet man mit $f(x)$ eine in einem gegebenen Intervall integrable Funktion, mit a, b zwei Zahlen dieses Intervalles, so ist das Zeichen:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bereits II A 2, **31** definiert und es sind auch dort folgende Eigenschaften desselben angeführt:

a) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

b) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx;$$

c) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

d) wenn f_k integrable Funktionen von x (in endlicher Anzahl) und C_k Konstante sind, so ist auch:

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots$$

integrabel und es ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots;$$

e) die Mittelwertsätze;

f) wenn $F(x)$ eine Funktion ist, die $f(x)$ zur Derivierten hat, ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

g) $$\int_a^b f_1(x) f_2'(x)\,dx = [f_1(x) f_2(x)]_a^b - \int_a^b f_1'(x) f_2(x)\,dx;$$

h) wenn $x = \varphi(t)$ eine im Intervall von t_0 bis T monotone Funktion von x ist, ist:

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

2. Uneigentliche bestimmte Integrale[1]). Wenn eine Funktion $f(x)$, ohne zwischen a und b integrabel zu sein, zwischen $a + \varepsilon$ und b integrabel ist, wie klein auch ε sein mag, so hat der Ausdruck:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

für jeden Wert von ε einen bestimmten Wert. Wenn dann dieser Wert für $\lim \varepsilon = 0$ gegen einen festen Grenzwert konvergiert, so versteht man unter dem *„uneigentlichen bestimmten Integral"*:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

eben diesen Grenzwert. Ebenso, wenn $f(x)$ an der unteren Grenze oder an beiden Grenzen aufhört, integrabel zu sein, so definiert man $\int_a^b f(x)\,dx$ durch die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0,\,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, dass die rechts stehenden Grenzwerte existieren (II A 1, **23**).

1) Die Unterscheidung der bestimmten Integrale in eigentliche und uneigentliche ist von *Riemann* klar ausgesprochen, ges. W. p. 225 [1854, zuerst publ. 1867]. *C. Jordan* (Cours d'anal. II, ch. 2 bezeichnet die uneigentlichen Integrale als *„intégrales définies généralisées"*.

Allgemeiner: wenn $f(x)$ im Intervall $(a \ldots b)$ integrabel ist, ausser in der Umgebung einer endlichen Zahl von Punkten $c_1, c_2 \ldots c_n$, so definiert man $\int_a^b f(x)\,dx$ durch die Gleichung:

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \cdots + \int_{c_n}^b = \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_a^{c_1 - \varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_1' = 0, \varepsilon_2 = 0} \int_{c_1 + \varepsilon_1'}^{c_2 - \varepsilon_2} + \cdots + \lim_{\varepsilon_n' = 0} \int_{c_n + \varepsilon_n'}^b$$

in der alle geforderten Grenzübergänge als *von einander unabhängig* zu verstehen sind.

Es kann vorkommen, dass die rechte Seite dieser Gleichung nur für eine *specielle* Art des Grenzübergangs einen Grenzwert hat, z. B. nur für

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1', \ \varepsilon_2 = \varepsilon_2' \ldots \varepsilon_n = \varepsilon_n'.$$

Diesen Grenzwert nennt *A. Cauchy*[2]) den Hauptwert (valeur principale) des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$.

Endlich mögen die Punkte $c_1, c_2, \ldots$ eine unendliche abgeschlossene (I A 5, **11**) Menge bilden[3]). Zerlegen wir das Intervall in Teilintervalle, deren jedes $< \delta$ ist. Diejenigen von ihnen, $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots$ die weder in ihrem Innern, noch an ihrer Grenze einen der singulären Punkte $c_1, c_2 \ldots$ enthalten, bilden einen Bereich D, für den die Gleichung gilt:

$$\int_{(D)} f(x)\,dx = \sum \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx.$$

Lässt man δ gegen Null convergieren, so nimmt der veränderliche Bereich D allmählich alle nicht singulären Punkte des Intervalls ab in sich auf. Wenn unter dieser Voraussetzung das Integral $\int_{(D)} f(x)\,dx$ gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, verstehen wir unter $\int_a^b f(x)\,dx$ eben diesen Grenzwert.

Für die Existenz dieses Grenzwerts ist notwendig und hinreichend

---

2) Résumé des leçons calc. inf., Par. 1823, p. 96; J. éc. polyt. cah. 19, 1823, p. 572. — *Riemann* bemerkt a. a. O.: „Solche Festsetzungen mögen für einzelne Klassen von Untersuchungen zweckmässig sein, sind jedoch, schon wegen ihrer grossen Willkürlichkeit, zu allgemeiner Einführung kaum geeignet". Z. B. gilt die Formel **1**, h) für sie nicht.

3) *C. Jordan*, cours d'analyse 2, p. 90.

(I A 3, **13**; II A 1, **16**), dass man zu jedem ε ein η so bestimmen kann, dass stets:

$$\left| \int_{(D_1)} f(x)\,dx - \int_{(D_2)} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

ist, sobald die Bereiche D_1 und D_2 zu Werten von δ gehören, die kleiner als η sind.

Das so definierte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heisst *absolut* oder *unbedingt* konvergent, wenn auch:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

einen bestimmten Wert hat; andernfalls nur *bedingt* konvergent (I A 1, **31**).

Was *bestimmte Integrale zwischen unendlichen Grenzen* betrifft, so definiert man ebenso die Symbole:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

bezw. durch:

$$\int_a^\infty = \lim_{b=\infty} \int_a^b, \quad \int_{-\infty}^b = \lim_{a=-\infty} \int_a^b, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b,$$

mit analoger Unterscheidung zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz.

Auch wenn die beiden Grenzwerte:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx$$

nicht existieren, kann doch der Grenzwert:

$$\lim_{b=\infty} \int_{-b}^{+b} f(x)\,dx$$

vorhanden sein. Man nennt ihn dann den Hauptwert[4]) des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. Kennzeichen der absoluten Konvergenz der bestimmten Integrale. *B. Riemann*[5a]), *J. Worpitzky*[5b]), *P. du Bois-Reymond*[5c]),

4) Fussnote 2 gilt auch für diesen Fall.

5a) Ges. W. p. 229 — b) Über die Endlichkeit von bestimmten Integralen, 1867. — c) J. f. Math. 76, 1872, p. 88.

A. Pringsheim[5d]), *O. Stolz*[5e]) haben sich mit der Aufstellung von Kriterien für die absolute Konvergenz bestimmter Integrale und mit der Untersuchung der Tragweite der von Riemann gegebenen Kriterien beschäftigt.

Zur absoluten Konvergenz von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist *hinreichend* die Existenz einer solchen positiven Zahl $\mu < 1$, dass $(b-x)^\mu f(x)$ für $\lim x = b-0$ einen endlichen Grenzwert oder endliche Unbestimmtheitsgrenzen (II A 1, 7) hat. *Notwendig* hierzu ist, wenn $f(x)$ im Intervalle $(a \ldots b)$ sein Zeichen nicht wechselt, dass $(b-x)f(x)$ für $\lim x = b-0$ den Grenzwert 0 oder mindestens eine Unbestimmtheitsgrenze 0 hat. Nimmt man jedoch an, dass $(b-x)f(x)$ für $\lim x = b-0$ einen Grenzwert hat, so erscheint das Verschwinden desselben unter allen Umständen als eine notwendige Bedingung der absoluten Konvergenz von $\int_a^b f(x)\,dx$.

Setzt man mit *P. du Bois-Reymond* (a. a. O. p. 79):

$$p = l_0(p), \quad \log p = l_1(p), \quad \log(\log p) = l_2(p) \ldots$$
$$L_r^\mu(p) = l_0(p)\, l_1(p) \ldots l_{r-1}(p)\, l_r(p^\mu),$$

so kann man in dem vorhergehenden Satz $(b-x)^\mu f(x)$ und $(b-x)f(x)$ durch:

$$(b-x)^2 L_r^\mu\left(\frac{1}{b-x}\right) f(x), \quad \text{bezw.} \quad (b-x)^2 L_r^1\left(\frac{1}{b-x}\right) f(x)$$

ersetzen.

Zur absoluten Konvergenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ist hinreichend die Existenz einer solchen positiven Zahl $\mu > 1$, dass $x^\mu f(x)$ bei $\lim x = +\infty$ einen endlichen Grenzwert oder endliche Unbestimmtheitsgrenzen hat. Notwendig hierzu ist, wenn $f(x)$ im Intervall $(a \cdots +\infty)$ sein Zeichen nicht wechselt, dass $xf(x)$ bei $\lim x = +\infty$ den Grenzwert 0 oder mindestens eine Unbestimmtheitsgrenze 0 hat. Nimmt man an, dass $xf(x)$ bei $\lim x = +\infty$ einen Grenzwert hat, so ist sein Verschwinden unter allen Umständen notwendige Bedingung der absoluten Konvergenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

In diesem Satz kann mau $x^\mu f(x)$ und $xf(x)$ bezw. durch $L_r^\mu(x)f(x)$ und $L_r^1(x)f(x)$ ersetzen.

5d) Math. Ann. 37, 1890, p. 591. — 5e) Grundzüge 1, p. 401.

P. du Bois-Reymond[6a]) und *Pringsheim*[6b]) haben gezeigt, dass selbst für monotone $f(x)$ (I A 3, Fussn. 95) die logarithmischen Kriterien nicht immer zur Entscheidung über die Konvergenz ausreichen. Pringsheim beweist: Wird $f(x)$ für $x = 0$ ohne Maxima und Minima unendlich, so ist für die Konvergenz von $\int_0^a f(x)\,dx$ unter allen Umständen notwendig, dass $\lim x f(x) = 0$. Dagegen gibt es keine mit verschwindendem x noch so langsam ins Unendliche wachsende Funktion $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ von der Beschaffenheit, dass auch $\lim x\psi\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ Null werden müsste. Vielmehr lassen sich zu jeder solchen Funktion $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ Funktionen $f(x)$ angeben, für welche das betreffende Integral konvergiert, während die obere Unbestimmtheitsgrenze des obigen Ausdrucks einen beliebig (d. h. auch unendlich) grossen Wert besitzt.

Beispiele von absolut konvergenten bestimmten Integralen:

Sind $P(x)$ und $N(x)$ zwei rationale ganze Funktionen von x, von den Graden p und n, ohne gemeinsamen Teiler, so hat das Integral $\int_a^\infty \frac{P(x)}{N(x)}\,dx$, in dem a grösser sein soll als die grösste reelle Wurzel der Gleichung $N(x) = 0$, einen bestimmten Wert, wenn $n \geq p+2$ ist.

Das *Euler'sche Integral erster Art* $\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^\nu}$, in dem μ und ν positive Zahlen sind, hat nur einen Sinn, wenn $\mu < \nu$ ist.

Das *Euler'sche Integral zweiter Art* $\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}$ hat einen bestimmten Wert für jedes positive α. Das Auftreten der oberen Grenze ∞ bringt keine Einschränkung für den Wert von α mit sich.

Das Integral $\int_0^\pi \log\sin \alpha x\,dx$ hat einen Sinn für $0 < \alpha < 1$;

„ „ $\int_0^a \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx$ „ „ „ „ $\mu < 2$;

„ „ $\int_0^a \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx$ „ „ „ „ $\mu < 1$;

6a) a. a. O. p. 88. b) Math. Ann. 37, p. 593.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Das Integral } \int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx \\ \text{„ \quad „ } \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx\end{array}\right\} a > 0 \text{ hat einen Sinn für } \mu > 1.$$

4. Nicht absolut-konvergente bestimmte Integrale. Nicht-monotone Integranden. Die beiden letzten Integrale geben für $0 < \mu \leqq 1$ Beispiele von bedingt konvergenten Integralen. — Wenn $f(x)$ mit wachsendem x unendlich oft sein Zeichen ändert, bezeichnen wir mit $x_1, x_2 \ldots$ die zwischen a und ∞ gelegenen Nullstellen von $f(x)$; dann gestattet die Zerlegung[7]):

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} + \cdots + \text{in inf.}$$

in vielen Fällen, über die Konvergenz des links stehenden Integrals zu entscheiden.

Aber das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ kann auch einen bestimmten Wert haben, ohne dass $f(x)$ sein Zeichen wechselt und ohne dass es für $\lim x = \infty$ gegen 0 konvergiert. *J. Thomae*[8a]) hat Beispiele solcher Integrale gegeben; *P. du Bois-Reymond*[8b]) das Beispiel:

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^6 \sin^2 \alpha}\,d\alpha;$$

Ph. Gilbert zeigt[8c]), dass das Integral:

$$\int_0^\infty (\sin^2 \pi x)^{\varphi(x)}\,dx,$$

wo $\varphi(x)$ positiv ist und von einem bestimmten Wert X an mit x beständig wächst, konvergent ist unter der Bedingung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < 1.$$

Überhaupt ist es auf unendlich viele Arten möglich, eine Funktion $f(x)$ so zu bestimmen, dass sie beständig positiv bleibt, dass sie von einem gegebenen Werte von x an in jedem noch so kleinen Intervalle

---

7) Über die Frage, ob diese Zerlegung stets zulässig ist, vgl. man *F. Hoetvar*, Monatsh. 4, 1893, p. 177 und *W. F. Osgood*, Amer. J. of m. 19, 1897, p. 155.

8a) Zeitschr. Math. Phys. 23, 1877, p. 68. — 8b) Math. Ann. 13, 1878, p. 251. — 8c) Brux. soc. sci. 12, 1887, p. 46; Darb. Bull. 12, 1888, p. 66.

unendlich oft unendlich gross wird und dass doch das Integral: $\int_0^\infty f(x)\,dx$ einen bestimmten Wert hat. *Ch. de la Vallée-Poussin*[9]) gibt die folgenden einfachen Beispiele:

$$\int_0^\infty \frac{\log \sin^2 \alpha x}{1+x^2}\,dx = \pi \log \frac{1-e^{-\alpha}}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{\log \cos^2 \alpha x}{1+x^2}\,dx = \pi \log \frac{1+e^{-\alpha}}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{\log \cos^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)}\,dx = -\pi \log \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{\log \cos^2 \alpha x}{x^2}\,dx = -\alpha\pi.$$

5. Eigenschaften der uneigentlichen bestimmten Integrale. Die uneigentlichen bestimmten Integrale besitzen vermöge ihrer Definition die Eigenschaften (a) und (b) der eigentlichen (**1**); die Eigenschaften (c), (d) und (e) ergeben sich daraus unmittelbar ebenso wie bei diesen. Was die Eigenschaft (f) betrifft, so ist zu bemerken: Wenn $F(x)$ eine Funktion ist, die $f(x)$ zur Ableitung hat, so reduziert sich die Differenz:

$$F(x) - \int_a^x f(x)\,dx,$$

deren Ableitung in jedem der Intervalle $a, c_1, c_2 \ldots c_n, b$ konstant gleich Null ist, in jedem dieser Intervalle auf eine Konstante $k, k_1, k_2 \ldots k_n$ (diese Konstanten können von einander verschieden sein). Sei dann:

$$\Delta = (k_n - k_{n-1}) + (k_{n-1} - k_{n-2}) + \cdots + (k_1 - k) = k_n - k,$$

so hat man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Delta.$$

Die Regel für die teilweise Integration (g) erfährt eine analoge Modifikation; sie wird:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \left[f(x)\,\varphi(x)\right]_a^b - \Delta,$$

9) Brux. soc. sci. 16, 1892, p. 7. Die beiden ersten Beispiele erscheinen in fast identischer Form in *Bierens de Haan*'s recueil, table 415; sie stammen von *Bidone*.

wo Δ die Summe der Sprünge (II A 1, **14**) von $f(x)\varphi(x)$ ist. Wenn eines der Integrale der linken Seite einen bestimmten Wert hat und wenn die rechte Seite endlich ist, hat auch das andere Integral links einen Sinn, und dieser wird durch die vorstehende Formel gegeben. Die Formel (h), Einführung einer neuen Integrationsvariabeln, lässt sich auf jedes Intervall anwenden, in dem das gegebene und das transformierte Integral einen Sinn haben; ferner, unter den angegebenen Konvergenzbedingungen, auf jedes Integral, das einen Grenzwert liefert[10]).

6. Integration unendlicher Reihen. Die gliedweise Integration unendlicher Reihen nach der Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_0^\infty f_n(x)\,dx = \sum_0^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx$$

bietet keine Schwierigkeit, wenn die zu integrierende Reihe im Intervall *gleichmässig* konvergiert. Aber die Gleichmässigkeit der Konvergenz ist keineswegs eine notwendige Bedingung für die Zulässigkeit der gliedweisen Integration[11]).

7. Bestimmte Integrale, die einen Parameter enthalten. Die Untersuchung derjenigen bestimmten Integrale, die ausser der Integrationsvariabeln noch einen andern veränderlichen Parameter unter dem Integralzeichen enthalten, ist fundamental für die Fragen der Differentiation und Integration „unter dem Zeichen".

Eine der zuerst sich darbietenden Fragen ist: Sei:

$$\Psi(y) = \int_a^b f(x, y)\,\varphi(x)\,dx$$

ein (eigentliches oder uneigentliches) bestimmtes Integral; sei vorausgesetzt, dass für alle Werte von x zwischen a und b $f(x, y)$ für

10) *L. Kronecker* (Vorlesungen p. 25) hat den Satz ausgesprochen, dass jedes uneigentliche Integral, das überhaupt einen Sinn hat, durch eine geeignete Transformation in ein eigentliches Integral umgewandelt werden kann. *E. Netto* (ib. p. 342) bemerkt mit Recht, dass Kronecker diesen Satz nicht bewiesen hat und fügt hinzu: Im Falle dass der Integrand beim Unendlichwerden sein Vorzeichen nicht ändert, lässt sich die Richtigkeit des Satzes leicht nachweisen. Vgl. auch *H. Padé*, Ann. éc. norm (3), 6, 1889, p. 349.

11) *P. du Bois-Reymond*, Münch. Abh. 12, 1876, Berl. Ber. 1886, p. 359; *U. Dini*, Fondamenti, 1878, p. 397; *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1878, p. 541; *D. Seliwanoff*, Bull. soc. math. 10, 1882, p. 147; *O. Stolz*, Math. Ann. 26, 1885, p. 82 und Grundzüge p. 425; *C. Arzelà*, Linc. Rend. (1) 1, 1885, p. 262, 321, 532, 566; (5) 6, 1897, p. 290; *W. F. Osgood*, Amer. J. of m. 19, 1897, p. 155.

$\lim y = h + 0$ einen bestimmten Grenzwert $g(x)$ habe; unter welchen Bedingungen darf man setzen[12]):

$$\lim_{y=h+0} \int_a^b f(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx?$$

Daran schliesst sich die Frage nach den Bedingungen, unter denen man unter dem Integralzeichen differentiieren, d. h.:

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

setzen darf[13]). — Die Integration unter dem Zeichen führt ausserdem auf die Untersuchung der mehrfachen Integrale.

8. **Mehrfache bestimmte Integrale.** *Ch. de la Vallée-Poussin* gelangt in Beantwortung einer von der société scientifique de Bruxelles gestellten Preisaufgabe[14]) zu folgenden Resultaten:

Sei die gleichmässige Konvergenz (équiconvergence) eines Integrals folgendermassen definiert:

$\int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx$ heisst *in dem endlichen Intervalle* $(a \ldots b)$ des Parameters α *gleichmässig konvergent*, wenn man jeder positiven Grösse ε eine Zahl N' so zuordnen kann, dass $\left|\int_N^\infty f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$ ist für jedes α des Intervalls $(a \leqq \alpha \leqq b)$ und für jedes $N > N'$. Man spricht von *gleichmässiger Konvergenz in einem willkürlichen Intervall*, wenn diese Bedingung für jeden Wert von b erfüllt werden kann; *in einem unbegrenzten Intervall* $(A \cdots \infty)$, wenn sie durch *einen und denselben* Wert von N' erfüllt werden kann für jedes $\alpha > A$. Die Konvergenz heisst *im allgemeinen gleichmässig*, wenn die Bedingungen für eine

12) *G. F. Meyer*, Best. Integrale p. 181 und Math. Ann. 6, 1874, p. 317; *C. Arzelà*, Linc. Rend. (4) 1, 1885, p. 532 und Bol. Rend. 1888—89; *E. Hossenfelder*, Progr. Strasburg Westpr. 1891. Vgl. die Darstellung bei *Stolz*, Grundzüge p. 440.

13) Vgl. die in Fussn. 11 genannten Arbeiten, sowie *O. Schlömilch*, Compendium 1, § 92; *J. Thomae*, Integrale, § 31; *W. F. Osgood*, Monatsh. 7, 1896, p. 90.

14) Brux. soc. sci. 16, 1891—92, p. 150. Der Berichter *C. Jordan* bemerkt ib. p. 124 mit Recht, dass der Wortlaut der Aufgabe („en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibniz") in ihrer ganzen Allgemeinheit ebensowenig eine vollständige Lösung zulässt, als die Frage nach einem allgemeinen Kriterium für die Konvergenz und Divergenz der Reihen (I A 3, **30**).

endliche Anzahl Werte von α nicht mehr erfüllt sind. Dies vorausgesetzt, besteht die Gleichung:

$$\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_p^\infty dx \int_a^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha,$$

wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind[15]):

1) Für $\lim x = \infty$ konvergiert $\int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx$ im allgemeinen gleichmässig in einem willkürlichen Intervall $(a \ldots A)$.

2) Für $\lim x = \infty$ konvergiert $\int_p^\infty dx \int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha$ gleichmässig in einem unbegrenzten Intervall $(A \cdots \infty)$.

3) Für $\lim \alpha = \infty$ konvergiert $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha$ im allgemeinen gleichmässig in einem willkürlichen Intervall $(p \ldots N)$.

4) Für $\lim \alpha = \infty$ konvergiert $\int_a^\infty d\alpha \int_p^x f(x,\alpha)\,dx$ gleichmässig in einem unbegrenzten Intervall $(p \cdots \infty)$.

5) Eines der beiden Integrale $\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx$, $\int_p^\infty dx \int_a^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha$ hat einen bestimmten Sinn.

Wenn das Doppelintegral $\mathfrak{S} f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha$, in dem x von p bis q und α von a bis b variiert, einen bestimmten Sinn hat, lässt es sich durch zwei successive Integrationen berechnen, so dass man hat:

$$\mathfrak{S} f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha = \int_a^b d\alpha \int_p^q f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Gilt das auch noch für $\lim b = \infty$, $\lim q = \infty$? *Ch. de la Vallée-Poussin*[16]) gibt folgendes Beispiel für das Gegenteil: Sei $f(x,\alpha) = f(\alpha)$ und: $= 0$ für irrationale α, $= \frac{1}{n}$, wenn $\alpha =$ dem irreducibeln Bruch $\frac{m}{n}$ ist. Dann ist das Doppelintegral, wenn x und α von 0 bis ∞ variieren, bestimmt und zwar $= 0$; ebenso ist $\int_0^\infty f(\alpha)\,d\alpha = 0$. Dagegen

15) ib. p. 166.
16) ib. p. 179.

ist $\int_0^\infty f(\alpha)\,dx = 0$ für irrationale und unendlich gross für rationale α; also hat $\int_0^\infty d\alpha \Big[\int_0^\infty f(\alpha)\,dx\Big]$ keine Bedeutung.

Es ist daher erforderlich, die *mehrfachen Integrale* für sich, unabhängig von ihrer Entstehung durch successive Integrationen zu untersuchen. Diese Untersuchung muss sich auf die Begriffe der Mengenlehre (I A 5, III) stützen[17]). *C. Jordan* hat die von *G. Darboux*[18]) eingeführten Begriffe der Integrale „par défaut" und „par excès" ausgedehnt und gezeigt, dass die n-fache Integration einer integrabeln Funktion über einen messbaren Bereich auf n successive einfache Integrationen zurückgeführt werden kann[19]).

Was die Bedingungen betrifft, unter denen die Transformation der mehrfachen Integrale durch Einführung neuer Variabeln ausgeführt werden kann, so seien:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \varphi_1(u, v)$$

die Transformationsformeln, die den Bereich E' der Variabeln x, y in den Bereich E der Variabeln u, v überführen; dann ist für die Geltung der Transformationsformel:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{E'} f(x, y)\,dx\,dy = \mathop{\mathfrak{S}}_{E} F(u, v)\,|J|\,du\,dv$$

hinreichend, dass:

1) jedem Punkt x, y ein Punkt u, v und umgekehrt entspricht;

2) die Ableitungen von φ und φ_1 im allgemeinen stetig sind und die Funktionaldeterminante J im allgemeinen von Null verschieden ist; beides in dem Sinne, dass die Menge der Punkte von E', für die Ausnahmen eintreten, den Inhalt 0 hat (I A 5, **15**);

3) dass das umzuformende Integral einen endlichen bestimmten Wert hat.

---

17) *H. Hankel,* Progr. Tübingen 1870, abgedr. Math. Ann. 20, 1882, p. 63; *P. du Bois-Reymond,* J. f. Math. 79, 1874, p. 38; *A. Harnack,* Math. Ann. 19, 1882, p. 238; 24, 1883, p. 217; Elemente der Diff. u. Int. R. p. 309; *M. Pasch,* Math. Ann. 30, 1887, p. 132.

18) Ann. éc. norm. (2) 4, 1875, p. 57; vgl. auch *V. Volterra,* Giorn. di mat. 19, 1881, p. 76; *M. Pasch,* Math. Ann. 30, 1887, p. 144; *G. Peano,* Torino Atti 18, 1883, p. 439; Ann. di mat. (2) 23, 1895, p. 153 und *G. Ascoli,* Linc. Atti (2) 2, 1875, p. 863; Ann. di mat. (2) 23, 1895, p. 67.

19) J. de math. (4), 8, 1892, p. 69; cours d'anal. 1, p. 42; 2, p. 66. Vgl. II A 2, **31**.

Für die fundamentale Formel:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy \begin{cases} = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx \end{cases}$$

hat *A. Pringsheim* eine „vereinfachte Darstellung der zu einer vollkommen strengen Auffassung und Begründung dieser Formel dienenden Betrachtungen" gegeben[20]).

Ch. de la Vallée-Poussin untersucht, ebenfalls unter Benutzung der Mengenlehre, den Fall, dass die unter dem Integralzeichen stehende Funktion Unstetigkeiten darbietet[21]), sowie den Fall bedingter Konvergenz[22]).

9. Verschiedene Methoden zur Auswertung der bestimmten Integrale. Wenn es möglich ist, ein bestimmtes Integral, das von einem oder mehreren Parametern abhängt, durch sog. elementare Funktionen dieser Parameter auszudrücken, so kann ein solcher Ausdruck durch sehr verschiedene Methoden gefunden werden[23]). Eine Zusammenstellung von solchen Resultaten findet sich in *Bierens de Haan*'s Integraltafeln[24]); hier seien nur die folgenden erwähnt:

9a. Bestimmte Integrale aus unbestimmten abgeleitet. Die Gleichung

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

führt zu dem bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

---

20) Münch. Ber. 1898, p. 59.

21) J. de math. (4) 8, 1892, p. 421.

22) ib. p. 453; vgl. auch *O. Stolz*, Wien. Ber. 107, 1898, p. 207.

23) *Bierens de Haan*, exposé de la théorie ... des intégrales définies, Amsterdam 1862; *F. Gebensleben*, Progr. Nordhausen 1887.

24) Trotz sorgfältiger Vorarbeit enthält die 1. Aufl. dieses wertvollen Sammelwerks zahlreiche Inkorrektheiten, die teils aus den benutzten Quellen herrühren, teils Folge der bei einem derartigen Unternehmen unvermeidlichen Schreib- und Druckfehler sind. In der 2. Aufl. sind viele (nicht alle) davon verbessert, dafür sind die Litteraturnachweise weggelassen. Vgl. die Korrekturen von *C. F. Lindman*, Stockh. Handl. Bih. 10, 1885; Stockh. Öfv. 47, 1890, p. 353; 49, 1892, p. 5. — Die Zusammenstellung bei *W. Láska*, Sammlung von Formeln, Braunschw. 1888, p. 220 ff., ist mit Vorsicht zu benutzen.

wenn die Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $(a \ldots b)$ eindeutig und stetig ist; andernfalls kann der Gebrauch dieser Formel zu Fehlern führen. Ein Beispiel hiefür bietet das Integral[25]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\, dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = \frac{\mu}{|\mu|}\,\pi.$$

Erwähnt seien noch:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx = \frac{1}{p} \qquad (\text{wenn } \Re(p) > 0)^{26}).$$

9b. Auswertung bestimmter Integrale mit Hilfe ihrer Definition als Grenzwerte von Summen. Die Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \left\{ \delta \sum_{n=0}^{p-1} f(a+n\delta) \right\}, \quad p\delta = b-a,$$

gestattet die direkte Ableitung der folgenden Formeln:

$$\int_a^b x^x dx = \frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{x+1} \quad (x \neq -1), \qquad \int_a^b c^x\,dx = \frac{c^b - c^a}{\log c}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \log(1-2\alpha x+\alpha^2)\,dx = \begin{cases} \pi \log \alpha^2, & |\alpha| > 1 \\ \pi, & |\alpha| < 1 \end{cases};$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi,$$

da die auftretenden Summationen leicht ausgeführt werden können[27]).

9c. Substitution neuer Variabeln. Setzt man in dem Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$x = py$, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{x}\,dx = \frac{p}{|p|}\,\frac{\pi}{2}.$$

---

25) *G. F. Meyer,* Bestimmte Integrale p. 67. — Ein Zeichen, das $+1$ oder -1 bedeutet, je nachdem μ positiv oder negativ ist, ist unentbehrlich. Kronecker (Vorlesungen) gebraucht sgn μ.

26) $\Re(p)$ bedeutet den reellen Bestandtheil der komplexen Grösse p.

27) Vgl. auch *E. Netto,* Ztschr. Math. Phys. 40, 1895, p. 180.

Ebenso wird erhalten:

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx = \frac{1}{k^a}\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}.$$

Wenn die beiden Integrale:

$$P = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\log x\,\frac{dx}{x}, \quad Q = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x} \quad (a>0)$$

eine Bedeutung haben, so besteht die Relation[28]):

$$P = Q\log a.$$

9d. Teilweise Integration. Für $\Re(a)>0$ ergibt sich aus der Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx = \left[\frac{x^a}{ae^x}\right]_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x} x^a\,dx$$

die Relation:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\,\Gamma(a+1).$$

Dieselbe Methode liefert die Relation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,dx;$$

sie führt zu der Formel von *Wallis:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots.$$

Das Integral:

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x^2} - \frac{(a-b)e^{-ax}}{x}\right)dx$$

oder allgemeiner das Integral:

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x^n} - \frac{a-b}{1}\frac{e^{-ax}}{x^{n-1}} - \frac{(a-b)^2}{2!}\frac{e^{-ax}}{x^{n-2}} - \ldots - \frac{(a-b)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{e^{-ax}}{x}\right)dx,$$

(a, b reell und positiv) lassen sich ebenso erhalten.

---

28) Die Substitution $\frac{x}{a}+\frac{a}{x} = y$ führt zu einer Zerlegung der Integrale in Bestandteile und damit zum Beweis der Relation. Besser ist es, $x = ae^u$ zu substituieren (*J. Liouville*, J. de math. (2), 1869, p. 300).

9e. Differentiation unter dem Integralzeichen. Das Integral:

$$\int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$$

gibt:

$$\int_0^1 x^p \log x \, dx = \frac{-1}{(p+1)^2}.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

bestimmen. — Aus dem Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$$

leitet man durch Differentiation ab:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}$$

und folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man[29]) eine Reihe weiterer Integrale, insbesondere:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^n}.$$

9f. Integration unter dem Integralzeichen. Das Integral:

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

gibt:

$$\int_0^1 \frac{(x^p - 1)\, dx}{\log x} = \log(p+1).$$

---

29) *B. Tortolini*, J. f. Math. 34, 184, p. 101.

Ebenso erhält man aus:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

durch Integration in Bezug auf a zwischen den Grenzen a und b:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx = \log a - \log b.$$

Dasselbe Verfahren führt von:

$$\int_0^\infty \frac{\sin zx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{zu} \quad \int_0^\infty \frac{\cos qx - \cos px}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(p-q).$$

9g. Auflösung einer Gleichung. Aus:

$$J_1 = \int_0^\pi x \sin^a x\,dx = \int_0^\pi (\pi - x)\sin^a x\,dx = \pi\int_0^\pi \sin^a x\,dx - J_1$$

folgt:

$$J_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^a x\,dx;$$

ebenso aus:

$$J_2 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - J_2,$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ist ferner:

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx,$$

so ist auch:

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx$$

und folglich:

$$2J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin 2x - \log 2)\,dx = J_3 - \log 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

$$J_3 = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Setzt man in dem Integral:

$$J_4 = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

$x = \operatorname{tg}\varphi$ und dann $\frac{\pi}{4} - \varphi$ für φ, so erhält man:

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right] d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{2}{1+\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\,d\varphi - J_4$$

und folglich:

$$J_4 = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Setzt man endlich:

$$K = \int_0^\infty e^{-px^2}\,dx,$$

so erhält man:

$$K^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-px^2(x^2+y^2)}\,dy = \int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-px^2(1+z^2)}\,x\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2p}\,\frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4p}$$

(indem man $y = zx$ setzt); also:

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

9h. Integration von Differentialgleichungen. Aus:

$$u = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\,ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

erhält man:

$$\frac{du}{da} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \text{also} \quad u = \frac{\pi}{2}\log\left(a+\sqrt{1+a^2}\right).$$

Aus:

$$v = \int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx$$

folgt:

$$\frac{dv}{da} + 2v = 0, \quad \text{also} \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2a}.$$

Aus:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(p + q \operatorname{tg}^2 x)^n}$$

erhält man:

$$J_n = \frac{-1}{n-1}\frac{dJ_{n-1}}{dp} = \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}J_1}{dp^{n-1}}$$

und daraus:

$$J_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2(pq)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{\pi}{2\sqrt{q}}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right).$$

S. D. Poisson[30a]), *E. Catalan*[30b]) und *J. A. Serret*[30c]) haben die Differentialgleichung untersucht, der das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1 + x^2)^n}\frac{dx}{x}$$

oder vielmehr die Funktion:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1 + x^2)^n}\frac{dx}{x} - \frac{\pi}{2}$$

genügt.

In der mathematischen Physik[31]) kommen die Integrale vor:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\frac{\alpha^2}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos(\alpha\sqrt{2}),$$

$$v = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\frac{\alpha^2}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin(\alpha\sqrt{2}).$$

9i. Zerlegung des Integrationsintervalls. Man findet:

$$J = \int_0^{n\pi} x \log\sin^2 x\, dx = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \int_{\varkappa\pi}^{(\varkappa+1)\pi} x \log\sin^2 x\, dx = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (\varkappa\pi + x) \log\sin^2 x\, dx$$

$$= -\pi^2 \log 2 \sum_{\varkappa=0}^{n-1} (2\varkappa + 1) = -n^2\pi^2 \log 2.$$

30a) J. éc. polyt. cah. 16, 1838, p. 222; N. Bull. soc. philom. n° 50. 30b) J. de math. 5, 1840, p. 110. 30c) ib. 8, 1843, p. 1.

31) Vgl. z. B. *B. Riemann*, part. Diff.-Glchgen p. 134 (3. Aufl. p. 140).

Ebenso:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + - \cdots\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

9k. Reihenentwicklung unter dem Integralzeichen[32]).

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^{2n-1}}{1-x}\,dx = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 x^p (\log x)^{2n-1}\,dx = (-1)^{2n-1}(2n-1)! \sum \frac{1}{\varkappa^{2n}}$$

$$= -\frac{2^{2n-2}}{n}\,\pi^{2n} B_n, \quad \text{(vgl. 18)},$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa-1} \int_0^1 \frac{x^{\varkappa-1}}{\varkappa}\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

In vielen Fällen hat man mehrere dieser Methoden zugleich anzuwenden.

10. Der Satz von Cauchy. Obwohl der Theorie der Funktionen komplexen Arguments (II B 1) angehörig, muss seiner Anwendungen wegen der Satz hier Erwähnung finden: *Wenn die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $f'(x)$ im Innern und auf der Begrenzung eines zusammenhängenden Bereiches eindeutig und stetig sind, so ist das Integral $\int_c f(z)\,dz$, in positivem Sinne erstreckt um die ganze Begrenzung, gleich* 0.

Sind z. B. in der Ebene vier Punkte $ABB'A'$ gegeben, entsprechend den komplexen Grössen:

$$a, \quad a + ib, \quad -a + ib, \quad -a,$$

so ist das Integral $\int e^{-z^2}\,dz$, genommen längs des so bestimmten Parallelogramms, gleich Null. Lässt man die Seiten AB und $A'B'$ ins Unendliche rücken, so konvergieren die längs dieser Seiten genommenen Integrale gegen 0 und man erhält folglich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - 2ibx + b^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

und daraus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-b^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2bx\,dx = 0.^{33})$$

---

32) Weitere Beispiele bei *R. Mildner*, Wien. Denkschr. 48., 1884, p. 317.

33) Weitere Beispiele in den funktionentheoretischen Lehrbüchern (z. B.

11. Integration rationaler Brüche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. Damit das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx,$$

in dem $\varphi(x)$ und $f(x)$ rationale ganze Funktionen von x ohne gemeinsamen Teiler sind, eine Bedeutung habe, ist notwendig (**3**), dass der Grad von f um mindestens zwei Einheiten höher ist als der von φ, und dass keine Nullstelle des Nenners reell ist. Man erhält dann den Wert des Integrals durch Zerlegung in Partialbrüche (II A 2, **26**):

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \frac{1}{x-\alpha},$$

unter $\alpha = \lambda + \mu i$ irgend eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ verstanden. Man folgert daraus[34]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx = \pi i \sum \left[\pm \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}\right],$$

wo das obere Zeichen für positive, das untere für negative μ gilt. *Cauchy*'s Satz gestattet dieses Resultat in der andern Form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx = 2\pi i \sum A$$

darzustellen, in der $\sum A$ die Summe der Residuen bedeutet, die zu den in der oberen Halbebene gelegenen Polen von $\varphi(x) : f(x)$ gehören.

Speziell erhält man daraus die Formeln:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\, dx = \frac{\pi}{2q \sin \frac{2p+1}{2q}\pi},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} - x^{2r}}{1-x^{2q}}\, dx = \frac{\pi}{2q}\left(\cot \frac{2p+1}{2q}\pi - \cot \frac{2r+1}{2q}\pi\right)$$

Briot und *Bouquet*, 2me éd., p. 141 ff.; *Forsyth*, § 25; *Harkness* und *Morley*, treatise p. 164; *Kronecker*, Vorl. I, p. 52, 157); ferner bei *J. Schönholzer*, Progr. Kantonssch. Bern 1877; *U. Bigler*, Arch. Math. (2) 9, 1890, p. 60; *Frech*, Progr. Deutsch-Krone, 1891; *V. Jamet*, Nouv. Ann. (3) 15, 1896, p. 372; *E. Fabry*, ib. p. 504.

34) Vgl. z. B. *G. F. Meyer*, best. Int. p. 74.

(für positive ganze Zahlen p, q, r, $p < q$, $r < q$). Überhaupt gelten für beliebige echte Brüche a, b die Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\,dx = \pi\,(\cot a\pi - \cot b\pi),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx = \pi \cot a\pi\,.$$

12. Γ-Funktion. Das Problem der Interpolation der Reihe: 1, 2, 6, 24, 120 . . . hatte die Aufmerksamkeit von *Chr. Goldbach* und *D. Bernoulli* auf sich gezogen; wahrscheinlich durch den letzteren wurde *L. Euler* veranlasst sich mit der Frage zu beschäftigen. Er gelangte sofort zu der Darstellung eines beliebigen Terms durch das bestimmte Integral[35]):

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx.$$

12a. Verschiedene Definitionen der Gammafunktion. *A. M. Legendre*[35a]) nennt *Euler'sches Integral zweiter Art* oder *Gammafunktion* das von dem Parameter a abhängige Integral:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx. \tag{1}$$

Dasselbe hat Bedeutung, wenn der reelle Teil von a positiv ist. Durch Einführung neuer Variablen erhält man die beiden Formen:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{a-1} dy \tag{2}$$

und:

$$\Gamma(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az} e^{-e^z}\,dz. \tag{3}$$

Euler hat neben der Form (2) auch schon die Form (1) benutzt[36]). *Gauss* erklärte (3) für die beste Definition[37]). Das *Zeichen* Γ stammt von *Legendre; Gauss'* Bezeichnung $\Pi(a-1)$ ist nicht allgemein ac-

35) Brief von *Euler* an *Goldbach* vom 8. I. 1730, corresp. math. phys. éd. *P. H. Fuss* (St. Pétersb. 1843), **1**, p. 13.

35a) Exercices de calcul intégral 2 (Paris 1814), p. 4.

36) Instit. calc. integr. 4, p. 337 (nach einem Mscr. a. d. J. 1781).

37) Ges. W. 3, p. 230 (aus dem Nachlass).

ceptiert worden, obwohl sie der Beziehung der Funktion zu den Fakultäten deutlicher Ausdruck giebt.

Das bestimmte Integral definiert eine eindeutige Funktion von a für jedes a mit positivem reellen Bestandteil. Aus dieser Definition der Funktion $\Gamma(a)$ in einer Halbebene kann man die Existenz einer in der ganzen Ebene eindeutigen analytischen Funktion ableiten, die mit der ersteren in deren Definitionsbereich übereinstimmt. Setzt man nämlich, unter ω eine reelle positive Grösse verstanden:

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a), \quad P(a) = \int_0^{\omega} e^{-x} x^{a-1}\, dx, \quad Q(a) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx,$$

so ist $Q(a)$ in der ganzen Ebene eindeutig, endlich und stetig; $P(a)$ ist durch das Integral auch nur für $\Re(a) > 0$ definiert, aber man erhält durch Entwicklung des Faktors e^{-x} in eine Reihe den Ausdruck:

$$P(a) = \frac{\omega^a}{a} - \frac{\omega^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{\omega^{a+2}}{a+2} - + \cdots,$$

der für jeden Wert von a konvergiert, der nicht Null oder eine negative ganze Zahl ist[38]). *O. Schlömilch*[39]) nennt $P(a)$ „unvollständige Gammafunktion“ und giebt für sie eine für kleine Werte von ω brauchbare Entwicklung. Für grosse a und kleine ω ist auch die Formel von *Hocevar*[40]) nützlich:

$$P(a) = \frac{\omega^a e^{-\omega}}{a}\left[1 + \frac{\omega}{a+1} + \frac{\omega^2}{(a+1)(a+2)} + \cdots\right].$$

Für grosse ω dient die semikonvergente Entwicklung:

$$Q(a) = \log \omega[\omega^{a-1} + (a-1)\omega^{a-2} + (a-1)(a-2)\omega^{a-3} + \cdots].$$

C. F. Gauss[41]) wählt die Formel:

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{n!\, n^a}{a(a+1)\cdots(a+n)}\right]$$

zur Definition der Funktion $\Gamma(a)$, bezw. $\Pi(a-1)$, da sie für *alle*

---

38) Bis auf die Bezeichnung schon bei *Legendre* (exerc. 1, p. 239); dann bei *A. de Gasparis*, Nap. Rend. Sept. 1867; aber erst *F. E. Prym* (J. f. Math. 82, 1877, p. 165) hat die bemerkenswertesten Konsequenzen aus dieser Zerlegung gezogen. (Vgl. *Ch. Hermite*, cours autogr., 15me leçon, p. 138 der 4me éd., 1891, und J. f. Math. 91, 1881, p. 332.) *L. Bourguet* (thèse Paris 1881: Ann. éc. norm. (2) 10, 1881, p. 175) giebt eine Darstellung der Resultate von *Prym* und *Hermite* und eine Entwicklung von $P(a)$ in eine Reihe nach negativen Fakultäten.

39) Compendium 2, p. 261.

40) Ztschr. Math. Phys. 21, 1876, p. 449.

41) Gott. Comm. rec. 2. 1813 = ges. W. 3, p. 145.

Werte des Arguments eine bestimmte Bedeutung hat[42]). Man gelangt zu ihr von der Definition durch ein bestimmtes Integral aus mit Hilfe der Gleichung:

$$e^{-x} = \lim_{m=\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m.$$

Die *Gauss*'sche Formel führt unmittelbar zu der Reihenentwicklung[43]):

$$\log\left(a\,\Gamma(a)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right].$$

Statt neue Definitionen der Gammafunktion durch unendliche Reihen oder Produkte einzuführen, kann man auch die Definition durch ein bestimmtes Integral so modifizieren, dass sie für jeden Wert des Arguments Bedeutung erhält. Das Verfahren beruht auf einer Idee von *B. Riemann*[44]): statt das Integral von einem singulären Punkt der integrierenden Funktion zu einem andern zu erstrecken, führt man es auf einem Wege um die singulären Punkte herum. *H. Hankel*[45]) und *U. Bigler*[46]) haben das ausgeführt. Man kann als Definition nehmen:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{-a}\,dx,$$

indem man den Integrationsweg vom Punkt ∞ der Halbaxe der negativ reellen Zahlen ausgehen, den Nullpunkt in positivem Sinn umkreisen und zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren lässt. Der Wert von $x^{-a} = e^{-a\log x}$ ist in jedem Punkte eines solchen Weges definiert, sobald man den Wert von $\log x$ für einen besonderen Punkt desselben festlegt, z. B. den Logarithmus im Schnittpunkt des Weges mit der Halbaxe der positiv reellen Zahlen reell nimmt. Ein solches Integral heisst *Schleifenintegral*[46a]); es definiert eine Funktion von a für jedes a. Man kann von dieser Definition aus zu den früheren durch die Gauss'sche Formel oder das Euler'sche Integral gelangen

42) Über *Gauss*' Gründe bei der Wahl dieser Definition vgl. man seinen Brief an *Bessel* vom 21. XI. 1811, Briefwechsel p. 162. — Die Formel selbst findet sich schon bei *Euler* in einem Briefe an *Goldbach* von 13. X. 1729, corresp. math. phys. p. 3; *Euler* ist erst von ihr aus zu der Integraldarstellung gelangt.

43) *J. Liouville*, Par. C. R. 35, 1852, p. 319; die Formel ist eine einfache Umformung einer von *Chr. Gudermann* (J. f. Math. 29, 1845, p. 209) gegebenen.

44) Man vgl. *Riemann's* Auffassung der Perioden algebraischer Integrale, sowie das nachgelassene Fragment XXIII [1863], insbes. die Figuren p. 428 der 2. Aufl. der ges. W.; eine Andeutung auch Nr. IV, art. 7 a. E. p. 82 [1857].

45) Ztschr. Math. Phys. 9, 1864, p. 7. Vgl. auch *C. Schellenberg*, Diss. Gött. 1892, p. 10.

46) J. f. Math. 102, 1888, p. 237.

46a) *A. Clebsch* und *P. Gordan*, Abel'sche Funktionen (Lpz. 1866), p. 82.

Man kann auch $\Gamma(a)$ selbst durch ein Schleifenintegral mit demselben Integrationsweg darstellen[47]):

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int e^x x^{a-1}\, dx.$$

Dagegen ist in der Gleichung[48]):

$$-\frac{2\pi i e^{\pi i a}}{\Gamma(1-a)} = \int e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

der Integrationsweg eine Linie, die vom Punkt ∞ der Halbaxe der positiv reellen Zahlen im negativen Sinn um den Nullpunkt herum zu ihrem Ausgangspunkt zurückführt; im Schnittpunkt $-t$ des Weges mit der Halbaxe der negativ reellen Zahlen ist als Wert von $\log x$ der Wert $\log t + \pi i$ zu nehmen.

12b. Eigenschaften der Γ-Funktion. Man hat die *Funktionalgleichung:*

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a). \tag{1}$$

Sie genügt übrigens nicht zur Definition der Γ-Funktion; jede Funktion der Form:

$$F(a) = \Gamma(a)\,\varphi(a)$$

genügt derselben Gleichung, wenn $\varphi(a)$ eine periodische Funktion der Periode 1 ist.

Ist a gleich einer positiven ganzen Zahl $n+1$, so hat man[49]):

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

Ist $a = 0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl, so hat man:

$$\Gamma(0) = \Gamma(-n) = \infty.$$

---

47) *F. Pochhammer* (Math. Ann. 35, 1890, p. 497; 41, 1893 [91], p. 157) bezeichnet das in dieser Gleichung auftretende Integral mit $\overline{\Gamma}(a)$.

48) *F. Klein*, autogr. Vorl. hypergeom. Funkt., 1894, p. 138.

49) Statt des Zeichens $n!$ hatte *Euler* Δ benutzt; in England schreibt man häufig $\underline{|n}$. Eine unmittelbare Verallgemeinerung führt zu dem Ausdruck:

$$a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d),$$

der von *C. Kramp* (réfractions astronomiques, Strassb. 1799, chap. 3) mit $a^{n|d}$, von *B. L. Crelle* (J. f. Math. 7, 1831) mit $(a,+d)^n$ und für $d=1$ von *Vandermonde* (Par. Hist. 1772, p. 489) mit $[a]^n$ bezeichnet wird. Die Untersuchungen über diese allgemeinen Fakultäten von *Bessel* (ges. Werke 2, p. 342), *J. A. Eytelwein* (Grundlagen der höheren Analysis), *A. Müller* (J. f. Math. 11), *L. Oettinger* (ib. 33, 35, 38, 44), *M. Ohm* (ib. 39), *J. A. Raabe* (ib. 43, 48) führten auf Schwierigkeiten, die ihre Aufklärung erst durch *Weierstrass*' (Progr. Progymn. Deutsch-Crone, 1843 = ges. W. 1, p. 87; J. f. Math. 51, 1856 = ges. W. 1, p. 153) Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Definition solcher Funktionen fanden.

Eine zweite Fundamentaleigenschaft ist durch die *„relation des compléments“* gegeben:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}; \tag{2}$$

sie giebt speziell eines der ersten Resultate *Euler*'s in dieser Theorie:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

und führt auch zu der folgenden Formel *Euler*'s[50]):

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\,\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}.$$

Eine Verallgemeinerung der letzteren ist die Formel von *Gauss*[51]):

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}\,n^{-na}\,\Gamma(na). \tag{3}$$

Weierstrass[52]) gibt die Relation:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{(n-1)!\,n^a} = 1,$$

die zusammen mit der Funktionalgleichung die Γ-Funktion definiert.

O. Hölder[53]) endlich hat gezeigt, dass die Γ-Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.

12c. Reihenentwicklung von log Γ. Die Definition von *Gauss:*

$$\Gamma(a+1) = \lim_{n=\infty}\frac{n^a}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

führt unter der Voraussetzung $|a|<1$ direkt zu der Entwicklung:

50) Vgl. Darb. Bull. (2) 4, p. 209. — Von den verschiedenen Definitionen der Γ-Funktion aus sind verschiedene Beweise dieser Euler'schen Formeln gegeben worden.

51) Ges. W. 3, p. 149. — *Legendre* hatte einen speziellen Fall dieser Formel gefunden; er beweist die allgemeine Formel mit Hilfe der Reihenentwicklungen der Ableitungen von log $\Gamma(a+1)$ (exerc. 2, p. 16). *J. Liouville* (Par. C. R. 42, 1856, p. 501 und J. de math. (2) 1, 1856, p. 82) nahm vielfache Integrale zu Hilfe; *N. Sonine* (Bull. soc. math. 9, 1881, p. 162) funktionentheoretische Betrachtungen. Andere Beweise bei *P. G. Lejeune-Dirichlet* (J. f. Math. 15, 1836, p. 258 = ges. W. 1, p. 279), *W. A. Stern* (J. f. Math. 21, 1840, p. 377), *Ph. Gilbert* (Brux. Mém. 41, 1875, p. 55). *A. L. Cauchy* (exerc. d'anal. 2, 1841, p. 390) hat sich allgemeiner mit der Aufsuchung linearer Gleichungen zwischen den verschiedenen Werthen von log $\Gamma(a)$ beschäftigt.

52) J. f. Math. 51, 1856 = ges. W. 1, p. 193.

53) Math. Ann. 28, 1886, p. 1; vgl. auch *E. H. Moore*, ib. 48, 1897, p. 70.

$$\log \Gamma(a+1) = -\gamma a + \tfrac{1}{2} S_2 a^2 - \tfrac{1}{3} S_3 a^3 + \tfrac{1}{4} S_4 a^4 - \cdots$$

mit:

$$\gamma = \lim_{n=\infty} \left[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots - \log n\right] = 0{,}57721\,56649\,015328\cdots,$$

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p};$$

γ ist die *Euler*'sche *Konstante* (vgl. unten Nr. **13**). Diese Entwicklung ist von *Euler* gegeben, der auch die ersten Koeffizienten S_p berechnet hat[54]; *Legendre* berichtigte einige Rechenfehler *Euler*'s, gab die Werte der S_p von $p = 2$ bis $p = 35$ auf 16 Dezimalen genau[55] und stellte die rascher konvergierenden Entwicklungen auf[56]:

$$\log \Gamma(a+1) = \tfrac{1}{2} \log \frac{a\pi}{\sin a\pi} - \left(\gamma a + \tfrac{1}{3} S_3 a^3 + \tfrac{1}{5} S_5 a^5 + \cdots\right),$$

$$\log \Gamma(a+1) = \tfrac{1}{2} \log \frac{a\pi}{\sin a\pi} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} + a(1-\gamma) + \frac{a^3}{3}(1 - S_3) + \frac{a^5}{5}(1 - S_5) + \cdots.$$

12d. Die Funktion $\psi(a)$. Setzt man[57]:

$$\frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \psi(a),$$

so hat man z. B.

$$\psi(a) = \lim_{\mu=\infty} \left[\log \mu - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \cdots - \frac{1}{a+\mu}\right],$$

speziell:

$$\psi(1) = -\gamma.$$

Aus den Relationen zwischen Γ-Funktionen erhält man entsprechende Relationen zwischen den aus ihnen abgeleiteten, so z. B. für die *Prym*'schen Funktionen (**12a**) mit $\omega = 1$:

$$P(a+1) = a\,P(a) - \frac{1}{e}, \quad Q(a+1) = a\,Q(a) + \frac{1}{e}.$$

Für $\psi(a)$ geben die drei Relationen (1), (2), (3) von Nr. **12b** bezw.:

54) Inst. calc. diff. p. 800.

55) Exerc. de calc. int. 2, p. 65.

56) ib. 1, p. 296.

57) *Gauss* hatte dieselbe Funktion mit $\Psi(a+1)$ bezeichnet (ges. W. 3, p. 152), *Legendre* mit $\varphi(a)$ und $Z'(a)$ (exerc. 2, p. 16 und 52), *Bierens de Haan* (Integraltafeln) ebenfalls mit $Z'(a)$, *J. Ph. M. Binet* (J. éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 245) mit $\chi'(a)$. *Cauchy*, *Gudermann* und seitdem die meisten Autoren gebrauchen $\psi(a)$. — Für Ausdrücke von $\psi(a)$ vgl. man auch *Legendre* (Exerc. 2, p. 17) und *Gudermann* (J. f. Math. 29, 1845, p. 208).

(1) $$\psi(a+1) = \psi(a) + \frac{1}{a}$$

oder allgemeiner, für ganzzahlige n:

(1a) $$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a+n-1};$$

(2) $$\psi(a) - \psi(1-a) = -\pi \cot a\pi;$$

(3) $$\psi(a) + \psi\left(a+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \psi\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = n\psi(na) - n\log n.$$

Die Funktion $\psi(a)$ gestattet die Entwicklung nach Fakultäten:

$$\psi(a+x) = \psi(a) + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{a(a+1)} + \frac{1}{3}\frac{x(x-1)(x-2)}{a(a+1)(a+2)} - + \cdots;$$

aus ihr erhält man die Darstellung von $\psi(1+a)$ durch ein bestimmtes Integral[58]):

$$\psi(1+a) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{y^a - 1}{y-1}\, dy,$$

die zeigt, dass $\psi(x) - \psi(1)$ für rationale Werte von x sich durch Kreisbogen und Logarithmen ausdrücken lässt[59]). Man hat nämlich für $p < q$:

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \psi(1) &- \frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q} - \log q + \cos\frac{2p\pi}{q}\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right)\\ &+ \cos\frac{4p\pi}{q}\log\left(2-2\cos\frac{4\pi}{q}\right) + \cdots\\ &+ \cos\frac{(q-1)p\pi}{q}\log\left(2-2\cos\frac{(q-1)\pi}{q}\right) \quad \text{(für ungerade } q);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \psi(1) &- \frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q} - \log q + \cos\frac{2p\pi}{q}\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right)\\ &+ \cos\frac{4p\pi}{q}\log\left(2-2\cos\frac{4\pi}{q}\right) + \cdots\\ &+ \cos\frac{(q-2)p\pi}{q}\log\left(2-2\cos\frac{(q-2)\pi}{q}\right) + (-1)^p\log 2\\ &\text{(für gerade } q).\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (1a) lässt sich dieses Resultat auf jeden rationalen Argumentwert ausdehnen.

---

58) *Legendre* (Exerc. 2, p. 46) hatte einen kaum genügenden Beweis dieser Formel gegeben; seitdem verschiedene Beweise von *Cauchy* (J. éc. polyt. cah. 28, 1841, p. 147), *Cisa de Grésy* (Tor. mem. 1821, p. 209), *N. Lobatschefsky* (Kasan Abh. 1835) und *Schlömilch* (Arch. Math. 4 und 9, sowie Studien 1, p. 6).

59) *Gauss*, ges. W. 3, p. 155 (ohne Benutzung des bestimmten Integrals).

Man kann auch $\psi(a)$ selbst durch ein bestimmtes Integral ausdrücken[60]):

$$\psi(a) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\log u} + \frac{u^{a-1}}{1-u}\right) du$$

oder, von der Definition von $\Gamma(a)$ durch ein bestimmtes Integral aus[61]):

$$\psi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-v}}{v} - \frac{e^{-va}}{1-e^{-v}}\right) dv$$

oder endlich[62]):

$$\psi(a) = \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{x}} - x^a\right) \frac{dx}{x(x-1)}.$$

Für $a=1$ erhält man Integraldarstellungen der *Euler*'schen Konstanten.

Aus der *Malmstén*'schen Gleichung

$$\log \Gamma(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-x}}{1-e^{-x}} + (a-1)e^{-x}\right) \frac{dx}{x}$$

hat *Schlömilch*[63]) die *Kummer*'sche *Reihe*[64]) direkt abgeleitet:

$$\log \Gamma(a) = (1-a)\log \pi + \gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) - \frac{1}{2}\log \sin a\pi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{x} \frac{\log 2n}{n} \sin 2na\pi.$$

12e. Die Funktion $\chi(a)$. Aus der Darstellung von $\psi(a)$ als Grenzwert der Differenz zweier ins Unendliche wachsenden Ausdrücke erhält man die für alle a konvergente Reihenentwicklung[65]):

$$\chi(a) = \frac{d^2 \log \Gamma(a)}{da^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(a+n)^2} + \cdots.$$

Diese Funktion $\chi(a)$ ist also in der ganzen Ebene regulär, ausser in

60) ib. p. 155.

61) *Lejeune-Dirichlet*, J. f. Math. 15, 1836, p. 260 = ges. W. 1, p. 275; *J. A. Grunert*, Arch. Math. 2, 1842, p. 266; *Schlömilch*, Studien 1, p. 4; *M. Schaar*, Brux. mém. cour. 22, 1846; *C. J. Malmstén*, J. f. Math. 35, 1847, p. 55.

62) *Dirichlet* a. a. O.

63) Compendium 2, p. 255.

64) J. f. Math. 35, 1847, p. 1; vgl. auch *Ph. Gilbert*, Brux. mém. 41, 1875, p. 16.

65) *Gauss*, ges. W. 3, p. 154. Wie *A. Genocchi* (Brux. Bull. 36, 1873, p. 557) bemerkt, ist diese Formel eine unmittelbare Konsequenz von *Euler*'s Resultaten betr. „*functiones inexplicabiles*". *Hermite* (Cours lithogr.) zeigt, dass man sie zum Ausgangspunkt der Theorie der Gammafunktionen nehmen könnte.

den Punkten 0, -1, $-2\cdots$, die Pole sind. Sie hat folgende Eigenschaften:

(1) $$\chi(a+1)-\chi(a)=-\frac{1}{a^2};$$

(2) $$\chi(a)+\chi(1-a)=\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2$$

(3) $$\chi(a)+\chi\left(a+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\chi\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=n^2\chi(na).$$

Von ihrer Reihenentwicklung aus gelangt man zu neuen konvergenten Entwicklungen für $\psi(a)$ und $\log\Gamma(a)$:

$$\psi(a)=-\gamma+\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{a+n}\right)+\cdots;$$

$$\log\frac{1}{\Gamma(a+1)}=\gamma a+[\log(1+a)-a]+\cdots+\left[\log\left(1+\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n}\right]+\cdots$$

und von da zu der Produktentwicklung[66]):

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{\gamma a}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}\right],$$

aus der hervorgeht, dass $1:\Gamma(a+1)$ eine in der ganzen Ebene reguläre Funktion ist. Man kann sie als Definition der Γ-Funktion nehmen[67]).

12f. Angenäherte Berechnung von $\Gamma(a)$ für grosse Werte des Arguments. Von der *Wallis*'schen Formel;

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2a}{2a-1}\cdot\frac{2a}{2a+1}\cdots$$

---

66) Schon *Euler* (vgl. die in den Fussn. 35 und 42 genannten Briefe an *Goldbach*) und *Gauss* (ges. W. 3, p. 145) hatten Faktorenzerlegungen dieser Art angegeben; *F. Newman* (Cambr. Dubl. J. 3, 1848, p. 59) hatte $\Gamma(a)$ auf die Form gebracht:

$$\Gamma(a)=\frac{e^{-\gamma a}}{a}\cdot\frac{e^{a}}{1+a}\cdot\frac{e^{\frac{a}{2}}}{1+\frac{a}{2}}\cdots,$$

die von *Schlömilch* (Studien 1, p. 45) von der *Gauss*'schen Definition aus wiedergefunden wurde. Aber erst *Weierstrass* (J. f. Math. 51, 1856 = ges. W. 1, p. 153) hat ihre prinzipielle Wichtigkeit, nicht nur für die Γ-Funktionen, sondern überhaupt für die gesamte Theorie der analytischen Funktionen (II B 1) hervorgehoben und die Regularität von $1:\Gamma(a)$ in der ganzen Ebene aus ihr abgeleitet. (Diese Regularität kann andererseits auch leicht aus den Eigenschaften der *Prym*'schen Funktionen $P(a)$ und $Q(a)$ gefolgert werden. *Bourguet*, thèse p. 29.)

67) Eine Anwendung auf eine Verallgemeinerung der relation des compléments bei *Hj. Mellin*, Acta math. 3, 1883, p. 102 und 322.

aus gelangt *J. A. Serret*[68]) für ganzzahlige Werte von a zu der Formel:

$$a! = \Gamma(a+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-a} a^{a+\frac{1}{2}} (1+\varepsilon),$$

wo ε eine positive Grösse und $\lim_{a=\infty} \varepsilon = 0$ ist. Auf demselben Wege gelangt man, ebenfalls für ganzzahlige a, zu der Reihenentwicklung:

$$\log \Gamma(a+1) = \tfrac{1}{2} \log 2\pi + a + \left(a + \tfrac{1}{2}\right) \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(a+n+\tfrac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{a+n}\right) - 1\right].$$

Diese Entwicklung hat aber für alle Werte von a Bedeutung, ausgenommen 0 und die negativen ganzen Zahlen, und ihre zweite Ableitung ist $= \sum (a+n+1)^{-2}$, stimmt also mit der zweiten Ableitung von $\log \Gamma(a+1)$ überein. Die beiden Seiten stimmen also für jedes a überein und die Näherungsformel gilt für jedes a.[69])

Cauchy hat die Näherungsformel zum Beweis der *Gauss*'schen Relation benutzt[70]). Eine andere Anwendung der Näherungsformel und der *Gauss*'schen Relation führt zu der Gleichung[71])

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(a)\, da = \tfrac{1}{2} \log 2\pi + a \log a - a.$$

Aus

$$\Gamma(a+n) = \sqrt{2\pi}\, e^{-a-n} (a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}$$

folgt für $\lim n = \infty$ die *Weierstrass*'sche Relation (**12c**). Ähnlich hat man für die *Prym*'schen Funktionen:

---

68) Par. C. R. 50, 1860, p. 662; cours d'algèbre 2, nr. 391; calc. intégr., nr. 536.

69) Zuerst hatte sich *J. Stirling* (methodus differentialis, 1730) mit der angenäherten Bestimmung von $\log(a!)$ und allgemein von $\log[a(a+z)\ldots(a+nz)]$ beschäftigt. Die Beweise von *Euler* und *Legendre* liessen zu wünschen übrig; die Frage wurde daher von *Cauchy* (exerc. d'anal. 2, 1841, p. 386); *J. Liouville* (J. de math. 4, 1839, p. 317); *Binet* (Par. C. R. 9, 1839, p. 157 und J. éc. polyt., cah. 27, 1839, p. 220); *J. L. Raabe* (J. f. Math. 25, 1843, p. 147 und 28, 1848, p. 10) und *Malmstén* (ib. 35, 1847, p. 55) wieder aufgenommen.

70) Exerc. de math. 2, 1827, p. 91.

71) *Raabe* (J. f. Math. 25, p. 149 und 28, p. 12); *M. A. Stern* (Gött. Studien, 1847); *Malmstén* (J. f. Math. 25, p. 75); *E. G. Björling* (Stockh. Öfv. 1856, p. 181); *Bierens de Haan* (Arch. Néerl. 8, 1873, p. 135 und Amsterd. Versl. 7, 1873, p. 12); *E. Liebrecht* (Arch. Math. 59, 1876, p. 218). Vgl. auch *M. Lerch* (Giorn. di mat. 26, 1888 p. 39) und *Ch. Hermite* (Prag. Ber. 1888, p. 365).

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{Q(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = 1;$$

man kann daher mit ihrer Hilfe eine Funktion konstruieren, die den Bedingungen:

$$S(a+1) = a\,S(a) + l, \quad \lim_{n=\infty} \frac{S(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = k$$

genügt[72]). Γ selbst erscheint dabei als einfachste von diesen Funktionen.

12g. Die Funktion $\varpi(a)$. Setzt man[73]):

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \tfrac{1}{2} \log (2\pi) + \varpi(a),$$

so erhält man aus der *Malmstén*'schen Gleichung (**12e**) für die Funktion $\varpi(a)$, die für $\lim a = \infty$ gegen 0 konvergiert, die Darstellung[74]):

$$\varpi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ax} \frac{dx}{x}.$$

Jeder Reihenentwicklung von $\varpi(a)$ entspricht eine solche von $\log \Gamma(a+1)$. Nun führt die Integraldarstellung von $\varpi(a)$ zu der Entwicklung:

$$\varpi(a) = \frac{B_1}{1\,.\,2}\,\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3\,.\,4}\,\frac{1}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)\,2n}\,\frac{1}{a^{2n-1}}$$
$$+ (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+1)\,(2n+2)}\,\frac{1}{a^{2n+1}},$$

in der $B_1, B_2 \ldots$ die *Bernoulli*'schen Zahlen (vgl. unten **18**) bedeuten; aus ihr erhält man die *Stirling*'sche Formel[75]):

---

72) *F. Prym*, J. f. Math. 82, 1877, p. 165; *L. Bourguet*, thèse p. 16; *A. Pringsheim* (Math. Ann. 31, 1887, p. 460); *L. Schceffer* (J. f. Math. 97, 1884, p. 230); *M. Lerch*, Prag. Ber. 1889, p. 188.

73) Die Funktion $\varpi(a)$, die oft nach *Gudermann* genannt wird, wurde zuerst von *G. Plana* (Tor. Mem. 24, 1820, p. 410) eingeführt, dann von *Binet* (J. éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 225) wiedergefunden. Sie heisst $\mu(a)$ bei *Binet*, $\varpi(a)$ bei *Cauchy* (Par. C. R. 16, 1843, p. 422), $\omega(a)$ bei *E. Catalan* (ib. 77, 1873, p. 198).

74) Vgl. *J. Liouville* (J. de math. 4, 1839, p. 318); *Cauchy* (exerc. d'anal. 2, 1841, p. 384); *M. Schaar* (Brux. mém. cour. 22, 1846, p. 6); *M. A. Stern* (Gött. Studien 1847, p. 134); *A. Genocchi* (Brux. Bull. 21, 1854, p. 84); *Schlömilch* (Studien 1, p. 53; Compendium 2, p. 249).

75) Methodus differentialis 1730. Die Formel ist ein spezieller Fall einer von *Mac-Laurin* gefundenen und gewöhnlich *Euler* zugeschriebenen Summenformel (I E). Sie gehört zu den *semikonvergenten* Reihen, über die man I A 3, **38** vergleiche. Andere, konvergente Entwicklungen, wie die von *Binet* (J. éc. polyt. cah. 27, 1839) gegebenen bieten nicht dieselben Vorteile.

$$\log \Gamma(a+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)\log a + \frac{B_1}{1\,.\,2}\,\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3\,.\,4}\,\frac{1}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{B_n}{(2n-1)\,2n}\,\frac{1}{a^{2n-1}} + (-1)^n\,\theta\,\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{1}{a^{2n+1}}.$$

Bricht man sie bei einem bestimmten Gliede ab, so erlaubt das Restglied, den Fehler abzuschätzen[76]). *Limbourg*[77]) hat gezeigt, dass die Glieder abnehmen bis zu demjenigen, dessen Ordnungszahl zwischen $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7\pi a}$ und $\pi a + \frac{3}{4}$ liegt, wenn a das Argument ist. *Bourguet*[78]) giebt als Wert der Ordnungszahl $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi a}$, unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung[79]).

Man kann[80]) den Ausdruck von $\varpi(a)$ auf die Form bringen:

$$\varpi(a) = \frac{1}{2} - \int_0^\infty \frac{e^x(x-2)+2+x}{x^2(1-e^x)}\,e^{-ax}\,dx$$

und durch Entwicklung der im Zähler stehenden Exponentialfunktion die Formel von *Binet*[81]):

$$\log \Gamma(a+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)\log a + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\,.\,3}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(a+p)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)(n+2)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(a+p)^{n+1}} + \cdots\right]$$

erhalten, die konvergiert, wenn jeder der absoluten Beträge $|a+1|$, $|a+2|\cdots > 1$ ist, die sich aber nicht zu numerischer Berechnung eignet. Auch die öfters *Féaux* zugeschriebene Entwicklung:

76) Vgl. *Cauchy* (exerc. d'anal. 2, p. 395 und Par. C. R. 39, 1854, p. 133); *Schaar* (Brux. mém. cour. 22); *Raabe* (J. f. Math. 25 und 28); *J. Liouville* (J. de math. 17, 1852, p. 448); *Malmstén* (J. f. Math. 35, 1847, p. 55); *G. Bauer* (ib. 57, 1859, p. 256); *A. Genocchi* (Brux. Bull. 21, p. 84; Ann. mat. fis. 3, 1852, p. 406; 5, 1854, p. 150; ib. (2) 2, 1859, p. 367); *O. Bonnet* (Par. C. R. 50, 1860, p. 863); *Ph. Gilbert* (Brux. mém. 41, 1875, p. 20); *Ch. Hermite* (Tor. Atti 14, 1875, p 95); *L. Bourguet* (thèse p. 65).

77) Théorie de la fonction Gamma', Gand 1859.

78) Thèse p. 27.

79) Vgl. auch *T. J. Stieltjes* (J. de math. (4) 5, 1889, p. 425); *Hermite* (J. f. Math. 105, 1889, p. 201, wo auch eine andere Entwicklung derselben Art gegeben ist, und Amer. J. 17, 1895, p. 111); *Hermite* und *Lerch* (Prag. Ber. 1895); *Lerch* (Prag. Rozpr. 3, 1894 nr. 28; 5, 1896, nr. 14 und 23).

80) *Bourguet* a. a. O.

81) J. éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 226.

$$2\,\varpi(a) = \frac{1}{2\,.\,3}\sum\frac{1}{a^2} - \frac{2}{3\,.\,4}\sum\frac{1}{a^3} + \cdots$$

rührt von *Binet*[82]) her.

Man kann auch, wenn man:

$$a_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v\,(1-v)\,(2-v)\cdots(m-1-v)\,dv$$

setzt, von der Integraldarstellung:

$$\varpi(a) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\log(1-t)}\right)\frac{(1-t)^{a-1}}{\log(1-t)}\,dt$$

aus zu der für alle a, besonders gut für hinlänglich grosse a, konvergenten Reihenentwicklung gelangen[83]):

$$\log\Gamma(a+1)$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)\log a - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{a_m}{a(a+1)\cdots(a+m-1)}.$$

Binet hat auch noch eine andere Reihenentwicklung derselben Art[84]):

$$2\,\varpi(a) = \frac{b_0}{a+1} + \frac{1}{2}\,\frac{b_1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{3}\,\frac{b_2}{(a+1)(a+2)(a+3)}\cdots;$$

ihre ersten Koeffizienten $b_0, b_1 \ldots b_{10}$ sind von *Bourguet* gegeben worden[85]).

12h. Berechnung der Gammafunktion. Die Funktionalgleichung zeigt, dass es zur Berechnung der Gammafunktion für alle reellen Werte des Arguments ausreicht, sie für alle Werte in einem Intervall $= 1$ zu kennen, z. B. zwischen 0 und 1 oder zwischen 1 und 2. Die „relation des compléments" erlaubt dieses Intervall auf die Hälfte zu reduzieren. Die Gauss'sche Relation führt zu weiteren Reduktionen: für $n = 2$ erlaubt sie zu zeigen, dass es genügt $\Gamma(a)$ von $a = 0$ bis $a = \frac{1}{4}$ zu kennen; für $n = 3$, dass es genügt, $\Gamma(a)$ von $a = 0$ bis $a = \frac{1}{18}$ und von $a = \frac{5}{18}$ bis $a = \frac{7}{18}$ zu kennen, d. h.

82) Par. C. R. 9, 1839, p. 158.

83) *J. Binet*, J. éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 339 und *Schlömilch*, Compendium 2, p. 260.

84) ib. p. 231.

85) Thèse p. 59. Wegen der Funktion $\varpi(a)$ vgl. man noch *A. Genocchi* (Brux. Bull. 21, 1854, p. 84; 36, 1873, p. 550; Ann. mat. fis. 2, 1859, p. 380); *M. de Tilly* (Brux. Bull. 35, 1873, p. 30); *Ph. Gilbert* (Brux. mém. 41, 1875, p. 14); *M. Lerch* (Prag. Ber. 1893, Nr. XXVI).

in zwei Intervallen, deren Ausdehnung zusammen $= \frac{1}{6}$ ist[86]). Die allgemeine Frage der Bestimmung von solchen Intervallen ist von *Hoppe* in Angriff genommen worden[87]), aber noch nicht gelöst.

Wir haben gesehen, dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ist. Für gewisse Werte von a drückt sich $\Gamma(a)$ durch elliptische Integrale aus, z. B. für $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$[88]); ferner für $a = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}$[89]). *Legendre*[90]) hat sich mit der Reduktion der Werte $\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)$ auf eine möglichst kleine Anzahl von Transcendenten beschäftigt, auch bereits gezeigt, dass es sich für $n = 12$ um elliptische Transcendenten handelt. Durch Induktion gelangt er zu dem Satze: die Anzahl der fundamentalen Transcendenten ist gleich der Anzahl der Zahlen, die prim zu n und nicht grösser als $\frac{1}{2} n$ sind[91]).

Die Formeln von *Euler* und *Legendre* (**12c**) erlauben die Berechnung einer Tabelle von $\log \Gamma(a)$; doch ist der Gebrauch der Stirlingschen Formel vorzuziehen. Will man z. B. $\log \Gamma(a)$ auf 12 Dezimalstellen genau haben, so genügt es, $a > 5$ zu nehmen und 7 oder 8 Glieder dieser Entwicklung zu berechnen.

Legendre hat Tafeln von $\log \Gamma(a)$ von $\frac{1}{1000}$ zu $\frac{1}{1000}$ gegeben[92]), zuerst mit 7, dann mit 12 Dezimalen[92]). *Bessel*[93]) gibt Tafeln von $\log \Gamma(a) : \sqrt{2\pi}$. *Gauss* hat durch *Nicolai* Tafeln von $\log \Gamma(a)$ zu 20 und von $\psi(a)$ zu 18 Dezimalen von $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{100}$ berechnen lassen[94]).

Die Funktion $\Gamma(a)$ hat ein Minimum für:

$$a = 1{,}46163\,21451105;$$

sie hat ausserdem je ein Maximum oder ein Minimum zwischen 0

86) *Legendre*, exerc. 2, p. 26.

87) J. f. Math. 40, 1850, p. 152.

88) *U. Bigler*, J. f. Math. 102, 1887, p. 250.

89) *J. W. L. Glaisher*, Mess. (2) 24, 1895, p. 27.

90) Exercices, passim.

91) Vgl. *E. Catalan*, Brux. mém. 42, 1878, p. 14; *G. Plana* (J. f. Math. 17, 1837, p. 198) und besonders *M. A. Stern* (ib. 67, 1867, p. 114).

92) Exerc. 1, p. 302; 2, p. 86.

93) Ges. W. 2, p. 350.

94) Vgl. den Brief von *Gauss* an *Bessel* vom 5. V. 1812, sowie Gauss' ges. W. 3, p. 154, 161.

und -1, zwischen -1 und -2, u. s. w. Deren Lage ist näherungsweise durch die Formel gegeben[95]):

$$a = -n + \frac{1}{\log n}.$$

Die Funktion $\frac{1}{\Gamma(a)}$, als in der ganzen Ebene reguläre Funktion, lässt sich in eine für alle a konvergente Reihe entwickeln. *Bourguet*[96]) gibt die in den folgenden Entwicklungen auftretenden Koeffizienten:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a(a+1)(1+A_1 a+A_2 a^2+\cdots);$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + \cdots;$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{(1-\gamma)a}\, a(a+1)(1+B_1 a+B_2 a^2+\cdots);$$

$$\Gamma(a) = P(a) + c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots;$$

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}(1+C_1 a+C_2 a^2+\cdots).$$

13. Die Euler'sche Konstante. Die Zahl γ, die in der Entwicklung von $\log \Gamma(a+1)$ auftritt, ist nach den Zahlen π und e eine der wichtigsten Konstanten der Analysis. Man bezeichnet sie gewöhnlich als *Euler*'sche, auch wohl als *Mascheroni*'sche[97]) Konstante oder als Konstante des Integrallogarithmus.

Euler und die *Bernoulli*'s haben sich wiederholt mit der *harmonischen Reihe* beschäftigt; sie fiel dadurch auf, dass sie allein unter den Reihen der Form $\sum k^{-n}$ divergent ist[98]). *Jakob Bernoulli*[99]) schreibt seinem Bruder Johann die Entdeckung der Divergenz der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ zu; aber erst Euler hat die Beziehung zwischen der Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ und $\log n$[100]) entdeckt.

95) *Ch. Hermite* (J. f. Math. 91, 1881, p. 336) und *Bourguet* (Tor. Atti 16, 1881, p. 758).

96) Thèse p. 38; Darb. Bull. (2) 5, 1881, p. 43; Acta math. 2, 1883, p. 261. Vgl. auch *Schlömilch*, Ztschr. Math. Phys. 25, 1880, p. 35, 351.

97) So *G. Bauer*, J. f. Math. 57, 1859, p. 28; *Hj. Mellin*, Stockh. Öfv. 1883, p. 19. — Bezeichnungen: *C* bei Euler, Legendre, Lindman u. a.; *O* bei Euler; *A* bei Bierens de Haan, tables. Die von Mascheroni gewählte, γ, hat den Vorteil, dass sie an die Γ-Funktion erinnert, ohne doppeldeutig zu sein.

98) Vgl. *Glaisher*, on the history of Euler's constant, Mess. (2) 1, 1872, p. 25.

99) In der Diss. von *Fritz*, Basel 1689 (Jac. Bernoulli op. [1744], 1, p. 38), sowie ars conjectandi, 1713, p. 250.

100) Petrop. Comm. 7, 1734/35 [40], p. 156.

Er gibt die Formel:

$$\gamma = \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{4} S_4 - + \cdots$$

und findet näherungsweise:

$$\gamma = 0{,}577218.$$

Später[101]) gelangt er zu der Formel:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x} = \gamma + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_2}{4x^4} - \frac{B_3}{6x^6} + \cdots,$$

in der die B die Bernoulli'schen Zahlen (**18**) sind. Für $x = 10$ findet er:

$$\gamma = 0{,}57721\,56649\,015325.$$

Er gibt auch den Ausdruck:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right).$$

Endlich[102]) sucht er ohne Erfolg zu erkennen, ob γ nicht der Logarithmus einer andern bemerkenswerten Zahl ist; da dies nicht gelingt, gibt er noch die Formeln:

$$1 - \gamma = \frac{1}{2}(S_2 - 1) + \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \frac{1}{4}(S_4 - 1) + \cdots;$$

$$2\gamma - 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} S_2\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} S_4\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{7} S_6\right) + \cdots;$$

$$2 - 2\log 2 - \gamma = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} S_2 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{31}{32} S_4 - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{127}{128} S_6 - \frac{2}{7}\right) + \cdots;$$

$$1 - 2\log 2 + \gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3 \cdot 2^3} S_2\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5 \cdot 2^5} S_4\right) + \cdots;$$

$$\log 2 - \gamma = \frac{1}{3 \cdot 2^2} S_2 + \frac{1}{5 \cdot 2^4} S_4 + \frac{1}{7 \cdot 2^6} S_6 + \cdots;$$

$$1 - \log\frac{3}{2} - \gamma = \frac{1}{3 \cdot 2^2}(S_2 - 1) + \frac{1}{5 \cdot 2^4}(S_4 - 1) + \frac{1}{7 \cdot 2^6}(S_6 - 1) + \cdots.$$

Mascheroni[103]) berechnete γ auf 32 Stellen. *Soldner*[104]) fand einen von der 20. Stelle an abweichenden Wert. Daher liess *Gauss*[105]) durch *Nicolai* die Rechnung wiederholen; die schon von Euler benutzte

101) Petrop. N. Comm. 14, 1769, p. 153.
102) Petrop. Acta 5, 1781, p. 45.
103) Adnotationes ad Euleri Calculum Integralem, 1790.
104) Théorie d'une nouvelle fonction transcendante, München 1809.
105) Ges. W. 3, p. 154 und Briefwechsel Gauss-Bessel, p. 150.

Formel — die zweckmässigste, obwohl sie nur semikonvergent ist — gab für $x = 50$ und $x = 100$ γ auf 40 Stellen genau; Soldner's Angabe fand sich bestätigt[106]). *Lindman*[107]), der Nicolai's Rechnung nicht kannte, erhielt für $x = 20$ und $x = 100$ bezw. 24 und 34 richtige Stellen; *Oettinger*[108]) für $x = 10, 20, 50, 100$ bezw. 18, 25, 34 und 41; endlich *Shanks*[109]) für $x = 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$ bezw. 21, 28, 39, 46, 54, 59 und 59 Stellen. Zuletzt giebt Shanks 80 und 110 Stellen an; aber *Glaisher* bemerkt[110]), dass nur die 59 ersten sichergestellt sind:

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082$$
$$40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 0577\cdots.$$

Man kann für $0 < \mu < 1$

$$\gamma_\mu = \lim_{x=\infty}\left[1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{x^\mu} - \frac{x^{1-\mu}}{1-\mu}\right]$$

als ein Analogon zur Euler'schen Konstanten betrachten[111]). *Glaisher* giebt Werte von γ_μ auf 6 Stellen genau[112]). Aus γ_μ kann man $\gamma_{1-\mu}$ mit Hilfe eines Satzes von *Schlömilch*[113]) berechnen. Man kann diese γ_μ als mit *Riemann*'s ξ-Funktion (I C 3, II) verwandt betrachten[114]).

Noch sei die von *N. Sonine*[115]) gegebene Entwicklung von γ erwähnt, deren Restglied eine einfache Form hat:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i (1 - 2^{-2i+1}) \frac{B_i}{2i} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-2i}$$
$$+ (-1)^p (1 - 2^{-2p+1}) \frac{B_p}{2p} \left(n + \frac{1}{2} + \xi\right)^{-2p},$$
$$0 < \xi < \frac{3}{2\pi\sqrt{2e}} < 0{,}20478.$$

106) Gleichwohl wurde Mascheroni's Angabe noch wiederholt. In dem von Grunert herausgegebenen Supplement zu Klügel's Wörterbuch finden sich beide Angaben.

107) Arch. Math. 29, 1857, p. 238.

108) J. f. Math. 60, 1862, p. 375.

109) Lond. Roy. Proc. 15, 1867, p. 429; 16, 1868, p. 154 und 299; 20, 1872, p. 29.

110) ib. 19, 1871, p. 514.

111) Mess. 24, 1894, p. 24.

112) Lond. Math. Proc. 4, 1872, p. 48.

113) Zeitschr. Math. Phys. 23, 1878, p. 135.

114) *E. Cahen*, Bull. soc. math. 22, 1894, p. 227.

115) Warsch. Nachr. 1889, Nr. VIII.

Jeder Darstellung von $\psi(a)$ durch ein bestimmtes Integral entspricht eine ebensolche Darstellung von γ.

Aus der Formel:

$$\int_0^\infty \left(\cos x - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -\gamma$$

hat *Bierens de Haan*[116]) die folgende hergeleitet:

$$\int_0^\infty (\cos x^{2^\nu} - \cos x)\frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right)\gamma.$$

14. Integrallogarithmus. Die schon von *Euler*[117]) untersuchte Funktion

$$\mathrm{li}\,(a) = \int_0^a \frac{dx}{\log x} = -\int_{-\log a}^{\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t} = \int_{-\infty}^{\log a} \frac{e^t\,dt}{t}$$

hat *Soldner*[118]) als Integrallogarithmus bezeichnet. Die Definition hat zunächst einen bestimmten Sinn nur wenn a positiv reell und < 1 ist. Für a reell, > 1 hat man $\mathrm{li}\,(a)$ durch den Hauptwert (2) des Integrals, also durch:

$$\mathrm{li}\,(a) = \lim_{\vartheta=0}\left[\int_0^{1-\vartheta} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\vartheta}^{a} \frac{dx}{\log x}\right]$$

definiert. Die hieraus entspringenden Schwierigkeiten hat *Bessel*[119]) gefühlt und *Gauss*[120]) mit Hülfe des ihm schon damals geläufigen Begriffs des komplexen Integrationswegs aufgeklärt und beseitigt. Er schlägt vor, an Stelle des Integrallogarithmus die Funktion:

$$\int_0^a \frac{e^x - 1}{x}\,dx$$

einzuführen und giebt an[121]), dass diese die Punkte:

$$a = 3{,}183297 \pm 6{,}896441\,i \quad \text{und} \quad x = 3{,}796 \pm 13{,}296\,i$$

zu Nullpunkten hat.

116) Théorie . . . p. 671.

117) Instit. calc. integr. 1, cap. 4, § 228.

118) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, München 1809; vgl. *Zach*, monatl. Corresp. 23, 1811, p. 182. — *Mascheroni* (vgl. Fussn. 103) sagt: Hyperlogarithmus; *T. Caluso* (mem. soc. it 12, 1805, p. 268) Logologarithmus.

119) Königsb. Arch. 1812, p. 1, 239.

120) Briefwechsel mit Bessel (publ. 1880) pp. 114—120, 126, 128, 156, 163, 171, 177 (a. d. Jahren 1810—1812).

121) ib. p. 159 und 173.

Die schon von *Euler* gefundene Entwicklung:

$$\operatorname{li} e^{-\xi} = \gamma + \log \xi - \frac{\xi}{1 \cdot 1!} + \frac{\xi^2}{2 \cdot 2!} - \frac{\xi^3}{3 \cdot 3!} + - \cdots$$

enthält die Euler'sche Konstante γ (**13**).

Die Untersuchung des Integrals $\int e^z z^{-1} dz$, genommen auf Wegen in der Ebene der komplexen Grösse z, führt u. a. zu dem Resultat[122]):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{x+yi} \frac{d(x+yi)}{x+yi} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

d. h. zu einem einfachen Beispiel eines Dirichlet'schen diskontinuierlichen Faktors (II A 2, **42**).

Der Integrallogarithmus verdankt seine Wichtigkeit vor allem seiner Rolle in der Zahlentheorie. *Gauss* bemerkt in einem Brief an Encke[123]) „dass die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral:

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt wird". Vgl. im übrigen I C 3.

Tafeln des Integrallogarithmus sind von *Bessel* und von *Gauss* berechnet worden.

15. Betafunktionen. Das Integral:

$$(1) \qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

war schon von *Wallis*, *Newton*[124]), *Stirling*[125]) untersucht worden; aber die ersten wichtigen Arbeiten über das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx$$

verdankt man *Euler*, der es mit $\left(\frac{p}{q}\right)$[126]) oder mit (p, q)[127]) bezeichnete und wiederholt die Reduktionsformeln behandelt hat, die für dasselbe

122) Vgl. *Kronecker*, Integrale, 12. u. 13. Vorlesung.

123) *Gauss* ges. W. 2, p. 444 (a. d. J. 1849, pnbl. 1863). Vgl. dazu die Tabellen auf pp. 438—443.

124) Brief an Oldenbourg vom 24. VIII. 1676.

125) Methodus differentialis sive tractatus ... de interpolatione, 1730, p. 125.

126) Petrop. N. Comm. 16, 1772, p. 91.

127) Petrop. N. Acta 5, 1779, p. 86.

n zwischen den zu verschiedenen ganzzahligen Werten von p und q gehörenden Werten des Integrals bestehen. Für das Integral (1) hat Legendre[128]) den Namen *„Euler'sches Integral I. Art"*, Binet[129]) die Bezeichnung $B(p, q)$ eingeführt.

Einführung einer neuen Variabeln führt zu der Relation[130]):

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy = B(q,p),$$

die bei der symmetrischen Darstellung:

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$$

selbstverständlich ist.

Die Euler'schen Integrale I. Art sind keine selbständigen Transcendenten, sondern drücken sich durch Γ-Funktionen aus[131]):

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Durch das Euler'sche Integral I. Art wird die Funktion $B(p, q)$ nur in dem durch die Bedingungen:

$$\Re(p) > 0, \quad \Re(q) > 0$$

gegebenen Gebiet definiert. Zur Ausdehnung dieser Definition auf andere Werte kann man sich entweder der Darstellung durch Γ-Funktionen bedienen oder direkt, wie bei diesen (**12a**), einen geschlossenen Integrationsweg einführen[132]). Man bezeichnet nämlich als *Doppelumlauf* einen Weg, der jeden der beiden Punkte 0 und 1 je einmal im positiven und einmal im negativen Sinne umkreist; man erhält einen solchen z. B., indem man von einem beliebigen Punkte aus-

128) Exerc. 1, p. 221; 2, p. 3.

129) Éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 131.

130) Beweis für $p + q = 1$ bei *Euler*, allgemein bei *Legendre*, exerc. 1, p. 222.

131) *Euler*, calc. integr. 4, p. 93 u. 252; *Legendre*, exerc. 2, p. 6; *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 16, 1813, p. 404; *C. G. Jacobi*, J. für Math. 11, 1834, p. 307; *Dirichlet*, ib. 15, 1836, p. 266; *G. Plana*, ibid. 17, 1837, p. 25; *Binet*, J. éc. polyt. cah. 27, § 15; *Cauchy*, ibid. cah. 28, 1841, p. 147; *N. Lobatschefsky*, Kas. mém. 1835, p. 1; *Schaar*, Brux. mém. cour. 22, 1846; *E. Catalan*, Par. C. R. 47, 1858, p. 545; *Realis*, Giorn. di mat. 9, 1871, p. 345 . . ..

132) So unabhängig von einander *C. Jordan* (cours. d'anal 3, 1887, nr. 208; *P. A. Nekrassoff* (Mosk. Samml. 14, 1888; vgl. Math. Ann. 38, 1891, p. 511); *L. Pochhammer* (Math. Ann. 35, 1890, p. 470; 36, 1890, p. 84; 37, 1890, p. 500); bei letzterem auch der Name Doppelumlauf. Vgl. auch *U. Bigler*, J. f. Math. 102, 1888, p. 237.

gehend erst 1 in positivem, dann 0 in positivem, hierauf 1 in negativem, endlich 0 in negativem Sinne umkreist und dann zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Ein solcher Weg ist auch auf der zu der algebraischen Irrationalität:

$$w = u^{p-1}(1-u)^{q-1}$$

gehörenden Riemann'schen Fläche (II B 1, **21**; II B 2) geschlossen. Bezeichnet man ihn mit C, so hat man:

$$\int_C u^{p-1}(1-u)^{q-1}du = (1-e^{2i\pi p})(1-e^{2i\pi q})B(p,q).$$

Der Punkt ∞ ist auch ein Verzweigungspunkt der genannten Riemann'schen Fläche. Aus Symmetrierücksichten ist es vorteilhaft, ihn mit in Betracht zu ziehen und zu diesem Zwecke homogene Veränderliche einzuführen; die Funktion $B(p, q)$ erscheint dann als einfachster Fall der hypergeometrischen Integrale[133]).

Der Zerlegung der Γ-Funktion in ein Produkt von Primfaktoren (**12e**) entspricht für $B(p, q)$ der Ausdruck:

$$B(p,q) = \frac{p+q}{pq} \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{p+q}{\nu}\right)e^{-\frac{p+q}{\nu}}\right\}}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{p}{\nu}\right)e^{-\frac{p}{\nu}}\right\}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{q}{\nu}\right)e^{-\frac{q}{\nu}}\right\}},$$

den man als Definition von $B(p, q)$ für alle Wertepaare (p, q) ansehen kann, in denen weder p noch q Null oder eine negative ganze Zahl ist[134]). Andere Entwicklungen sind von *Binet*[135]), *P. Mansion*[136]) und *J. Beaupain*[137]) gegeben worden.

16. Andere Integrale, welche auf Gammafunktionen zurückführbar sind. Einfache Vertauschungen der Integrationsvariabeln führen zu einer Reihe weiterer Integrale[138]), von denen nur die wichtigsten erwähnt seien. Das Integral:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)},$$

133) *F. Klein,* Vorles. üb. d. hypergeom. Funktion, 1894, p. 118, 153ff.; *C. Schellenberg,* Diss. Gött. 1892, p. 16.

134) *G. F. Meyer,* best. Int. p. 96; *A. Pringsheim,* Math. Ann. 31, 1887, p. 486.

135) J. éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 285.

136) Brux. Bull. (3) 16, 1888, p. 545.

137) Ann. éc. norm. (3) 9, 1892, p. 309. Brux. mém. cour. 53, 1894, p. 1.

138) Vgl. *Bierens de Haan,* tables, passim.

das schon *Euler* betrachtet und dessen Ausdruck durch Γ-Funktionen *Legendre* gegeben hatte, giebt unmittelbar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x \cos^{n-1}x \, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

N. H. Abel[139]) hat die Formeln gegeben:

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{1}{a^\beta (1+a)^\alpha} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)};$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha x^{1-\alpha}(x+a)} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi \cdot a^{1-\alpha}(1-a)^\alpha};$$

die erste führt auf die von *Schlömilch*[140]) gegebene Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-1}\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^{\alpha+\beta}} d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{m^\alpha n^\beta} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Legendre[141]), *Cisa de Grésy*[141a]), *Binet*[141b]), *Stern*[141c]) und *E. E. Kummer*[141d]) sind mit Hülfe des Ausdrucks von $\psi(a+1)$ durch ein bestimmtes Integral (**12d**) zur Bestimmung von Integralen gelangt, in denen die zu integrierende Funktion $\log x$ im Nenner enthält:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)}{(1-x)\log\frac{1}{x}} dx = \log \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)};$$

$$\int_0^1 \frac{x^a(1-x^b)(1-x^c)\,dx}{(1-x)\log\frac{1}{x}} = \log \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)};$$

ebenso für eine grössere Anzahl Faktoren der Form $1-x^b$. Speziell für $b=c=d=\cdots=1$ erhält man

---

139) J. f. Math. 2, 1827, p. 22 = oeuvr. éd. *Sylow* et *Lie* 1, p. 253.

140) Höhere Analysis p. 85.

141) Exerc. 2, p. 111. — 141a) Tor. mem. 1821, p. 209. — 141b) J. éc. polyt. cah. 27, p. 123. — 141c) Gött. Studien, 1847. — 141d) J. f. Math. 17, 1837, p. 228.

$$\int_0^1 \frac{x^t (x-1)^n}{\log x}\, dx = -\int_0^\infty \frac{e^{-az}(e^{-z}-1)^n e^{-z}\, dz}{z}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \log (n+a+1-p).$$

Erwähnt seien noch die Formeln von *Schlömilch*[142]):

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\, dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{2}},$$

sowie die von *J. A. Serret*[143]) und *E. E. Kummer*[144]):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \cos a\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(a-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \sin a\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(a-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \sin\frac{n\pi}{2}.$$[145])

Als Beispiele vielfacher Integrale, deren Auswertung mit Hilfe der Gammafunktionen gelingt, seien die von *P. G. Lejeune-Dirichlet*[146]) gegebenen erwähnt, die zur Bestimmung der Volumina, Schwerpunkte, Trägheitsmomente gewisser Flächen führen. Man hat:

$$\int\int\cdots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)},$$

wenn das Integral über alle positiven Werte der Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$ erstreckt wird, für die

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1$$

ist; ferner:

---

142) Arch. Math. 6, 1845, p. 200.

143) J. de math. 8, 1843, p. 489.

144) J. f. Math. 17, 1837, p. 210 und 20, 1840, p. 1.

145) Über die Ermittelung der Integrale

$$\int_0^\pi \sin^m\theta\, e^{a\theta}\, d\theta \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin^m\theta \cos^n\theta\, e^{a\theta}\, d\theta$$

vgl. man *A. R. Forsyth*, Quart. J. 27, 1895, p. 216. Tafeln des ersteren, Brit. Ass. Rep. 1896, p. 70.

146) Berl. Abh. 1839, p. 61 = ges. W. 1, p. 391; J. de math. (1) 4, 1839, p. 164 = Par. C. R. 8, 1839, p. 156 = ges. W. 1, p. 375.

$$\int\int\cdots\int t_1^{q_1-1}\, t_2^{q_2-1}\cdots t_n^{q_n-1}\, dt_1\, dt_2\cdots dt_n$$
$$= \frac{a_1^{q_1}\, a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}}{m_1\, m_2\cdots m_n}\, \frac{\Gamma\left(\frac{q_1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{q_2}{m_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{q_n}{m_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q_1}{m_1}+\cdots+\frac{q_n}{m_n}\right)},$$

wenn das Integral über alle positiven Werte der Variabeln t erstreckt wird, für die:

$$\left(\frac{t_1}{a_1}\right)^{m_1}+\left(\frac{t_2}{a_2}\right)^{m_2}+\cdots+\left(\frac{t_n}{a_n}\right)^{m_n}\leqq 1$$

ist. Lejeune-Dirichlet hat dieselbe Methode auf die Bestimmung der Anziehung eines homogenen Ellipsoids angewendet[147]).

J. Liouville[148]), *Raabe*[148a]), *Most*[148b]) und *E. Catalan*[148c]) haben vielfache Integrale allgemeineren Charakters als die vorhergehenden untersucht[149]).

17. Anwendungen der bestimmten Integrale in der Reihenlehre. Die Formel:

$$\frac{1}{n^a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{a-1}\, dx$$

führt zum Beweis der folgenden von *M. A. Stern*[150]), *J. Steiner*[150a]) und *G. F. Meyer*[150b]) gegebenen Sätze: Schliesst man die Einheit nicht nur als Basis, sondern auch als Exponent von der Betrachtung aus, so ist die Summe der

1) reziproken Potenzen aller ganzen Zahlen $= 1$;

2) reziproken Potenzen aller geraden Zahlen $= \log 2$;

3) reziproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n+3$:

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log 2;$$

4) reziproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+3$: $= \frac{1}{4}\log 2$;

5) reziproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+2$: $= \frac{\pi}{8}$.

---

147) Vgl. auch *F. G. Mehler*, J. f. Math. 60, 1862, p. 321; *F. Mertens*, ib. 63, 1864, p. 369; 70, 1869, p. 1; *F. Grube*, ib. 69, 1868, p. 359.

148) J. de math. 4, 1839, p. 225. — 148a) J. f. Math. 28, 1844, p. 19. — 148b) Zeitschr. Math. Phys. 14, 1869, p. 422. — 148c) J. de math. (1) 4, 1839, p. 323.

149) Vgl. *G. F. Meyer*, Best. Int., 2. Buch und *L. Pochhammer*, J. f. Math. 107, 1891, p. 246.

150) J. f. Math. 10, 1833, p. 209. — 150a) ib. 13, 1835, p. 361. — 150b) Arch. Math. 41, 1864, p. 220 und Best. Int. p. 366.

Die *Euler*'sche Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin \theta x \, dx = \frac{\Gamma(a)}{\theta^a} \sin \frac{a\pi}{2} \qquad (1 > a > 0;\ \theta > 0)$$

führt zu der Beziehung[151])

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^a f(a)\, \Gamma(a) \sin \frac{n\pi}{2} = f(1-a)$$

zwischen den beiden Reihen:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^a}, \quad f(1-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{1-a}} \qquad (1 > a > 0).$$

Dieselbe Bestimmungsweise lässt sich auch auf allgemeinere Reihen anwenden[152]).

Die Funktion ψ (**12d**) kann zur Summierung mehrerer bemerkenswerter Reihen dienen[153]); z. B.:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \cdots + \frac{a}{b+nc} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\,\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right) - \frac{a}{c}\,\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right);$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} - + \cdots - \frac{a}{b+(2n+1)c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{2c}\,\psi\left(\frac{b}{2c} + n + 1\right) - \frac{a}{2c}\,\psi\left(\frac{b}{2c} + 1\right) - \frac{a}{b+c} - \frac{a}{2c}\,\psi\left(\frac{b}{2c} + n + \frac{3}{2}\right) - \frac{a}{2c}\,\psi\left(\frac{b}{2c} + \frac{3}{2}\right)$$

und für $\lim n = \infty$:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+2c} - + \cdots = \frac{c}{b(b+c)} + \frac{1}{c}\left[\psi\left(\frac{b}{2c} + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{b}{2c} + 1\right)\right];$$

speziell:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\psi(2) - \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \log 2.$$

18. Bernoulli'sche Zahlen[154]). Wir sind den Bernoulli'schen Zahlen schon in der Stirling'schen Formel (**12g**) und bei der Berechnung der Konstanten γ (**13**) begegnet. Sie haben sich zuerst

---

151) *Schlömilch*, Zeitschr. Math. Phys. 3, 1858, p. 130.

152) Vgl. *Meyer*, Best. Int. p. 376 ff. — Andere Anwendungen bei *Lejeune-Dirichlet*, J. f. Math. 17, 1837, p. 57 = ges. W. 1, p. 257; *Schlömilch*, Compendium 2, p. 277; *Limbourg*, théorie de la fonction gamma, p. 220.

153) Vgl. *Lejeune-Dirichlet*, J. f. Math. 17, 1837, p. 57 = ges. W. 1, p. 257; *P. Appell*, Par. C. R. 86, 1878, p. 953; *Ed. Weyr*, Casopis 21, 1892, p. 161; *C. F. Lindman*, Stockh. Öfv. 50, 1893, p. 563; *F. Rogel*, Prag. Ber. 1895.

154) Litteraturverzeichnis von *G. S. Ely*, Amer. J. of math. 5, 1882, p. 228.

Jacob Bernoulli[154a]) bei der Bestimmung der Summe ganzer positiver Potenzen von aufeinanderfolgenden Zahlen dargeboten; sie sind die in den Formeln:

$$\sum_{\lambda=1}^{x} \lambda^{2m} = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{x^{2m}}{2} + \binom{2m}{1}\frac{B_1}{2}x^{2m-1} - \binom{2m}{3}\frac{B_2}{4}x^{2m-3} + \cdots + (-1)^{m+1}\binom{2m}{2m-1}\frac{B_m}{2m}x,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{x} \lambda^{2m+1} = \frac{x^{2m+2}}{2m+2} + \frac{x^{2m+1}}{2} + \binom{2m+1}{1}\frac{B_1}{2}x^{2m} - \binom{2m+1}{3}\frac{B_2}{4}x^{2m-2} + \cdots + (-1)^{m+1}\binom{2m+1}{2m-1}\frac{B_m}{2m}x^2$$

auftretenden Koeffizienten B.[155]) Jacob Bernoulli findet die Werte:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66};$$

L. Euler[156]) giebt die 15 ersten, *Ohm*[156a]) die 31 ersten, *Adams*[156b]) die 62 ersten. Sie treten in einer Reihe von Entwicklungen als Koeffizienten auf, z. B.[157]):

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} + B_3\frac{x^6}{6!} - \cdots;$$

$$\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = 1 - B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} - B_3\frac{x^6}{6!} - \cdots;$$

daraus ergiebt sich zwischen den Bernoulli'schen Zahlen und den Summen der Reihen:

$$S_{2m} = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots$$

die Relation:

$$B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}} S_{2m}.$$

Die Bernoulli'schen Zahlen sind alle positiv; sie wachsen von der vierten an und zwar so, dass:

$$\lim_{m=\infty} \frac{B_m}{B_{m-1}} = \frac{m^2}{\pi^2}$$

154a) Ars conjectandi, 1713, p. 96.

155) Vielfach werden die aufeinanderfolgenden *Bernoulli*'schen Zahlen mit $B_1, B_3, B_5 \ldots$ bezeichnet.

156) Calc. diff. 2, 1755, § 122. — 156a) J. f. Math. 20, 1840, p. 11. — 156b) ib. 85, 1878, p. 269.

157) *Euler*, calc. diff. 2, § 1 14.

wird. — Erwähnt seien noch die Entwicklungen:

$$\operatorname{tg} x = 2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{2!} + 2^4(2^4-1)B_2\frac{x^3}{4!} + 2^6(2^6-1)B_3\frac{x^5}{6!} + \cdots,$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2(2-1)B_1\frac{x}{2!} + 2(2^3-1)B_2\frac{x^3}{4!} + 2(2^5-1)B_3\frac{x^5}{6!} + \cdots,$$

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{2}{1}B_1\frac{x^2}{2!} - \frac{2^3}{2}B_2\frac{x^4}{4!} - \frac{2^5}{3}B_3\frac{x^6}{6!} - \cdots,$$

$$\log\cos x = -\frac{2(2^2-1)}{1}B_1\frac{x^2}{2!} - \frac{2^3(2^4-1)}{2}B_2\frac{x^4}{4!} - \frac{2^5(2^6-1)}{2}B_3\frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

In der Entwicklung:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \sec x + \operatorname{tg} x = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2\frac{x^2}{2!} + \gamma_3\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

sind die Koeffizienten von ungeradem Index, die man auch *Tangentenkoeffizienten* nennt, mit den Bernoulli'schen Zahlen durch die Relation verbunden:

$$\gamma_{2m-1} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}B_m.$$

Die Koeffizienten von geradem Index heissen *Sekantenkoeffizienten* oder *Euler*'sche *Zahlen*. Alle diese Koeffizienten sind ganze Zahlen; die 30 ersten hat *W. Scherk*[158]) berechnet.

Die vorhergehenden Entwicklungen führen zu *Rekursionsformeln* zwischen den Bernoulli'schen Zahlen, zwischen den Euler'schen und auch zwischen beiden[159]). Die älteste derselben rührt von *A. de Moivre*[160]) her:

$$\binom{2m+1}{1}B_m - \binom{2m+1}{3}B_{m-1} + \binom{2m+1}{5}B_{m-2} - + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{2m+1}{2m-1}B_1 + (-1)^m\left(m-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

sie erlaubt jedes der B aus allen vorhergehenden zu berechnen. Andere Formeln[160a]) erfordern zu dieser Berechnung nur eine geringere An-

158) Mathematische Abhandlungen, Berlin 1825.

159) Vgl. *L. Saalschütz*, Vorlesungen üb. d. Bernoulli'schen Zahlen. Berl. 1893.

160) Miscellanea analytica, 1730. Formeln derselben Art geben *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 12, 1834, p. 263; *M. A. Stern*, ib. 26, 1843, p. 90 und 84, 1878, p. 267; *O. Schlömilch*, Arch. Math. 3, 1843, p. 9; *A. Göpel*, ib. p. 64; *H. F. Scherk*, Math. Abh. 1825; *G. F. Meyer*, Diss. Gött. 1859. — Nach *M. Cantor*'s Bericht (Gesch. der Math. 3, p. 333) ein solcher Satz auch schon bei Jac. Bernoulli.

160a) *L. Seidel*, Münch. Ber. 7, 1877, p. 157; *M. A. Stern*, Gött. Abh. 23, 1878; *R. Haussner*, Gött. Nachr. 1893, p. 777, neuerdings *F. Rogel*, Prag. Ber. 1895. — Sie ergeben sich hier wie in ähnlichen Fällen daraus, dass man statt,

zahl der vorhergehenden. Auch kann man B_m linear durch die Produkte $B_k\, B_{m-k}$ ausdrücken[161]). *Scherk*[162]) und *Stern*[162a]) haben speziell die Relationen zwischen den Bernoulli'schen und den Euler'schen Zahlen untersucht. — Die linearen Relationen führen zur Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen in Determinantenform[163]).

Die Tafeln von *Bierens de Haan*[164]) enthalten eine Reihe von Integralen, deren Auswertung mit Hilfe der Bernoulli'schen Zahlen gelingt. Man hat z. B.[165])

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1}\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{B_m}{4m}.$$

Diese Formel hat *K. Carda*[166]) aus dem *Cauchy*'schen Satz durch ein Verfahren abgeleitet, ähnlich dem von Kronecker zur Bestimmung der Gauss'schen Summen. Er integriert

$$\int \frac{(x+iy)^{2m-1}\,d(x+iy)}{e^{2\pi(x+iy)}-1}$$

zuerst längs der x-Axe von $(\varrho, 0)$ $\left[0<\varrho<\frac{1}{2}\right]$ bis $(a, 0)$ $[a>\varrho]$; dann parallel der y-Axe bis (a, k) [k eine ganze Zahl]; von (a, k) geradlinig bis (ϱ, k); auf einem Viertelkreis mit dem Radius ϱ bis $(0, k-\varrho)$; geradlinig bis $(0, k-1+\varrho)$; auf einem Halbkreis im ersten Quadranten mit dem Radius ϱ bis $(0, k-1-\varrho)$; u. s. w.; schliesslich auf einem Viertelkreis von $(0, \varrho)$ zum Ausgangspunkt $(\varrho, 0)$ zurück. Die Summe aller dieser Integrale ist 0. Für $\lim a = \infty$ und $\lim \varrho = 0$ erhält man hieraus:

---

der Rekursionsformel $\varphi_m = 0$ eine geeignete lineare Kombination von ihr und den vorhergehenden, $\lambda_m\varphi_m + \lambda_{m-1}\varphi_{m-1} + \cdots + \lambda_1\varphi_1 = 0$, einführt.

161) *Euler*, Calc. diff. 2, § 119 ff. u. § 171.

162) Math. Abhandl., 1725. — 162a) J. f. Math. 26, 1843, p. 88.

163) *R. Haussner*, Zeitschr. Math. Phys. 39, 1894, p. 183. — Andere Darstellungen bei *P. S. Laplace*, Par. mém. 1777, p. 99; *J. A. Eytelwein*, Berl. Abh. 1816, p. 28; *L. Kronecker*, J. de math. (2) 1, 1856 und J. f. Math. 94, 1883, p. 268; *G. Bauer*, ib. 57, 1860, p. 256 und 58, 1861, p. 292; *Worpitzky*, ib. 94, 1883, p. 203; *E. Lucas*, théorie des nombres, livre 2; *L. Saalschütz*, Vorles., 2. Abschnitt.

164) Vgl. z. B. Tafel 111, 117—125, 138, 145, 157—159, 161, 164, 173, 180, 184, 185, 275, 293, 303—306, 308, 310, 312, 314, 317, 319, 324, 325, 332, 336—342, 351, 352, 359, 375, 380 und 410.

165) *Binet*, J. éc. polyt. cah. 27, 1839, p. 123; *G. Plana*, Tor. mem. 1828; *Malmsten*, J. f. Math. 35, 1847, p. 55; *Schlömilch*, Arch. Math. 3, 1843, p. 9 und 12, 1849, p. 130.

166) Monh. 5, 1894, p. 321.

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \lambda^{2m+1} = \frac{k^{2m+2}}{2m+2} + \frac{k^{2m+1}}{2} + 2\sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{m-\nu} \binom{2m+1}{2\nu} k^{2\nu} \int_0^\infty \frac{x^{2(m-\nu)+1}}{e^{2\pi x}-1}\, dx$$

und daraus durch Vergleich mit der Formel von Jacob Bernoulli die zu beweisende.

Die schon von *Malmsténⁱ*[167]) betrachteten Funktionen:

$$B'(x) = \frac{x^{2a+2}}{2^a+2} - \frac{x^{2a+1}}{2} + \frac{1}{2}\binom{2a+1}{1} B_1 x^{2a} - \frac{1}{4}\binom{2a+1}{3} B_2 x^{2a-2} + \cdots + \frac{(-1)^{a-1}}{2a}\binom{2a+1}{2a-1} B_a x^2,$$

$$B''(x) = \frac{x^{2a+1}}{2^a+1} - \frac{x^{2a}}{2} + \frac{1}{2}\binom{2a}{1} B_1 x^{2a-1} - \frac{1}{4}\binom{2a}{3} B_2 x^{2a-3} + \cdots + \frac{(-1)^{a-1}}{2a}\binom{2a}{2a-1} B_a x$$

hat *Raabe*[167a]) als *Funktionen von Jacob Bernoulli* bezeichnet. Die Untersuchung dieser an und für sich interessanten Funktionen führt zu weiteren Darstellungen der Bernoulli'schen Zahlen[168]).

Wie $2(2^m-1)B_m$ (s. o.) sind auch die folgenden Ausdrücke ganze Zahlen[169]):

$$\frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_m, \quad \frac{a^{2m}(a^{2m}-1)}{2m} B_m, \quad \frac{(a^{2m}-1)(b^{2m}-1)}{2m} B_m, \quad a(a^{2m}-1)B_m,$$

wenn a und b zu einander teilerfremde positive Zahlen bedeuten; ferner:

$$\frac{a(a^{2m}-1)}{m} B_m, \text{ wenn } a \text{ prim zu } m;$$

$$\frac{a(a^{2m}-1)}{2m} B_m, \text{ wenn } a \text{ prim zu } 2m.$$

Sind $a, b \ldots l$ diejenigen Primzahlen, deren um die Einheit kleinere Nachbarn die Zahl $2m$ teilen, so ist:

$$B_m + (-1)^{m+1}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{l}\right] = (-1)^{m+1} A_m$$

eine positive oder negative ganze Zahl[170]). *Adams*[171]) hat diese Eigen-

167) J. f. Math. 35, 1847, p. 55. — 167a) ib. 42, 1851, p. 348.

168) *Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 1, 1856, p. 193; *G. Bauer,* J. f. Math. 58, 1861, p. 292; *Ch. Hermite,* ib. 79, 1875, p. 339; *J. Worpitzky,* ib. 94, 1883, p. 203.

169) *R. Lipschitz,* J. f. Math. 96, 1884, p. 1.

170) Gleichzeitig von *Chr. v. Staudt* (J. f. Math. 21, 1840, p. 372) und *Th. Clausen* (Astr. Nachr. 17, 1840, p. 352) gefunden.

171) J. f. Math. 85, 1878, p. 269.

schaft zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen benutzt. *Ch. Hermite*[172]). *M. A. Stern*[172a]), *R. Lipschitz*[172b]) haben Rekursionsformeln für die A_m gegeben.

E. E. Kummer hat den Beweis des letzten Fermat'schen Satzes (I C) in sehr ausgedehnten Fällen auf die Eigenschaften der Bernoulli'schen Zahlen gestützt[173]).

19. Besondere bestimmte Integrale. *Dirichlet*[174]) hat die allgemeine Formel bewiesen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-c\theta i}}{l^2+\theta^2}\frac{1}{(k+\theta i)^a}\prod_{h=1}^{n}\frac{1}{(k_h+\theta i)^{a_h}}\,d\theta = \frac{\pi}{l}\,e^{-lc}\,\frac{1}{(k+l)^a}\prod_{h=1}^{n}\frac{1}{(k_h+l)^{a_h}},$$

in der c eine reelle positive Konstante sein muss, die $l, h, k_1 \ldots a, a_1 \ldots$ auch komplexe Grössen mit positivem reellen Bestandteil sein können. Man kann daraus eine andere Formel *Dirichlet*'s ableiten[175]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2}\left[\frac{1}{(k+yi)^a}\,\frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}}\cdots\right]\left[\frac{1}{(\log h+yi)^b}\,\frac{1}{(\log h_1+yi)^{b_1}}\cdots\right]dy$$
$$= \frac{\pi}{e^{-lc}}\,\frac{1}{(k+l)^a(k_1+l)^{a_1}\cdots}\cdot\frac{1}{(\log h+l)^b(\log h_1+l)^{b_1}\cdots}.$$

Von der Formel *Legendre*'s:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1}\,\frac{1}{2m}$$

hat *Th. Stieltjes*[176]) die folgende Verallgemeinerung gegeben; sei:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n-1}\binom{n}{p}x^n,$$

so ist:

---

172) J. f. Math. 81, 1875, p. 93. — 172a) ib. 84, 1878, p. 267. — 172b) ib. 96, 1884, p. 1.

173) Berl. Ber. 1847, p. 132 und J. f. Math. 35, 1850, p. 117; Berl. Ber. 1857, p. 275 und Berl. Abh. 1857, p. 41. — Weitere zahlentheoretische Eigenschaften der B_m s. I C 3.

174) J. f. Math. 4, 1829, p. 94 = ges. W. 1, p. 109.

175) Vgl. auch *M. Lerch*, Casopis 22, 1893, p. 298.

176) Amsterd. Versl. (3) 2, 1886, p. 210.

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} \sin\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \frac{f(e^{-t})}{1-e^{-pt}} \quad (\text{wenn } p \equiv 1 \bmod 4),$$

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} \cos\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \frac{f(e^{-t})}{1-e^{-pt}} \quad (\text{wenn } p \equiv 3 \bmod 4).$$

Erwähnt seien noch[177]) die Formel von *Jacobi:*

$$\int_0^\pi f(\cos x) \cos nx\, dx = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \int_0^\pi f^{(n)}(\cos x) \sin^{2n} x\, dx$$

und die von *Kummer:*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(2x\cos\theta e^{i\theta}) e^{2ik\theta} d\theta = \sin k\pi \int_0^1 (1-z)^{k-1} f(xz)\, dz.$$

20. Gauss'sche Summen. Einer der *Gauss*'schen Beweise für das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste (I C 1) beruht auf der Auswertung der Summen:

$$G = G_1 + iG_2 = \sum_{h=0}^{p-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = \sum \cos\frac{2h^2\pi}{n} + i\sum \sin\frac{2h^2\pi}{n}.$$

Je nachdem nämlich die Zahl n von der Form ist:

	4μ	$4\mu+1$	$4\mu+2$	$4\mu+3$
hat man: $G_1 =$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	0	0
$G_2 =$	$\sqrt{n}$	0	0	$\sqrt{n}$.

Gauss hat wahrscheinlich schon in seinem 17. Jahre den Wert der Reihen, abgesehen vom Vorzeichen, gefunden, dessen Bestimmung ihm, wie aus der Abhandlung „summatio quarumdam serierum singularium“[178]) und aus einem Briefe an *Sophie Germain*[179]) hervorgeht, unsägliche Mühe machte[180]).

A. L. Cauchy hat zwei Methoden zur Bestimmung des Vorzeichens der Gauss'schen Summen gegeben; die eine ist nur für Primzahlen

177) Im Text konnten nur einige besonders merkwürdige Beispiele Erwähnung finden; im übrigen muss auf die Tafeln von *Bierens de Haan* und auf die Observations dazu von *Lindman* (vgl. Fussn. 24) verwiesen werden.

178) Gött. Comm. rec. 1, 1811 = ges. W. 2, p. 9; ib. p. 154.

179) Oeuvres phil. hrsg. 1879 und Brief von *Gauss* hrsg. von *Boncompagni*, 1879.

180) *Kronecker*, Berl. Ber. 1880, p. 686, 854; Vorl. 1, p. 118.

anwendbar, die andere allgemeinere beruht auf der Betrachtung der Jacobi'schen Thetareihen[181]).

Lejeune-Dirichlet[182]) hat gezeigt, dass man die Summen der beiden Reihen:

$$\sum c_s \cos \frac{2s^2\pi}{n}, \qquad \sum c_s \sin \frac{2s^2\pi}{n}$$

bestimmen kann, sobald man die Summe der (endlichen oder unendlichen) Reihe:

$$F(\alpha) = c_1 + c_1 \cos \alpha + c_2 \cos 2\alpha + \cdots$$

kennt.

Einen sehr einfachen, auf dem Cauchy'schen Satz beruhenden Beweis hat *L. Kronecker*[183]) gegeben, indem er:

$$\int \frac{e^{\frac{2\pi}{n}(x+iy)^2}}{1 - e^{2\pi i(x+iy)}} dy$$

auf folgendem Wege integriert: erst von $(0, -y_1)$ nach $(0, -y_0)$ in gerader Linie; dann auf einem Halbkreise um $(0, 0)$, dessen Inneres links lassend, nach $(0, y_0)$; in geraden Linien nach $(0, y_1)$, von da nach $\left(\frac{1}{2}n, y_1\right)$, von da nach $\left(\frac{1}{2}n, y_0\right)$; auf einem Halbkreise um $\left(\frac{1}{2}n, 0\right)$, dessen Inneres links lassend, nach $\left(\frac{1}{2}n, -y_0\right)$; in geraden Linien nach $\left(\frac{1}{2}n, -y_1\right)$ und von da nach $(0, y_1)$; ausserdem noch um jeden der Punkte $(k, 0)$, für welche k eine positive ganze Zahl ist, in einem Kreise vom Radius y_0, das Innere links lassend. Dabei bedeutet n eine positive ganze Zahl, y_0 und y_1 positive Grössen. Für $\lim y_0 = 0$, $\lim y_1 = \infty$ erhält man:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} = \frac{i + i^{1-n}}{i+1} \left| \sqrt{n} \right|.$$

Mehrfache Gauss'sche Summen hat *H. Weber* eingeführt[184]).

---

181) Par. C. R. 10, 1840, 560; J. de math. 5, 1840, p. 154; *Lebesgue*, J. de math. (2) 1, 1856, p. 392. Umgekehrt kann die Bestimmung der in der Transformationstheorie der Thetafunktionen auftretenden Konstanten auf die Theorie der Gauss'schen Summen gegründet werden.

182) Abh. Berl. 1835, p. 391 = W. 1, p. 237; J. f. Math. 17, 1837, p. 57 = W. 1, p. 257; ib. 21, 1840, p. 1 = W. 1, p. 473.

183) J. f. Math. 105, 1889, p. 267, 345; Vorl. 1, p. 162. Vgl. auch Hamb. Mitt. 3, 1890, p. 32, sowie *G. Landsberg*, J. f. Math. 111, 1893, p. 234. Vgl. *F. Mertens*, Berl. Ber. 1896, p. 217.

184) J. f. Math. 74, 1871, p. 24.

I A 4a. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: EXISTENZ DER LÖSUNGEN

VON

P. PAINLEVÉ

IN PARIS.

Inhaltsübersicht.

1. Definitionen und Fundamentalprobleme.
2. Stand der Theorie vor *Cauchy*.

Methode von Cauchy-Lipschitz.

3. Prinzip der Methode.
4. Vervollkommnung durch *Lipschitz*.
5. Genaue Bestimmung des Konvergenzintervalls.
6. Erste Integrale eines Differentialsystems.
7. Anwendung der Methode auf das komplexe Gebiet.
8. Fall stetiger Differentialkoeffizienten, die der *Lipschitz*'schen Bedingung nicht genügen.

Methode der successiven Annäherungen.

9. Prinzip und Resultate der Methode.
10. Korollare.

Methode des calcul des limites.

11. Prinzipien und Resultate dieser Methode.
12. Fortbildung der Methode.
13. Eindeutige Bestimmung der Integrale durch die Anfangsbedingungen.
14. Erweiterung des Konvergenzbereichs der Methode.

15. Methode der Variation der Konstanten.

16. Methode der Aufsuchung erster Integrale.

Gewöhnliche singuläre Anfangsbedingungen.

17. Anfangswerte, für welche einige der f_i meromorph und unendlich sind.
18. Anfangswerte, für welche einige der f_i algebraisch verzweigt sind.
19. Algebraische Differentialsysteme.
20. Anwendung auf Gleichungen 1. Ordnung.
21. Algebraische Gleichungen 1. Ordnung.
22. Vergleichung mit der Theorie der Enveloppen; Historisches.
23. Ausdehnung auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

Aussergewöhnliche Anfangsbedingungen bei Gleichungen 1. Ordnung.

24. Untersuchungen von *Briot* und *Bouquet* über $xy' = ax + by + \cdots$.
25. Allgemeiner Fall, in dem y' meromorph und von der Form $0/0$ ist.
26. Untersuchungen von *Picard*.
27. Methode von *Poincaré* und Ergänzungen zu ihr.
28. Fall eines algebroïden f.
29. Anwendung auf das reelle Gebiet.
30. Untersuchungen von *Bendixson* und *Horn*.
31. *Picard*'s Untersuchung der Gleichungen 2. Grades.

Aussergewöhnliche Anfangsbedingungen bei beliebigen Differentialsystemen.

32. Allgemeiner Satz von *Poincaré*.
33. Ergänzungen.
34. Bestimmung besonderer Klassen von Integralen in Ausnahmefällen.
35. Allgemeiner Fall meromorpher Differentialkoeffizienten.
36. Anwendung auf das reelle Gebiet.
37. Reelle asymptotische Lösungen.

Litteratur.

F. Moigno, Leçons sur le calcul différentiel et intégral (d'après *Cauchy*), t. 2, Paris 1844.

R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, 2, Bonn 1880.

A. R. Forsyth, Treatise on differential equations, Cambr. 1889; dtsch. von *H. Maser,* Braunschw. 1889.

L. Königsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipz. 1889.

H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1, Paris 1892; 3, 1899.

E. Picard, Traité d'analyse, 2, Paris 1893; 3, 1895.

Ch. Méray, Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale, 3, Paris 1897.

P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, Sept., Oct., Nov. 1895, lith., Paris 1897.

1. Definitionen und Fundamentalprobleme. Die Theorie der Differentialgleichungen ist zugleich mit der Infinitesimalrechnung entstanden. Indem *Leibniz* und *Newton* die beiden Fundamentaloperationen der letzteren — Integration und Differentiation — einführten und ihre Reziprocität erkannten, haben sie damit zugleich die einfachste Differentialgleichung, nämlich die Gleichung $dy/dx = f(x)$ integriert. Die Integration solcher Gleichungen, die sich unmittelbar auf Quadraturen zurückführen lassen — wie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(y)}{X(x)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \ldots —$$

war die fast unmittelbare Folge. Die Untersuchung der elementarsten

Differentialgleichungen physikalischer, astronomischer und geometrischer Probleme beschäftigte die Nachfolger von Leibniz und Newton bis zum Beginn dieses Jahrhunderts.

Man nennt *Differentialgleichung* jede Relation zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x, einer oder mehreren Funktionen $y(x)$, $z(x), \ldots$ dieser Veränderlichen, und ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung. Eine Gesamtheit solcher Relationen heisst *System von Differentialgleichungen* oder einfach *Differentialsystem*. Ein Differentialsystem integrieren heisst: alle Systeme von Funktionen $y(x)$, $z(x), \ldots$ bestimmen, die diesem System Genüge leisten. Man weiss seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts[1]), dass man mit Hilfe von Differentiationen und Eliminationen ein solches System sowohl ersetzen kann durch *eine* Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right), \tag{1}$$

als auch durch ein System von Gleichungen *erster* Ordnung, die nach den Ableitungen aufgelöst sind:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Die Gleichung (1) verwandelt sich in ein System (2), wenn man

$$y = y_1, \ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ \ldots, \ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \tag{3}$$

setzt. Die rechten Seiten von (2) können von andern unbekannten Funktionen $y_{n+1}(x)$, $y_{n+2}(x)$, ... abhängen, die ihrerseits ganz willkürlich sind. Sind sie einmal gewählt, so ist das Problem, die Gleichungen (2) zu integrieren, in denen dann die f_i gegebene Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ sind; sie heissen die *Differentialkoeffizienten* des Systems (2).

Jedes System von Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots$ (bezw. jede Funktion $y(x)$), das die Gleichungen (2) (bezw. 1) befriedigt, heisst ein *partikuläres Integral* oder eine *Lösung* von (2) (bezw. 1)[2]). Die ganze Zahl n heisst die Ordnung des Systems (2) oder der Gleichung (1).

---

1) Der Beweis findet sich in den Lehrbüchern (z. B. *C. Jordan* 3, p. 3). Das ursprüngliche System ist im allgemeinen *mehreren* Gleichungen (1) oder *mehreren* Systemen (2) äquivalent, die jedes für sich zu behandeln sind. Vgl. *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 64, 1865, p. 297 (ges. W. 5, p. 193). Vgl. auch Nr. 19 und Fussnote 48.

2) „Partikuläres Integral" ist der klassische Terminus. Der Name „Lösung", den *Lagrange* und einige seiner Zeitgenossen gebrauchten, ist von *H. Poincaré* wieder aufgenommen worden (Acta math. 13, 1890, p. 9; Méc. cél. 1, p. 8) und soll auch im vorliegenden Artikel gebraucht werden.

2. Stand der Theorie vor Cauchy. Wenn ein System von Funktionen $y_1(x), \ldots y_n(x)$ von n Konstanten abhängt, so kann man durch Elimination der Konstanten aus den Funktionen und ihren Ableitungen ein System (2) (im allgemeinen und höchstens von der Ordnung n) ableiten, das die vorgelegten Funktionen befriedigen. Besitzt umgekehrt ein vorgelegtes System (2) immer unendlich viele Lösungen, *die von n willkürlichen Konstanten abhängen?* Die ersten Differentialgleichungen, die integriert wurden, liessen das erkennen, und kein Mathematiker des 18. Jahrhunderts zweifelte daran. Genauer ausgedrückt: sie nahmen an, dass eine und nur eine Lösung $y_1(x), \ldots y_n(x)$ von der Art existiert, dass die Funktionen y_i für $x = x_0$ willkürlich vorgeschriebene Werte y_i^0 annehmen; diese Lösung nannten sie *das allgemeine Integral* von (2). *S. F. Lacroix*[3]) stellt den Satz als evident hin; die Methode, die er zur Berechnung der fraglichen Lösung giebt, besteht darin, dass er durch Differentiation der Gleichungen (2) die Werte der successiven Ableitungen der y_i für $x = x_0$ bestimmt und dann die y_i nach steigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickelt. Aber er giebt kein Mittel zum Beweis der Konvergenz dieser Reihen oder zur Aufsuchung der Fälle, in denen sie divergieren. Allerdings giebt er[3]) Beispiele, in denen die Werte $x_0, y_1^0, \ldots y_n^0$ *singuläre* Werte für die Funktionen f_i sind und in denen jenen „Anfangsbedingungen" mehrere verschiedene Lösungen genügen. Er bezeichnet[4]) als *partikuläre Lösungen* diejenigen, die man heute gewöhnlich *singuläre Integrale* nennt; d. h. solche, für die die Werte x, $y_1, \ldots, y_n$ bei beliebigem x singuläre Werte für die Differentialkoeffizienten f_i sind. Aber alle Beweise blieben noch auszuführen, alle Ausnahmefälle noch zu präzisieren. Erst *A. Cauchy* hat der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen eine unzerstörbare Grundlage gegeben; im folgenden soll daher an die Darstellung jeder seiner Methoden die Besprechung derjenigen späteren Arbeiten angeschlossen werden, die sie vervollkommnen und ergänzen.

Methode von Cauchy-Lipschitz.

3. Prinzip der Methode. Die einfachste der Methoden *Cauchy*'s besteht darin, dass er die Differentialgleichungen näherungsweise als

---

3) Traité, Paris 1810, p. 2; Traité élément., Paris 1828, p. 419.

4) *Lacroix* bezeichnet diese Lösungen als partikulär im Gegensatz zum allgemeinen Integral und als Lösungen (nicht als Integrale), weil ihre Bestimmung (bei Gleichungen erster Ordnung) keine Integration verlangt; *J. Lagrange* (1774; oeuvr. 4, p. 1) nennt diese Lösungen partikuläre Integrale und die belie-

Differenzengleichungen behandelt[5]). Seien $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ reelle Werte von $x, y_1, \ldots, y_n$, von der Beschaffenheit, dass die Differentialkoeffizienten f_i und ihre ersten Ableitungen $\partial f_i/\partial y_1 \ldots \partial f_i/\partial y_n$ reelle eindeutige stetige Funktionen sind für alle reellen Werte der $x, y_1, \ldots, y_n$, die den Ungleichungen:

$$(4) \qquad |x - x_0| \leqq a, \quad |y_1 - y_1^0| \leqq b, \ \ldots, \ |y_n - y_n^0| \leqq b$$

genügen; sei ferner M das Maximum des absoluten Betrags der f_i in diesem Bereich. *Das System gestattet eine und nur eine Lösung* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *die in der Umgebung von* x_0 *stetig ist und für* $x = x_0$ *den Anfangsbedingungen* $y_1 = y_1^0 \cdots y_n = y_n^0$ *genügt.* Diese Lösung ist stetig mindestens in dem Intervall:

$$(5) \qquad |x - x_0| < l,$$

wenn l die kleinere der beiden Zahlen a und b/M bezeichnet. Zum Beweis zerlegt *Cauchy* das Intervall $x_0 x$ in m Teilintervalle $x_0 x_1$, $x_1 x_2, \ldots, x_{m-1} x$ und setzt, für den Fall einer Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

der Reihe nach:

$$(7) \qquad \begin{aligned} y_1 &= y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= y_{m-1} + (x - x_{m-1}) f(x_{m-1}, y_{m-1}). \end{aligned}$$

Wenn m über alle Grenzen wächst und dabei jedes Teilintervall unbegrenzt abnimmt, konvergiert $y_m(x)$ unter der Voraussetzung (5) gegen eine Grenzfunktion $y(x)$, und diese genügt der Gleichung (6) und den Anfangsbedingungen; *Cauchy* zeigt auch, dass sie die einzige ist, die das thut. — Die Methode ist genau dieselbe für ein System (2) von der Ordnung n.

4. Vervollkommnung durch Lipschitz. *R. Lipschitz*[6]) hat Cauchy's Methode wiedergefunden und die von Cauchy geforderten Stetigkeits-

bigen Integrale $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ partikuläre Lösungen; *P. S. Laplace* gebraucht in früheren Abhandlungen dieselben Namen im umgekehrten Sinne. Vgl. Nr. **20**.

5) *Cauchy* hat diese Methode [deren Prinzip sich schon bei *Euler* findet, Inst. calc. int. 1, 1768, p. 493] zwischen 1820—30 an der École polytechnique vorgetragen; seine Vorträge sind damals autographiert, aber nie veröffentlicht worden. Die Methode ist von Cauchy selbst kurz resumiert zu Anfang einer 1835 lithographierten, exerc. d'anal. 1, 1840, p. 327 wieder abgedruckten Abhandlung; ausserdem kennt man sie durch *G. Coriolis* (J. de math. 2, 1837, p. 229) und *Moigno* (2, leç. 26, 27, 28, 33).

6) Darb. Bull. 10, 1876, p. 149; Lehrbuch p. 504; Ann. di mat. (2) 2, 1868, p. 288.

bedingungen erweitert. Man braucht nicht die Existenz und Stetigkeit der $\partial f_i/\partial y_j$ vorauszusetzen; *es genügt, wenn die* (im Gebiet (4) eindeutigen und stetigen) *Funktionen f_i für alle Wertsysteme $(x, y_1, .., y_n)$, $(x, \eta_1, .., \eta_n)$ des Gebietes* (4) *der Ungleichung*

(8) $|f_i(x, y_1, \ldots y_n) - f_i(x, \eta_1, \ldots \eta_n)| < k_1|y_1 - \eta_1| + \cdots + k_n|y_n - \eta_n|$

genügen, in der die k numerische Konstanten bedeuten.

C. Runge[7]) hat diese Resultate anders abgeleitet und eine einfache Abschätzung des bei jedem Schritt auftretenden Fehlers gegeben, sowie ein der *Simpson*'schen Regel (II A 2, Nr. 51) analoges Verfahren zur Abkürzung der Rechnung. *V. Volterra*[8]) giebt ebenfalls einen andern Beweis, der die *Lipschitz*'sche Bedingung etwas erweitert (vgl. 8); diese Methode ist von *G. Picciati*[9]) graphisch interpretiert worden.

5. Genaue Bestimmung des Konvergenzintervalls. Das Intervall, in dem das Cauchy-Lipschitz'sche Verfahren konvergiert, ist im allgemeinen grösser als unter (5) angegeben. Namentlich hat *P. Painlevé*[10]) gezeigt, dass man l ersetzen kann durch λ, die kleinere der beiden Zahlen

(9) a und $\dfrac{1}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \log\left[1 + \dfrac{b(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)}{M_0}\right]$;

dabei bedeutet M_0 das Maximum des absoluten Betrags der $f_i(x, y_1^0, .., y_n^0)$ für $|x - x_0| < a$. In vielen Fällen ist $\lambda > l$. Sind z. B. die f_i und die $\partial f_i/\partial y_j$ für $|x - x_0| < a$ und alle y stetig und sind ausserdem die $|\partial f_i/\partial y_j|$ kleiner als eine endliche Grösse A, so ist die zweite der Grössen (9) unendlich und die den Anfangsbedingungen genügende Lösung ist im ganzen Intervall $|x - x_0| < a$ stetig und einzig[11]).

Nennen wir allgemein das System (2) *regulär* für ein Wertsystem $x = x_0$, $y = y_1^0, .., y_n = y_n^0$, wenn für diese Werte die Lipschitz'schen Bedingungen erfüllt sind, im andern Falle diese Werte für das System *singulär*; nennen wir ferner eine Lösung $y_1(x), .., y_n(x)$ *im Intervalle* $(x_1 \ldots x_2)$ *regulär*, wenn in diesem Intervall die Funktionen $y_1(x), .., y_n(x)$ stetig sind und keines der Wertsysteme $(x, y_1(x), .., y_n(x))$ für das System (2) singulär ist. Sei endlich $(x_1 \ldots x_2)$, wo $x_1 < x_0 < x_2$,

---

7) Math. Ann. 44, 1894, p. 437; 46, 1895, p. 167.

8) Giorn. di mat. 19, 1881, p. 333.

9) Politecn. 41, 1893, p. 493 u. 537.

10) Bull. soc. math. 27, 1899, p. 149. Die Grenze λ war zuerst von *E. Lindelöf* bei Gelegenheit der Methode von *E. Picard* (Nr. 9) angegeben worden.

11) *I. Bendixson*, Stockh. Öfv. 1893, p. 599; *E. Lindelöf*, J. de math. (4) 10, 1894, p. 117; *E. Picard*, Traité 3, p. 88—93.

das *grösste* Intervall, in dem die durch die Anfangswerte $x_0, y_1^0, .., y_n^0$ definierte Lösung regulär ist. In jedem Intervall, das nicht ganz dem Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ angehört, hört dann diese Lösung im allgemeinen auf, stetig oder einzig zu sein. Um ihr Ziel vollständig zu erreichen, muss eine Methode zur Berechnung der Lösungen des Systems (2) das ganze *Regularitätsintervall* $(x_1 \ldots x_2)$ zum Konvergenzintervall haben. *E. Picard*[12]) und *P. Painlevé*[13]) haben gezeigt, dass das für die Methode von Cauchy und Lipschitz der Fall ist. Sie giebt infolge dessen eine Entwicklung der Lösung in Reihen, die im ganzen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ konvergieren. *Painlevé* hat daraus Reihen von *Polynomen* in $x, x_0, y_1^0, .., y_n^0$ abgeleitet, die im ganzen Regularitätsintervall konvergieren und die Lösung darstellen.

6. Erste Integrale eines Differentialsystems. Nach dem Vorhergehenden gehört zu jedem regulären System von Anfangswerten eine und nur eine Lösung:

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, .., y_n^0) \qquad (i = 1, 2, .., n) \tag{10}$$

von (2). *I. Bendixson*[14]) untersucht diese Funktionen φ_i von $(n+2)$ Variabeln unter der Voraussetzung, dass *die f_i stetige erste Ableitungen nach den y haben*. Genauer ausgedrückt: seien $\alpha, \beta_1, .., \beta_n$ solche Werte von $x, y_1, .., y_n$, dass im Bereich

$$|x - \alpha| < a, \quad |y_1 - \beta_1| < b, \ \ldots |y_n - \beta_n| < b \tag{11}$$

die f_i und die $\partial f_i / \partial y_j$ stetig, die $|f_i| < M$ seien; sei l die kleinere der Zahlen a und b/M; seien $x, x_0, y_1^0, .., y_n^0$ Werte, die dem Bereich

$$|x - \alpha| < \frac{l}{4}, \ |x_0 - \alpha| < \frac{l}{4}, \ |y_1^0 - \beta_1| < \frac{b}{4}, \cdots |y_n^0 - \beta_n| < \frac{b}{4} \tag{12}$$

angehören. Dann sind die φ_i und ihre 1. Ableitungen im Bereich (12) stetig und die Werte der φ_i gehören selbst diesem Bereich an. Vertauscht man die Rollen der beiden Wertsysteme $(x, y_1, .., y_n)$ und $(x_0, y_1^0, .., y_n^0)$, so sieht man: das allgemeine Integral von (2) lässt sich auf die Form bringen:

$$\varphi_i(x_0, x, y_1, .., y_n) = y_i^0 \qquad (i = 1, 2, .., n), \tag{13}$$

in der dem x_0 ein numerischer Wert beizulegen ist und die φ_i mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen sind. Diese φ_i genügen der partiellen Differentialgleichung:

12) Par. C. R. 128, 1899, p. 1363.

13) In Vorlesungen am Coll. de France, 1896/97; Par. C. R. 128, 1899, p. 1505; Bull. soc. math. 27, 1899, p. 151. Vgl. auch die Fussn. 7 citierten Arbeiten von *Runge*.

14) Bull. soc. math. 24, 1896, p. 220. Vgl. auch *G. Peano*, Tor. Atti 33, 1897, p. 9, sowie Nr. **10** a. E.

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + f_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + f_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} + \cdots + f_n \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Umgekehrt wird jedes Integral F von (14), das stetige erste Ableitungen hat, erhalten, indem man für F eine willkürliche Funktion G von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ nimmt.

Man bezeichnet als *erstes Integral* oder einfach als *Integral*[15]) von (2) jede Relation:

$$(15) \qquad F(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.},$$

die durch *jede* Lösung von (2) erfüllt wird. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn F ein Integral von (14) ist. Jedes System (2), das den angegebenen Stetigkeitsbedingungen genügt, lässt also n unabhängige (I B 1 b, **19**) erste Integrale zu, die das allgemeine Integral von (2) definieren und aus denen man alle andern ersten Integrale ableiten kann. Die Probleme (2) und (14) sind also äquivalent; die *Existenz der Integrale der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung* ist damit bewiesen.

Diese Sätze, die seit dem Beginn der Integralrechnung angenommen waren, gelten demnach, *sobald die f_i und die $\partial f_i / \partial y_j$ stetig sind.*

Insbesondere lässt eine Gleichung 1. Ordnung:

$$(16) \qquad dy - f(x, y)\, dx = 0,$$

wenn f und $\partial f / \partial y$ in einem gewissen Bereich stetig sind, einen *integrierenden Faktor* zu, m. a. W. es existiert eine Funktion $M(x, y)$ von der Art, dass $M(dy - f dx)$ ein exaktes Differential (II A 2, **43**) ist.

7. Anwendung der Methode auf das komplexe Gebiet. Ist das System S *analytisch*, so lässt sich, wie *E. Picard*[16]) gezeigt hat, die Cauchy-Lipschitz'sche Methode ohne Modifikationen auf die Untersuchung der analytischen Integrale des Systems (2) anwenden. Seien $x, y_1, \ldots, y_n$ komplexe Variable, $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ Werte, für die die f_i *holomorph* (II B 1, **2**) sind. Sei von x_0 aus ein Weg l mit stetiger Tangente gezogen, und seien die Punkte x dieses Weges durch die Länge s des Bogens $x_0 x$ festgelegt: dann ist längs l das System (2) äquivalent mit $2n$ reellen Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln s. Indem man auf dieses System die früheren Resultate anwendet, erhält man die Sätze:

I. *Es giebt eine und nur eine holomorphe Lösung $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ von (2) von der Art, dass für $x = x_0$ wird: $y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^0$.*

15) „Erstes Integral" ist der klassische Terminus; *H. Poincaré* sagt einfach Integral.

16) Darb. Bull. (2) 12, 1888, p. 148; Traité 2, p. 309; Par. C. R. 128, 1899, p. 1363.

Wenn die Funktionen f_i im Bereich (4) holomorph und dem absoluten Betrag nach $< M$ sind, sind die $y(x)$ holomorph in dem Kreise $|x - x_0| < l$, wo l die kleinere der Grössen a und b/M bedeutet.

II. *Ausser dieser holomorphen Lösung giebt es keine andere Lösung von der Art, dass $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ bezw. gegen $y_1^0, \ldots, y_n^0$ konvergieren, wenn x auf einem Weg von endlicher Länge gegen x_0 konvergiert.* (Vgl. Nr. **13** a. E.)

Nennen wir eine Lösung $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *analytisch-regulär* für einen Wert x_1, wenn die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ für $x = x_1$ und die Funktionen f_i für $x = x_1$, $y_1 = y_1(x_1), \ldots, y_n = y_n(x_1)$ holomorph sind; sei ferner G ein Weg mit stetiger Tangente, der in x_0 beginnt, und $x_0\xi$ der grösste Bogen von G, längs dessen die durch die Anfangswerte $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ definierte Lösung analytisch-regulär ist. Die Cauchy-Lipschitz'sche Methode giebt diese Lösung jedenfalls längs des ganzen Bogens $x_0\xi$, unter Umständen noch darüber hinaus. Nimmt man speziell für G eine beliebige Halbgerade und bezeichnet mit A die von $x_0\xi$, während G sich um x_0 dreht, überstrichene Fläche, so giebt die Methode die Lösung für das ganze Gebiet A und erlaubt sie in Reihen zu entwickeln (Nr. **14**).

8. **Fall stetiger Differentialquotienten, die der Lipschitz'schen Bedingung nicht genügen.** Genügen die f_i nur der Bedingung, im Bereiche (4) stetig zu sein, so existiert *mindestens eine* den Anfangsbedingungen $x_0, y_1^0, \ldots y_n^0$ entsprechende Lösung $y_1(x) \ldots y_n(x)$ von (1), im allgemeinen aber *unendlich viele*, wie zuerst *G. Peano*[17]) bewiesen hat. Genauer gesagt: das System (1) und die Anfangsbedingungen bestimmen zu jedem (zu x_0 benachbarten) Wert von x eine *stetige* Mannigfaltigkeit von Werten $(y_1, \ldots, y_n)$; wenn diese sich auf ein einziges Wertsystem reduziert, dann und nur dann entspricht den Anfangsbedingungen eine einzige Lösung. Dazu ist die *Lipschitz*'sche Bedingung ausreichend, aber nicht notwendig. *Peano*'s Abhandlung, die mit der Symbolik des Logikkalkuls (VII A 4) geschrieben ist, ist von *G. Mie*[18]) in gewöhnlicher Sprache erläutert, ihre Resultate sind von *Ch. de la Vallée-Poussin*[19]), *C. Arzelà*[20]) und *W. F. Osgood*[21])

17) Math. Ann. 37, 1890, p. 182; Tor. Atti 21, p. 677.

18) Math. Ann. 43, 1893, p. 533.

19) Brux. mém. cour. 47, 1893, und Brux. soc. sc. 17, 1893, p. A. 8; vgl. auch *V. Volterra*, Fussn. 9.

20) Bol. mem. (5) 5, 1895, p. 225; 6, 1896, p. 131.

21) Monatsh. 9, 1898, p. 332.

vereinfacht und vervollständigt worden. Die beiden ersteren dehnen *B. Riemann*'s Definition des bestimmten Integrals (II A 2, Nr. **31**), d. h. des Integrals der Differentialgleichung $dy/dx = f(x)$, auf das Integral der Gleichung $dy/dx = f(x, y)$ aus; daraufhin beweisen sie die Existenz der Integrale für den Fall, dass f stetig nach y, unstetig aber integrabel nach x ist. *Osgood* findet: wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, so definieren die Anfangsbedingungen (x_0, y_0) unendlich viele Lösungen; die entsprechenden Kurven bedecken den Streifen der Ebene vollständig, der zwischen einer grössten Lösung $y = Y(x)$ und einer kleinsten $Y_0(x)$ liegt. Wenn $Y(x)$ und $Y_0(x)$ zusammenfallen, dann und nur dann definieren die Anfangsbedingungen (x_0, y_0) eine einzige Lösung. Das tritt jedenfalls ein, wenn die *Lipschitz*'sche Bedingung erfüllt ist, aber auch wenn:

$$|f(x, y_1) - f(x, y)| < k\,|y_1 - y| \log \frac{1}{|y_1 - y|}$$

oder:

$$|f(x, y_1) - f(x, y)| < k\,|y_1 - y| \log \frac{1}{|y_1 - y|} \log\log \frac{1}{|y_1 - y|}$$

u. s. w., wo k eine positive Konstante bedeutet.

Methode der successiven Annäherungen.

9. Prinzip und Resultate der Methode. Eine zweite Methode ist seit langer Zeit von den Astronomen gebraucht worden; den Beweis ihrer Konvergenz hat für einen speziellen Fall *J. Liouville* [22]) gegeben. Dass auch *Cauchy* sich mit ihr beschäftigt hat, wissen wir durch *Moigno* [23]), der sie folgendermassen darstellt: „Sei (der Einfachheit wegen) eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung vorgelegt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X(x)y; \tag{17}$$

[$X(x)$ stetig für $|x - x_0| < a$]; seien x_0, y_0, y_0' die gegebenen Anfangswerte; sei, als erste Annäherung,

$$y_1 = y_0'(x - x_0) + y_0$$

gesetzt, dann:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y_2}{dx^2} = X(x)y_1, \qquad (y_2(x_0) = y_0,\ y_2'(x_0) = y_0'), \\ &\frac{d^2y_3}{dx^2} = X(x)y_2, \qquad (y_3(x_0) = y_0,\ y_3'(x_0) = y_0') \end{aligned} \tag{18}$$

u. s. w. Die $y_2, y_3, \ldots$ bestimmen sich durch successive Quadraturen;

22) J. de math. 2, 1836, p. 19; 3, 1838, p. 566.
23) Traité 2, p. 702.

sie konvergieren gegen eine Grenzfunktion y, die Lösung von (17)." Die Stetigkeitsbedingungen, unter denen die Methode anwendbar ist, giebt Moigno nicht an. Eine analoge Methode haben *J. Caqué*[24]), *L. Fuchs*[25]) und *G. Peano*[26]) auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung angewendet.

E. Picard[27]) hat die Methode wiedergefunden. Sei zur Vereinfachung der Schreibweise in (2) $y, z, \ldots w$ statt $y_1, y_2, \ldots y_n$ gesetzt; die Lipschitz'schen Bedingungen (Nr. 4) seien für die Anfangswerte erfüllt. Sei (wie in Nr. 3) l die kleinere der Grössen a und b/M, h die kleinere der Grössen l und $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^{-1}$. Picard setzt:

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_0, \ldots, w_0) \cdots \frac{dw_1}{dx} = f_n(x, y_0, \ldots, w_0), \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, w_1) \cdots \frac{dw_2}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, w_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mit der Bedingung, dass die Funktionen $(y_1, z_1, \ldots w_1)$, $(y_2, z_2, \ldots w_2), \ldots$ für $x = x_0$ die Werte $(y_0, z_0, \ldots w_0)$ annehmen. Picard zeigt, dass die Funktionen $y_p, z_p, \ldots, w_p$, solange x zwischen $x_0 - h$ und $x_0 + h$ liegt, für $\lim p = \infty$ gegen Grenzfunktionen $y(x), z(x), \ldots w(x)$ konvergieren, die eine den Anfangsbedingungen genügende Lösung des Systems (2) geben. Übrigens kann man als erste Annäherung statt $y_0, z_0, \ldots w_0$ irgend ein System von stetigen Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$, $\ldots W(x)$ benutzen, die für $x = x_0$ bezw. die Werte $y_0, z_0, \ldots w_0$ oder benachbarte Werte annehmen.

Wendet man die Methode auf das System:

$$(20)\qquad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = X(x)y$$

an und benutzt als erste Annäherung:

$$y = y_0'(x - x_0) + y_0, \; y' = y_0',$$

so erhält man die von Moigno mitgeteilte Methode Cauchy's.

I. Bendixson[28]) und *E. Lindelöf*[29]) haben gezeigt), dass die Methode

---

24) J. de math. (2) 9, 1864, p. 185 (Par. thèse).

25) Ann. di mat. (2) 4, 1870, p. 36.

26) Math. Ann. 32, 1888, p. 450; Tor. Atti 22, p. 437.

27) J. de math. (4) 6, 1890, p. 145; (4) 9, 1893, p. 217; J. éc. polyt. cah. 60, 1890, p. 89; Traité 2, p. 301; Bull. soc. math. 19, 1891, p. 61; Nouv. ann. (3) 10, 1891, p. 197.

28) Stockh. Öfv. 1893, p. 599.

29) Par. C. R. 118, 1894, p. 454; J. de math. (4) 10, 1894, p. 117; *Picard*,

in dem Intervall $(x_0 - l \cdots x_0 + l)$ konvergiert, das grösser sein kann als $(x_0 - h \cdots x_0 + h)$; letzterer auch (vgl. Nr. 5), dass sie konvergiert und dass die von ihr gelieferte Lösung die einzige ist in dem Intervall $(x_0 - \lambda \cdots x_0 + \lambda)$[30]).

Zur *genauen* Bestimmung des Konvergenzintervalls der Methode kennt man kein Mittel. Es giebt Fälle, in denen sie im ganzen Regularitätsintervall (Nr. 5) konvergiert, und andere, in denen sie nicht soweit konvergiert, als die Taylor'sche Entwicklung der Lösung[31]).

Auf das komplexe Gebiet lässt sich diese Methode wie die erste übertragen[32]).

10. Korollare. Wenn die f_i stetige erste Ableitungen nach $y, z, \ldots w$ haben, so ergiebt sich auch aus dieser Methode, dass die φ_i (Glchg. 13) stetige erste Ableitungen haben und Integrale der Gleichung (14) sind[33]). Für den Fall, dass die f_i stetig sind, ohne der Lipschitz'schen Bedingung zu genügen, hat *I. Bendixson*[34]) gezeigt: *wenn* die Methode von *Picard* konvergiert, definiert sie eine Lösung von (2); aber es giebt dann im allgemeinen noch andere denselben Anfangsbedingungen entsprechende Lösungen (Nr. 8). Speziell für den Fall einer Gleichung erster Ordnung, in der $f(x, y)$ für (x_0, y_0) positiv ist und mit y wächst, definiert die Methode von *Picard immer* eine Lösung.

Methode des calcul des limites.

11. Prinzipien und Resultate dieser Methode. Die noch zu besprechenden Methoden setzen das System (2) wesentlich als *analytisch*

Traité 3, p. 88. Vgl. auch *C. Juel*, N. Tidsskr. 4, 1893, p. 10 und *D. Sintzow*, Kasan Ges. (2) 3, 1893, p. 138.

30) Vgl. auch *G. Peano*, Nouv. ann. (3) 11, 1892, p. 79; Tor. Atti 33, p. 9 und *O. Niccoletti*, Linc. Rend. Dez. 1895, p. 316.

31) *P. Painlevé*, Bull. soc. math. 27, 1899, p. 152.

32) *Picard*, Par. C. R. 118, 1894, p. 457; Traité 3, p. 98. Vgl. auch *O. v. Lichtenfels*, Monatsh. 1890, p. 275.

33) *Picard* bei *G. Darboux*, Théorie des surfaces 4, Paris 1896, p. 363; Bull. soc. math. 25, 1897, p. 35. Picard setzt voraus, dass die ersten Ableitungen der f_i der Lipschitz'schen Bedingung genügen. Diese Einschränkung haben *O. Niccoletti* (Tor. Atti 33, 1897, p. 746) und *G. v. Escherich* (Wien. Ber. 168, 1899, p. 622) beseitigt und so mit Hülfe der Methode der successiven Annäherungen dasselbe Resultat erreicht wie *Bendixson* (Fussn. 14) und *Peano* mit der Methode von *Cauchy-Lipschitz*. Sie zeigen überdies, dass *Picard*'s Reihen gliedweise differentiiert werden dürfen. — Über die Anwendung der Methode auf solche Differentialgleichungen 2. O., bei denen die Werte von y für zwei Werte von x vorgeschrieben sind, vgl. man II A 7a, Nr. 5.

34) Stockh. Öfv. 1897, p. 617.

voraus. Seien also $x, y_1, \ldots y_n$ *komplexe* Variable, $x_0, y_1^0, \ldots y_n^0$ Werte derselben, für die die f_i *holomorph* sind. *Wenn* das System (2) eine für $x = x_0$ holomorphe Lösung zulässt, so giebt es nur *eine* solche Lösung, und die Werte der successiven Ableitungen der y_i für $x = x_0$ lassen sich durch wiederholte Differentiation der Gleichungen (2) berechnen; man kann also die Taylor'schen Entwicklungen der gesuchten Lösung aufstellen. Aber den *Beweis*, dass die so gebildeten Reihen einen bestimmten Konvergenzkreis haben und wirklich eine Lösung darstellen, hat zuerst *A. Cauchy*[35]) gegeben. Seine Methode beruht auf der Einschränkung (limitation) der absoluten Beträge der Ableitungen einer analytischen Funktion (II B 1, Nr. **3, 39**): sind die f_i holomorph und die $|f_i| < M$ im Bereiche (4), so ist für alle ganzen Zahlen $p, q, \ldots s$:

$$(21) \qquad \frac{1}{p!\,q!\ldots s!}\left|\frac{\partial^{p+q+\cdots+s} f_i}{\partial x^p \partial y_1^q \ldots \partial y_n^s}\right| \leqq \frac{M}{a^p b^{q+\cdots+s}}.$$

Infolge dessen zeigt die Vergleichung des Systems (2) mit einem Systeme (2′), in dem alle f_i gleich der *„fonction majorante“*

$$(22) \qquad \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)\left(1-\frac{y_1-y_1^0}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n-y_n^0}{b}\right)}$$

sind, dass das System (2) eine den Anfangswerten $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ genügende und in dem Kreise $|x - x_0| < \varrho$ holomorphe Lösung besitzt, wenn:

$$(23) \qquad \varrho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right)$$

gesetzt wird.

Cauchy hat die Ungleichungen (21) aus der Theorie der Integrale komplexer Funktionen abgeleitet; sein Beweis ist von *Briot und Bouquet* beträchtlich vereinfacht worden[36]). *K. Weierstrass*[37]) und *Ch. Méray*[38])

---

35) Zuerst in den lithographierten Abhandlungen von Turin (Okt. 1831, 1832, März 1833) und Prag (1835; Oeuvres (2), t. 15; erstere zum Teil wieder abgedruckt exerc. d'anal. 2, 1841, p. 41, letztere ib. 1, 1840, p. 327; dann Noten in Par. C. R. vom 5./4. und 11./11. 1839, 22./6., 26./10., 2./11. und 9./11. 1840, 6. und 7. 1852, 9. und 10. 1846 [oeuvr. (1) 7]. Vgl. auch *Moigno* 2, p. 747.

36) Par. C. R. 36, 1854, p. 264 u. 334; 39, 1855, p. 368, 755 u. 795; 40, 1856, p. 123; J. éc. polyt. cah. 36, 1856, p. 86 u. 131. Letztere Abhandlung auch in *H. Fischer*'s deutscher Übers. von Briot's und Bouquet's Theorie der doppeltperiod. Funkt., Halle 1862, p. 403.

37) Ges. Werke 1, p. 67, 75 (a. d. J. 1842 und nach einer Note p. 84 un-

haben den Cauchy'schen Satz ebenfalls aus den Ungleichungen (21) abgeleitet, aber diese ohne Integralrechnung nur aus der Theorie der Potenzreihen bewiesen. Überdies beweist Weierstrass' Verfahren den folgenden von *Cauchy* implicite angenommenen Satz[39]): „Seien $\alpha, \beta_1, \ldots \beta_n$ Werte von $x, y_1, \ldots, y_n$, für welche die f_i holomorph sind, so sind die Funktionen φ_i (10) *analytische* Funktionen ihrer $n+2$ Argumente und für $x = \alpha$, $x_0 = \alpha_1$, $y_1^0 = \beta_1, \ldots, y_n^0 = \beta_n$ holomorph." Aus diesem Satz folgt: Löst man die Gleichungen (10) nach den y_i^0 auf, m. a. W. vertauscht man $(x, y_1, \ldots, y_n)$ mit $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, so sind die entstehenden Funktionen (13), in denen dem x_0 der numerische Wert α_1 zu belassen ist, n für $x = \alpha$, $y_1 = \beta_1, \ldots, y_n = \beta_n$ holomorphe erste Integrale von (2); sie genügen der Gleichung (14). Jedes für $x = \alpha$, $y_1 = \beta_1, \ldots, y_n = \beta_n$ holomorphe Integral dieser Gleichung lässt sich als für $\varphi_1 = \beta_1, \ldots, \varphi_n = \beta_n$ holomorphe Funktion $G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ darstellen. *Die Existenz solcher holomorphen Integrale von* (14) *ist damit bewiesen.*

Weierstrass' Darstellung ist von *L. Königsberger*[40]) vereinfacht worden.

12. Fortbildung der Methode. Die in (23) angegebene untere Grenze für den Konvergenzradius der Reihen wird im allgemeinen überschritten. *E. Picard*[41]) hat zunächst aus der Darstellung von *Briot* und *Bouquet* die unabhängige Variable beseitigt und dadurch gezeigt, dass man an Stelle von ϱ die (für das neue System zu bildende) Grösse $\frac{b}{(n+1)M}$ setzen kann; später (Nr. 7) hat er ϱ durch die grössere l der Zahlen a und b/M ersetzt (die in jedem Fall $> \varrho$ ist). *P. Stäckel*[42]) bemerkt, dass man in (21) M im allgemeinen durch eine kleinere Grösse G ersetzen kann. *E. Lindelöf*[43]) endlich gewinnt einen Konvergenzradius l_1 durch eine elementare Darstellung der Prinzipien des calcul des limites: l_1 bedeutet die kleinere der beiden Grössen a und b/M_1, M_1 das Maximum (im Bereich 4)

---

abhängig von *Cauchy*, aber damals nicht publiziert). Dann J. f. Math. 51, 1856, p. 1 (ges. Werke 1, p. 198).

38) Par. C. R. 40, 1855, p. 787; Précis d'analyse infinit., Dijon 1865; Leçons nouvelles, Paris 1897.

39) Ges. W. 1, p. 81. — *Cauchy* beweist den Satz aus seiner Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung (Nr. 16).

40) J. f. Math. 104, 1889, p. 174; Lehrbuch p. 25.

41) Cours lithogr., Paris 1886/87, p. 292.

42) Par. C. R. 126, 1898, p. 203.

43) Acta Fenn. 26, 1896.

der Werte, die man erhält, wenn man in den Entwicklungen der f_i nach Potenzen von $x - x_0$, $y_1 - y_1^0, \ldots, y_n - y_n^0$ alle Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt.

Die *Existenz der impliciten Funktionen* ist eine unmittelbare Folge[44]): Seien $H_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, n holomorphe Funktionen, die für $x = x_0$, $y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^0$ Null sind und deren Funktionaldeterminante (I B 1, **21**) $\frac{\partial (H_1, \ldots H_n)}{\partial (y_1, \ldots y_n)}$ für diese Werte nicht 0 ist. Die Gleichungen:

$$H_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

definieren *ein und nur ein* System von Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, die für $x = x_0$ holomorph und bezw. gleich $y_1^0, \ldots, y_n^0$ sind. *E. Lindelöf*[45]) beweist neuerdings die Existenz dieser impliciten Funktionen durch ein einfaches Rekursionsverfahren und leitet daraus den Satz von *Cauchy* für ein Differentialsystem (2) ab.

13. Eindeutige Bestimmung der Integrale durch die Anfangsbedingungen. Dass das System (2) ausser der Cauchy'schen Lösung keine andere den Anfangsbedingungen genügende *holomorphe* Lösung zulässt, ist klar. Aber giebt es vielleicht ausserdem noch *nicht holomorphe* Lösungen von der Art, dass $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ bezw. gegen $y_1^0, \ldots, y_n^0$ konvergieren, wenn x sich längs eines gewissen Weges C dem x_0 nähert?[46]) Dass diese Frage zu verneinen ist, wenn der Weg C der Bedingung unterworfen wird, eine *endliche Länge* zu haben, haben *Briot* und *Bouquet*[47]) für eine Gleichung 1. Ordnung, *Picard*[48]) für ein beliebiges System (2) gezeigt; es folgt auch aus der Cauchy-Lipschitz'schen Methode (Nr. 3 ff.). Aber bei der fundamentalen Bedeutung des Satzes für die Theorie der Differentialgleichungen war es wichtig ihn zu beweisen, ohne dass dabei dem Weg C eine Einschränkung auferlegt wird[49]). Unter dem Ausdruck: „der (von einem

---

44) Vgl. namentlich *Cauchy*, Par. C. R. Nov. 1839, Okt. 1846.

45) Darb. Bull. (2) 23, 1899, p. 68.

46) Im folgenden sagen wir von einer solchen Lösung: „sie entspricht den Anfangswerten $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$".

47) J. éc. polyt. cah. 36, 1856, p. 31.

48) Cours lithogr., Paris 1886/87, p. 299.

49) Man kann sich eine analytische Funktion vorstellen, die nur im Bereich A zwischen zwei den Punkt x_0 umwindenden Spiralen definiert (und holomorph) ist und längs jedes im Innern von A verlaufenden, dem x_0 sich nähernden Weges C gegen y_0 konvergiert. Jeder solche Weg hat eine unendliche Länge, wenn die beiden Spiralen eine unendliche Länge haben.

Punkt x_1 ausgehende) Weg C nähert sich dem Punkt x_0" ist zu verstehen: zu jeder (noch so kleinen) Grösse ε gehört ein Punkt x' von C, jenseits dessen der Weg C im Innern eines Kreises γ vom Mittelpunkt x_0 und Radius ε bleibt[50]). Ferner ist unter dem Ausdruck: „eine (in allen Punkten von C ausser x_0 holomorphe) Funktion $y(x)$ konvergiert gegen y_0, wenn x auf C sich dem y_0 nähert" zu verstehen: zu jeder (noch so kleinen) Grösse η gehört eine andere ε von der Art, dass $|y(x) - y_0| < \eta$ bleibt für jeden Punkt x auf C jenseits des eben bestimmten Punktes x' (vgl. II A 1, Nr. 23 B). Dann kann man zeigen: *die Lösung von Cauchy ist die einzige, die gegen $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ konvergiert, wenn x auf einem bestimmten Weg C gegen x_0 konvergiert*[51]). Den ersten Beweis dieses Satzes hat *E. Picard*[52]) veröffentlicht; er setzt die Existenz der impliciten Funktionen und die der Integrale der linearen homogenen (analytischen) partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung als bewiesen voraus. Einen anschaulichen Beweis giebt *P. Painlevé*[53]): die Transformation $y_i = \varphi_i(x, x_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ — die φ_i sind durch (10) erklärt — verwandelt das System (2) in das System $dY_i/dx = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; für dieses ist das Theorem evident.

14. Erweiterung des Konvergenzbereichs der Methode. Der Bereich, in dem die Methode konvergiert, ist im allgemeinen beträchtlich kleiner, als der der *Cauchy-Lipschitz*'schen Methode; diese besitzt also von den drei besprochenen Methoden den grössten Konvergenzbereich. Ersetzt man jedoch im calcul des limites die Taylor'schen Reihen durch die neuerdings von *G. Mittag-Leffler*[54]) eingeführten Reihen, so erhält man die Lösung in dem ganzen zu x_0 gehörenden „Holomorphiestern".

Methode der Variation der Konstanten.

15. Eine vierte, von *Cauchy*[55]) vorgeschlagene Methode multipliziert alle Differentialkoeffizienten f_i (Nr. 1) mit ε und entwickelt die

50) Dabei kann C eine stetige Tangente haben und x ein Asymptotenpunkt von ihm sein; dann kann seine Länge unendlich sein.

51) *L. Fuchs* (Berl. Ber. 1886, p. 279) bestreitet diesen Satz. Er verbindet mit den Worten „dem x_0 sich nähern" einen andern Sinn; in seinen Beispielen benutzt er Wege, die abwechselnd dem x_0 sich unbegrenzt nähern und dann wieder um ein Endliches von ihm entfernen.

52) Traité 2, 1892, p. 314. — *Weierstrass* scheint den Satz vorgetragen zu haben, doch finde ich nirgends eine Andeutung seines Beweises.

53) Leçons p. 394.

54) Par. C. R. 128, 1899, p. 1212; vgl. II B 1, Nr. 36a.

55) Par. C. R. 11, 1840, p. 1, 629, 730; 15, 1842, p. 101, 141, 188.

Differenzen $y_i - y_i^0$ nach steigenden Potenzen von ε. *Cauchy* knüpft dieses Verfahren an die (auf das vorige Jahrhundert zurückgehende) *Methode der Variation der Konstanten*: Vorausgesetzt die f_i seien analytische Funktionen eines Parameters ε, holomorph für $x = x_0$, $y_1 = y_1^0, \cdots y_n = y_n^0$, $\varepsilon = 0$; vorausgesetzt ferner, man kenne die Lösung $y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, .., y_n^0)$ des Systems (2) für $\varepsilon = 0$. Die Einführung der neuen Variabeln Y_i durch:

$$(25) \qquad y_i = \varphi_i(x, x_0, Y_1, .., Y_n) \qquad (i = 1, 2, .., n)$$

transformiert das System (2) in ein System (2′), dessen Differentialkoeffizienten ε zum Faktor haben; dann kann man die Differenzen $Y_i - y_i^0$ nach Potenzen von ε entwickeln.

In dieser allgemeinen Form fällt das Prinzip dieser Methode mit dem folgenden Satze zusammen, den *H. Poincaré*[56]) seinen Untersuchungen über astronomische Mechanik zugrunde gelegt und zuerst explicite und vollständig bewiesen hat: Seien die f_i analytisch von ε abhängig; sei (für $\varepsilon = 0$) $\bar{y}_1(x), \ldots \bar{y}_n(x)$ die den Anfangswerten x_0, $y_1^0, .., y_n^0$ entsprechende[46]) Lösung; sei Δ ein Bereich[57]), dem x_0 angehört und in dem (einschliesslich der Grenzen) die Funktionen $\bar{y}_i(x)$ holomorph sind; seien endlich die f_i holomorph für $x = x_1$, $y_1 = y_1(x_1)$, $\ldots y_n = \bar{y}_n(x_1)$, sobald x_1 ein (innerer oder Grenz-) Punkt des Bereiches Δ ist. *Dann ist die den Anfangswerten $x_0, y_1^0, .., y_n^0$ entsprechende Lösung für hinlänglich kleine ε im Bereiche Δ holomorph und lässt sich nach Potenzen von ε in eine für $|\varepsilon| < \eta$ und jedes x des Bereiches Δ konvergente Reihe entwickeln.*

Das Theorem bleibt bestehen, wenn x_0 und die y_i^0 für $\varepsilon = 0$ holomorphe Funktionen von ε sind; ferner wenn die f_i von mehreren Parametern analytisch abhängen.

E. Picard[58]) und *E. Lindelöf*[59]) beweisen den Satz mit der Methode der successiven Annäherungen (Nr. 9); er folgt auch leicht aus der *Cauchy-Lipschitz*'schen Methode (Nr. 3). Beide Methoden führen zu einem entsprechenden Satze für nicht analytische Funktionen reeller Variabeln.

Methode der Aufsuchung erster Integrale.

16. Aus den besprochenen Methoden ergiebt sich die Existenz

---

56) Acta math. 13, 1890, p. 9; Méc. cél. 1, p. 48; *Poincaré* giebt den Satz als eine Erweiterung des Satzes von *Cauchy*.

57) Dieser Bereich kann eine Linie sein; in den Anwendungen ist er meist ein Stück der Axe der reellen Zahlen.

58) Par. C. R. 118, 1894, p. 760; Traité 3, p. 157.

59) Par. C. R. 118, 1894, p. 454; J. de math. (4) 10, 1894, p. 117.

der Integrale linearer homogener partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung (seien sie analytisch oder nicht); vgl. Nr. 6. Umgekehrt hat *Cauchy*[60]) durch seinen direkten Beweis der Existenz der Integrale solcher Gleichungen (II A 5 a, Nr. 1) eine neue Methode zur Lösung des Systems (2) gegeben.

Gewöhnliche singuläre Anfangsbedingungen.

17. Anfangswerte, für welche einige der f_i meromorph und unendlich sind. Bei der Untersuchung von Singularitäten der f_i (Nr. 1) beschränken wir uns auf solche, die auch bei algebraischen Funktionen vorkommen können. Sollen dann die f_i in der Umgebung der Anfangsstelle $(x_0, y_1^0, .., y_n^0)$ *eindeutig* sein, so müssen sie dort *meromorph*, d. h. von der Form P_i/Q sein, in der Q und die P_i dort holomorph sind und Q dort Null ist. Wenn mindestens eine der Grössen $P_i(x_0, y_1^0, .., y_n^0)$, etwa $P_1(x_0, y_1^0, .., y_n^0)$, nicht gleich Null ist, heisst die Singularität $(x_0, y_1^0, .., y_n^0)$ eine *gewöhnliche Singularität* des Systems (2). Ihre Untersuchung bietet keine Schwierigkeit; es genügt, y_1 zur unabhängigen Variabeln zu machen, um zu zeigen, dass die Anfangswerte $(x_0, y_1^0, .., y_n^0)$ eine Lösung $y_1(x)$, $y_2(x), .., y_n(x)$ definieren, die $x = x_0$ zum *algebraischen Verzweigungspunkt* hat; ausser den Zweigen dieser Lösung giebt es keine, die gegen $y_1^0, .., y_n^0$ konvergierte, wenn x sich auf einem bestimmten Wege dem x_0 nähert[61]). Nur der Fall ist auszunehmen, dass in der Lösung $x(y_1), y_2(y_1), .., y_n(y_1)$ die Funktion $x(y_1)$ sich identisch auf x_0 reduziert; dann giebt es *keine* den Anfangsbedingungen entsprechende Lösung des Systems (2).

18. Anfangswerthe, für welche einige der f_i algebraisch verzweigt sind. Wenn die f_i in der Umgebung von $(x_0, y_1^0, \cdot\cdot, y_n^0)$ *vieldeutig* sind, permutieren sich n. V. (17) in dieser Umgebung nur eine endliche Anzahl s ihrer Werte unter sich, und die symmetrischen Funktionen der s Zweige eines jeden f_i sind meromorphe Funktionen für $x = x_0, y_1 = y_1^0, \cdot\cdot, y_n = y_n^0$. Man kann dann (I B 1 c, 2) die f_i durch einen Parameter u ausdrücken, der mit den Variabeln $x, y_1, \cdot\cdot, y_n$ durch eine Gleichung der Form verknüpft ist:

$$(26)\quad A_s(x, y_1, \cdots y_n)\, u^s + A_{s-1}(x, y_1, \cdots y_n) u^{s-1} + \cdots + A_0(x, y_1, \cdots y_n) = 0,$$

---

60) Par. C. R. 35, 1842, p. 35, 44, 85; *Moigno* 2, p. 722.

61) *Briot* und *Bouquet*, J. éc. polyt. cah. 36, 1856, p. 46; Fonctions doublement périod., Paris 1857 (dtsch. v. *H. Fischer*, Halle 1862), Art. 247 (2e éd., 1875, p. 325); *H. Poincaré*, J. de math. (4) 2, 1886, p. 151; *Königsberger*, Lehrbuch p. 347.

in der die A für $x = x_0, y_1 = y_1^0, \cdots y_n = y_n^0$ holomorph sind. Die f_i sind dann von der Form:

$$f_i = \frac{P_i(x, y_1, \cdots, y_n, u)}{Q(x, y_1, \cdots, y_n)}, \tag{27}$$

in der die P_i rationale ganze Funktionen $(s-1)^{\text{ten}}$ Grades von u bedeuten, deren Koeffizienten ebenso wie Q für $x = x_0, y_1 = y_1^0, \cdots y_n = y_n^0$ holomorph sind. Betrachten wir $x, y_1, \ldots y_n$ als komplexe Koordinaten eines imaginären Punktes im Raume von $n+1$ Dimensionen, so sind die Verzweigungspunkte von u gegeben durch eine Relation

$$G(x, y_1, \cdots y_n) = 0, \tag{28}$$

in der G für $x = x_0, y_1 = y_1^0, \cdots y_n = y_n^0$ holomorph und Null ist. Diese Gleichung (28) stellt eine n-dimensionale Fläche dar, deren Doppelpunkte (Punkte, in welchen sämtliche ersten Ableitungen von G Null sind) eine Mannigfaltigkeit von höchstens $n-1$ Dimensionen bilden.

Sei $(x_0, y_1^0, \ldots y_n^0)$ *kein Doppelpunkt.* Dann lässt sich die Gleichung (28) nach einem der y_i, etwa y_1, [oder nach x] auflösen; die so erhaltene Funktion $y_1 = \psi(x, y_2, \ldots y_n)$ [oder $x = \chi(y_1, \ldots y_n)$] ist für die Anfangswerte holomorph, und die Transformation $y_1 - \psi = Y^s$ [oder $x - \chi = X^s$] reduziert (2) auf ein System (2′), dessen Differentialkoeffizienten für die neuen Anfangswerte meromorph sind. Wenn diese neuen Anfangswerte für (2′) regulär sind oder eine gewöhnliche Singularität bilden, so heisst auch $(x_0, y_1^0, \ldots y_n^0)$ eine *gewöhnliche Singularität* von (2). Die den Anfangswerten entsprechende Lösung von (2) hat dann x_0 zum gewöhnlichen Punkt oder zum algebraischen Verzweigungspunkt.

Es kann vorkommen, dass nach dieser Transformation eine Potenz von Y [oder X] im Zähler und Nenner der f_i auftritt. Man kann sie heben, muss aber dann zu den aus den Lösungen von (2′) entspringenden Lösungen von (2) noch diejenigen hinzunehmen, die die Gleichung $Y = 0$ [$X = 0$], d. h. (28) erfüllen. Diese Lösungen heissen *singuläre Integrale*[62]), weil alle ihre Punkte singuläre Punkte für die f_i sind. Unter Berücksichtigung von (28) erkennt man, dass sie einem Differentialsystem von höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung genügen[63]), das man aufstellen und wie das System S diskutieren kann.

62) Vgl. Fussn. 4 und Nr. 22.

63) Unter Umständen enthält dieses System weniger Gleichungen als unbekannte Funktionen. So wird z. B. das System:

Die gewöhnlichen Singularitäten des Differentialsystems führen also immer höchstens auf *algebraische* Singularitäten der Lösungen[64]). Die *aussergewöhnlichen* Singularitäten (Nr. 24 ff.) thun das nicht[65]); sie bilden aber höchstens eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen im Gebiet der $n+1$ Variabeln $(x, y_1 \ldots y_n)$.

Übrigens kann man alle Fälle, in denen die f_i *algebroïd* sind, auf den Fall zurückführen, dass sie meromorph sind, wenn man die Ordnung des Systems um eine Einheit erhöht[66]): man braucht nur u als Variable hinzuzunehmen und die Gleichung (28) einmal vollständig zu differentiieren. Wenn die f_i holomorph sind und der Punkt $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ein einfacher (konischer) Doppelpunkt von (28) ist, gelingt diese Reduktion ohne Erhöhung der Ordnung des Systems[67]).

Sind eine oder mehrere der $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ unendlich, so führe man $z_i = y_i^{-1}$, bezw. $\xi = x^{-1}$ als neue Variable ein. Unter Umständen empfiehlt sich statt dessen eine andere Transformation, z. B. eine projektive in den $n+1$ Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$.[68])

19. Algebraische Differentialsysteme. Jedes algebraische Differentialsystem (2) lässt sich durch algebraische Operationen auf die Normalform bringen:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{P_i(x, y_1, \ldots, y_n, u)}{\frac{\partial H(x, y_1, \ldots, y_n, u)}{\partial u}}, \tag{29}$$

in der u ein Parameter ist, der mit $x, y_1, \ldots, y_n$ durch die Gleichung r^{ten} Grades in u:

$$H(x, y_1, \ldots, y_n, u) = 0 \tag{30}$$

verbunden ist[69]). Gewöhnliche Singularitäten des Systems sind dann die Punkte der Fläche $\partial H/\partial u = 0$, aussergewöhnliche die singulären Punkte dieser Fläche.

$$\frac{dx}{y_2} = \frac{dy_1}{y_3} = \frac{dy_2}{y_2^\alpha} = \frac{dy_3}{y_3^\beta} \quad (\alpha,\ \beta \text{ rational und } > 1)$$

durch $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ und jede Funktion $y_1 = \varphi(x)$ erfüllt.

64) Für zweiwertige f_i findet sich diese Diskussion, in ganz anderer Form, bei *Picard*, Traité 3, p. 52; allgemein bei *Painlevé*, Leçons p. 49, 417. Vgl. *Königsberger*, Lehrbuch p. 416.

65) Z. B. $y' = \sqrt{2}\, y/x$, $y' = y/x^2$ für $x = 0$, $y = 0$.

66) *Königsberger*, Lehrbuch p. 416.

67) *Poincaré* (Nr. 28) für eine Gleichung 1. Ordnung.

68) *Painlevé*, Leçons p. 417.

69) *Jacobi* (vgl. Fussn. 1); *Weierstrass* bei *Königsberger*, Lehrbuch p. 11.

Sind die f_i rational:

$$f_i = \frac{P_i(x, y_1, \cdots, y_n)}{P_0(x, y_1, \cdots, y_n)}, \tag{31}$$

die P Polynome, so sind nur diejenigen Punkte aussergewöhnlich singulär, für die alle P gleichzeitig Null sind. Deren ist nur eine endliche Anzahl, wenn die Polynome P die allgemeinsten ihres Grades sind.

20. Anwendung auf Gleichungen 1. Ordnung. Betrachten wir in der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{32}$$

x und y als komplexe Koordinaten eines Punkts der (x, y)-Ebene, so giebt jede Lösung eine *Integralkurve.*

Sei nun zunächst $f(x, y)$ bei x_0, y_0 *meromorph und unendlich,* also $\varphi(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$ dort holomorph und Null. Ist dann $\varphi(x_0, y)$ *identisch Null,* so hat die Gleichung (32) *keine* den Anfangsbedingungen entsprechende Lösung; die Gerade $x = x_0$ ist die einzige Integralkurve, die durch (x_0, y_0) geht. Ist aber $\varphi(x_0, y_0)$ *nicht identisch Null,* so definieren die Anfangsbedingungen eine Lösung der Form:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}} + \cdots \qquad (\nu > 1, \quad a \neq 0); \tag{33}$$

die einzige Integralkurve, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht, hat ihn zum einfachen Punkt mit vertikaler Tangente[70]).

Sei ferner $f(x, y)$ *algebroïd* für $x = x_0$, $y = y_0$. Sei $(x, y = g(x))$ für beliebiges x ein Verzweigungspunkt von f, um den herum s Werte von f sich permutieren und der für $\lim x = x_0$ gegen (x_0, y_0) konvergiert. Dann ist, von *Ausnahmewerten* x_0 abgesehen, $g(x)$ holomorph[71]) für x_0; setzt man $y - g(x) = Y^s$, so erhält man für hinlänglich kleine Y eine Entwicklung der Form:

$$\frac{dY}{dx} = \alpha_i(x)\, Y^i + \alpha_{i+1}(x)\, Y^{i+1} + \cdots, \quad (i \gtrless 0), \tag{34}$$

in der $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots$ für x_0 holomorph sind. Dann sind vier Fälle zu unterscheiden[72]):

1) $i \leqq 0$; dann ist die den Anfangsbedingungen genügende Lösung

---

70) Vgl. *Briot* und *Bouquet* (Fussn. 47).

71) Wenn $g(x)$ nicht holomorph bei x_0, aber die inverse Funktion $x = h(y)$ holomorph bei y_0 ist, oder wenn $x = x_0$ für jedes y ein Verzweigungspunkt von f ist, lasse man x und y ihre Rollen wechseln. Sind $g(x)$ und $h(y)$ für x_0, y_0 beide irregulär, so ist (x_0, y_0) eine aussergewöhnliche Singularität.

72) Vgl. die historischen Angaben Nr. 22.

eine $(s-i)$-wertige ($s-i \geqq s$) Funktion, deren Zweige sich um x_0 herum permutieren:

$$y = g(x) + a(x-x_0)^{\frac{s}{s-i}} + \cdots. \tag{35}$$

Durch den Punkt (x_0, y_0) geht eine einzige Integralkurve, die ihn zur Spitze[73]) mit s Zweigen (für $i<0$ mit vertikaler Tangente) hat.

2) $0<i<s-1$; die Kurve $y=g(x)$ ist eine durch (x_0, y_0) gehende Integralkurve, die in dem allgemeinen Integral $y=\varphi(x, x_0, y_0)$ nicht enthalten ist; ausser diesem *singulären* Integral geht durch (x_0, y_0) noch eine Integralkurve, die in (x_0, y_0) die erste berührt und ihn zur Spitze mit $s-i$ Zweigen hat. Die singuläre Integralkurve $y=g(x)$ ist *zugleich Enveloppe und Ort der Spitzen* der Integralkurven.

3) $i=s-1$. Auch hier ist die Kurve $y=g(x)$ ein singuläres Integral, das im allgemeinen Integral nicht enthalten ist; durch den Punkt (x_0, y_0) geht ausserdem eine zweite Integralkurve, die die erste in ihm berührt und für die (x_0, y_0) ein gewöhnlicher Punkt ist. Die Kurve $y=g(x)$ ist *Enveloppe* der Integralkurven.

4) $i>s-1$. Durch (x_0, y_0) geht keine andere Integralkurve als die singuläre $y=g(x)$. Diese ist in dem allgemeinen Integral enthalten und eine Art mehrfacher Lösung von (32): durch einen zu ihr benachbarten Punkt (x_1, y_1) gehen s Integralkurven, die alle mit ihr zusammenfallen, wenn der Punkt (x_1, y_1) auf sie rückt. —

Ist $M(x, y)$ ein integrierender Faktor (Nr. 6) von $dy - f\,dx$, so macht das singuläre Integral $y=g(x)$ [sofern es existiert] M unendlich. Umgekehrt liefert die Gleichung $1/M=0$ Lösungen von (32), unter denen die singulären stets auftreten. Die *allen* Gleichungen $1/M=0$ gemeinsamen Lösungen sind notwendig singulär.

Die dieser Diskussion sich entziehenden Punkte (x_0, y_0) sind aussergewöhnliche Singularitäten; sie können in einem Gebiet, in dem $f(x, y)$ algebroïd ist, nur isolirt auftreten.

21. Algebraische Gleichungen 1. Ordnung. Ist y' eine rationale Funktion von x und y:

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{36}$$

P und Q Polynome, so sind die aussergewöhnlichen Singularitäten

73) Als Spitze wird im folgenden jeder vielfache Punkt der Kurve von der Art bezeichnet, dass sich (bei beliebiger Wahl der Axen) mindestens zwei durch ihn gehende Kurvenzweige $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ bei einem Umlauf um ihn permutieren.

die Schnittpunkte von $P=0$ und $Q=0$. Durch jeden andern Punkt geht eine und nur eine Integralkurve, und diese hat ihn zum einfachen Punkt. $Q=0$ ist der Ort der Punkte dieser Kurven mit vertikalen Tangenten. — Für unendlich grosse Werte von x oder y gilt analoges.

Sei ferner die Gleichung von der Form:

$$(37) \qquad F(y', y, x) = A_m y'^m + A_{m-1} y'^{m-1} + \cdots + A_0 = 0,$$

die A Polynome in x und y. Auch hier ist die Anzahl der ausserwesentlichen Singularitäten begrenzt. Von ihnen abgesehen entsprechen jedem Paar von (endlichen oder unendlichen) Anfangswerten (x_0, y_0) Lösungen $y(x)$ oder $x(y)$, und diese haben in (x_0, y_0) höchstens einen algebraischen singulären Punkt.

Durch einen Punkt (x_0, y_0) von allgemeiner Lage gehen m Integralkurven mit verschiedenen Tangenten. Sei aber $R(x, y) = 0$ die Resultante der beiden Gleichungen $F(y') = 0$, $\partial F/\partial y' = 0$, und $G(x, y)$ ein irreducibler Faktor von $R(x, y)$. Im allgemeinsten Fall sind längs der Kurve $G = 0$ r Wurzeln y' von (37) einander gleich, etwa $= Y'$, r_1 andere $= Y_1'$ u. s. w.; die r ersten zerfallen in ν Cyklen, jeder gebildet aus Zweigen, die sich um G herum unter einander permutieren. Für die s Zweige eines jeden Cyklus gilt die Diskussion[74]) von Nr. **20**; sind speciell die r zu Y' gehörenden Cyklen alle von der Ordnung 1 und genügt die Kurve $G = 0$ der Gleichung (37) nicht, so ist sie Ort von Punkten, in denen Integralkurven einander berühren.

22. Vergleichung mit der Theorie der Enveloppen. Historisches. Wenn die Gleichung (37) die allgemeinste ihres Grades ist, ist $R = 0$ Ort der Spitzen der Integralkurven. Zur Existenz eines singulären Integrals ist nothwendig, dass die Gleichungen:

$$(38) \qquad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

für jedes x verträglich sind. Sei $y = g(x)$, $y' = h(x)$ ihre gemeinsame Lösung; dann ist diese Bedingung auch hinreichend, wenn $\partial F/\partial y$ und $\partial F/\partial x$ für $y = g$, $y' = h$ nicht identisch Null sind[75]).

---

74) Sei z. B. $y' = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + y}}{\sqrt{y}}$; für $y = 0$ sind zwei Werte von y' unendlich, zwei Null; für die ersteren ist $y = 0$ Ort der Spitzen, für die letzteren singuläres Integral und Enveloppe.

75) Singuläre Lösungen der Form $x =$ Const. lassen wir bei Seite. Wenn solche existieren, erhält man sie durch Vertauschung von x mit y.

Der einfachste und allgemeinste Fall ist, dass längs $G = 0$ (oder $y = g(x)$) nur zwei Werte von y' zusammenfallen. Ist dann $\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ für $y = g(x)$, $y' = g'(x)$, so ist die Kurve ein Ort gewöhnlicher Spitzen. Ist $\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, aber $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ für $y = g$, $y' = g'$, so ist die Kurve singuläres Integral (im allgemeinen Integral nicht enthalten) und Enveloppe der Integralkurven; die Berührungspunkte sind gewöhnliche Punkte der letzteren. Ist $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ für $y = g$, $y' = g'$, so ist die Kurve $y = g(x)$ Ort der Punkte, in denen Integralkurven einander berühren, ausser wenn $G = 0$ der Differentialgleichung genügt; in letzterem Fall ist $y = g(x)$ eine doppeltzählende gewöhnliche Lösung.

Demnach haben die Integralkurven keine Enveloppe, wenn die Gleichung (37) die allgemeinste ihres Grades ist. Andererseits: das allgemeine Integral von (37) lässt sich auf die Form bringen:

$$y = \varphi(x, C), \tag{39}$$

unter φ eine — im allgemeinen unendlich vieldeutige — analytische Funktion verstanden. Wenn dann die Gleichung $\partial\varphi/\partial C = 0$ für einen Wert $C = B(x)$ erfüllt und die Funktion φ für willkürliche x und $C = B(x)$ holomorph oder algebroïd ist, so lehrt die allgemeine Theorie der Enveloppen, dass $y = \varphi(x, B(x))$ Enveloppe der Kurven (39) ist. Demnach würde für die allgemeine Gleichung (37) die Gleichung $\partial\varphi/\partial C = 0$ keine solche Lösung $C = B(x)$ zulassen.

Geht man aus von einer Kurvenschar:

$$H(x, y, C) = 0, \tag{40}$$

wo H das allgemeinste Polynom seines Grades in x, y, C ist, so ist die Differentialgleichung dieser Schar algebraisch in x, y, y', von einem gewissen Grade p, und hat ein singuläres Integral. Aber sie ist eben nicht die allgemeinste ihres Grades.

Übrigens kann das allgemeine Integral von (37) (für $m > 1$) algebraisch sein, ohne dass ein singuläres Integral, also ohne dass eine Enveloppe existiert; so z. B. für:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y^3 = (x - C)^2; \tag{41}$$

es kann selbst vorkommen, dass weder eine Enveloppe, noch ein Ort der Spitzen auftritt, sondern nur eine vielfache gewöhnliche Lösung — so für:

$$\frac{dy}{dx} = -2\sqrt{y^3}, \quad y = \left(\frac{C}{Cx + 1}\right)^2. - \tag{42}$$

Der Begriff des singulären Integrals war *Leibniz* (1694) und *Taylor* (1715) nicht entgangen; *Clairaut*[76]) und *Euler* stellen ihn in helles Licht, ebenso später *d'Alembert*[77]), *Laplace*[78]), *Condorcet*[79]); die erste allgemeine Behandlung der Frage hat *Lagrange*[80]) gegeben. Er gelangte von der Theorie der Enveloppen aus zu der Ansicht, dass im allgemeinen ein singuläres Integral vorhanden sei. Dagegen bemerkte *Cournot*[81]), dass im allgemeinen ein Ort der Spitzen und keine Enveloppe der Integralkurven auftritt; dasselbe ergab sich implicite aus der Darstellung von *Briot* und *Bouquet*[82]). Der scheinbare Widerspruch ist von *A. Cayley*[83]) und *G. Darboux*[84]) gehoben worden; letzterer hat die verschiedenen Möglichkeiten (Spitze, Enveloppe, Berührung der Integralkurven) geometrisch erläutert. Die vollständige analytische Behandlung ist für den Fall einer Doppelwurzel y' von *E. Picard*[85]) gegeben, für den allgemeinen Fall, unter der Voraus-

76) Die sogenannte *Clairaut*'sche Gleichung (Par. Hist. 1734, p. 209; vgl. II A 4 b, Nr. 9) ist der einfachste Typus einer Gleichung 1. Ordnung mit Enveloppe. Sie tritt zuerst bei einem von *Euler* (Berl. Hist. 1756) gestellten Problem auf (ebene Kurven, für die das Produkt der Abstände der Tangenten von zwei festen Punkten konstant ist). *Euler* hatte auch bemerkt (Inst. calc. int. 1, 1768, p. 351), dass man das singuläre Integral erhält, indem man den reciproken Wert des integrierenden Faktors $= 0$ setzt.

77) Par. Hist. 1769, p. 84.

78) Par. Hist. 1775, p. 620 (oeuvr. 8, p. 327).

79) Calc. int. p. 67 und Tor. Mem. 4, p. 7.

80) Berl. Mém. 1774; oeuvr. 4, p. 1. An Lagrange schliessen sich u. a. *S. D. Poisson*, J. éc. polyt. cah. 13, 1806, p. 60 und *E. Catalan*, ib. cah. 31, 1847 p. 271 an.

81) Théorie des fonctions, 2, Paris 1841, p. 343; vgl. *J. Boussinesq*, analyse infinitésimale 2^2, Paris 1890, p. 233. Die von Geographen und Geodäten vielfach besprochene Streitfrage der lignes de thalweg hängt damit zusammen.

82) J. éc. polyt. cah. 36, p. 193 (vgl. Nr. 28). Die Diskussion von *Briot* und *Bouquet* gilt nur für den Fall, dass, für (x_0, y_0, y_0'), $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ist, aber nicht $\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y}$; die andern Fälle werden auf den (komplizierteren) zurückgeführt, dass y' die Form $0/0$ hat, unter der *Voraussetzung*, dass die gesuchten Integrale algebroïd sind.

83) Philos. Mag. 32, 1866, p. 379; Mess. 2, 1873, p. 17; 6, 1877, p. 29.

84) Par. C. R. 70, 1870, p. 1332; Darb. Bull. 1873, p. 58; Par. sav. [étr.] 27, 1883, nº. 2. Vgl. auch eine ältere Abhandlung von *Serret*, J. de math. (1), 18, 1855, p. 1. — Der anscheinende Widerspruch zwischen der Theorie der Enveloppen und der der Differentialgleichungen hat zahlreiche Diskussionen veranlasst; vgl. z. B. *E. Catalan*, Par. C. R. 1, 1870, p. 50; *G. Darboux*, ib. p. 267; *M. Hamburger*, J. f. Math. 112, 1893, p. 205.

85) Cours lithogr., Paris 1886/87, p. 330; Traité 3, p. 44. Nach *Moigno* 2, p. 445 hatte *Cauchy* schon bemerkt, dass die Existenz eines singulären Integrals

setzung, dass x in der Gleichung nicht auftritt, von *Briot* und *Bouquet*[86]) in grossen Zügen skizziert, von *L. Fuchs*[87]) für beliebige Gleichungen durchgeführt worden. Das Hauptergebnis dieser Diskussion ist, dass die aussergewöhnlichen Singularitäten einer Gleichung (32), in denen allein nicht-algebraische Singularitäten der Integrale auftreten können, *isoliert* sind. Sie ist im Detail von *M. Hamburger*[88]) und *P. Painlevé*[89]) dargestellt worden[90]).

23. Ausdehnung auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Die vorhergehende Diskussion überträgt sich von selbst auf Gleichungen beliebiger Ordnung. Wenn das System (2) von allgemeinster Art, ist die Fläche $G = 0$ (Gleichung (28)) Ort der Spitzen der Integralkurven im $(n+1)$-dimensionalen Raume. Wenn die Gleichung $G = 0$ mit dem System (2) verträglich ist, existieren *singuläre Integrale oder Lösungen;* die Anzahl der in ihnen enthaltenen willkürlichen Konstanten kann $0, 1, 2, \ldots n-1$ sein[91]). *Picard*[92]) zeigt, dass eine solche singuläre Integralkurve im allgemeinen Enveloppe der „partikulären" Integralkurven und selbst nicht im allgemeinen Integral enthalten ist; in Ausnahmefällen sind diese Lösungen im allgemeinen Integral enthalten und sind dann vielfache gewöhnliche Lösungen.

E. Goursat[93]) verknüpft die Theorie der singulären Lösungen folgendermassen mit der Theorie der Enveloppen: Sei z. B. für $n = 3$ eine (algebraische) Kongruenz von Raumkurven gegeben. Diese Kurven lassen sich auf unendlich viele Arten in Scharen mit je einem Para-

die Verträglichkeit der drei Gleichungen (38) bedingt. Ausserdem ist $y = g(x)$ dann und nur dann wirklich singulär, d. h. nicht im allgemeinen Integral enthalten, wenn $y' - g'$ in Bezug auf $y - g$ unendlich klein von niedrigerer als der 1. Ordnung ist.

86) J. éc. polyt. cah. 36, 1856, p. 208.

87) Berl. Ber. 1884, p. 702.

88) J. f. Math. 112, 1893, p. 205.

89) Leçons p. 49. Vgl. auch die Lehrbücher von *Forsyth* und *Königsberger*.

90) Specielle Gleichungen 1. Ordnung behandeln *M. Schmidt,* Diss. Giessen 1885; *Fine,* Amer. J. of math. 12, 1890, p. 295. Vgl. auch *J. Glaisher,* Mess. (2) 12, 1882, p. 1; *W. Kapteyn,* Darb. Bull. (2) 12, 1888, p. 135; *W. Johnson,* Mess. (2) 16, 1886, p. 186 und Ann. of math. 3, 1887, p. 33; *Miss Maddison,* Quart. J. 28, 1896, p. 311. Über Integrale, die zugleich singulär und partikulär sind, vgl. man *M. Pétrovitch,* Par. thèse 1894.

91) Das Differentialgleichungssystem (von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung), das die singulären Lösungen definiert, kann weniger Gleichungen als Funktionen enthalten; vgl. Fussn. 63.

92) Traité 3, p. 56.

93) Amer. J. of math. 11, 1889, p. 329

meter anordnen, deren jede eine Enveloppe hat. Diese Enveloppen Γ hängen im allgemeinen von einem Parameter ab und erzeugen eine oder mehrere Flächen $G(x, y, z) = 0$. Das die Kongruenz definierende Differentialsystem (2), (das dann keineswegs das allgemeinste seines Grades ist), hat die Kurven Γ zu singulären Integralen[94]).

Aussergewöhnliche Anfangsbedingungen bei Gleichungen 1. Ordnung.

24. Untersuchungen von Briot und Bouquet über die Gleichung:

(43) $$xy' = ax + by + \cdots \equiv \varphi(x, y), \quad b \neq 0.$$

Wenn $f(x, y)$ (Nr. **20**) *meromorph und von der Form* 0/0 ist, so genügen schon die ältesten Beispiele, wie $xy' = ay$, zu zeigen, dass die verschiedensten Umstände auftreten können: es kann mehrere, selbst unendlich viele, den Anfangsbedingungen entsprechende Lösungen geben, und der Anfangspunkt kann für diese Lösungen gewöhnlicher Punkt, algebraischer oder transcendenter singulärer Punkt sein. Die ersten allgemeinen Untersuchungen hierüber verdankt man *Briot* und *Bouquet*[95]); sie finden für Gleichungen der Form (43) in der Umgebung von (0, 0):

1) Ist b keine positive ganze Zahl, so giebt es eine und nur eine holomorphe Lösung $y(x)$, die mit x verschwindet.

2) Ist b eine positive ganze Zahl, so giebt es im allgemeinen keine solche Lösung; wenn es eine giebt, giebt es unendlich viele, die von einer willkürlichen Konstanten abhängen. Für $b = 1$ ist dazu erforderlich und hinreichend, dass $a = 0$ ist; für $b > 1$ reduziert die Transformation $y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + x^{p-1} z$ die Gleichung auf den Typus $x \frac{dz}{dx} = \alpha x + z + \cdots$; die Bedingung ist dann $\alpha = 0$.

Der Beweis von *Briot* und *Bouquet* beruht auf dem Gebrauch der fonctions majorantes (Nr. **11**): die Gleichung erlaubt die *Maclaurin*'sche Reihenentwicklung der Lösung formell aufzustellen; Vergleichung mit der Entwicklung der durch $y_1 = \varphi(x, y_1)$ definierten impliciten Funktion y_1 giebt eine untere Grenze für den Konvergenzradius.

Giebt es ausser den holomorphen Lösungen von (43) noch andere, die gegen Null konvergieren, wenn x auf einem Wege C der Null sich nähert? Für Wege von endlicher Länge, die sich nicht unendlich oft um Null winden, finden *Briot* und *Bouquet:*

---

94) Vgl. auch *Serret* (J. de math. (1) 18, 1855, p. 1); *A. Mayer* (Math. Ann. 22, 1883, p. 368); *Fine,* Fussnote 90; *Dixon,* Lond. Trans. (1875, A), p. 523; *M. Hamburger,* Berl. Ber. 1899.

95) J. éc. polyt. cah. 36, p. 161; vgl. *Picard,* traité 3, p. 23; *Königsberger,* Lehrbuch p. 352.

Ist $\Re(b) \leqq 0$, so giebt es keine solchen Lösungen. Ist $\Re(b) > 0$, so giebt es unendlich viele Lösungen $y(x)$, die mit x gegen Null konvergieren. Für sie ist der Punkt $x = 0$ ein *transcendenter singulärer* Punkt, ausser in zwei Fällen: wenn b reell, positiv und rational (aber nicht ganz) ist, ist $x = 0$ *algebraischer* Verzweigungspunkt; wenn b eine positive ganze Zahl ist und $a = 0$, sind diese Lösungen für $x = 0$ holomorph.

Für $b = 0$ giebt es eine holomorphe mit x verschwindende Lösung. Was die für $x = 0$ nicht holomorphen Lösungen betrifft, die gegen 0 konvergieren, wenn x auf einem Wege von endlicher Länge und limitiertem Argument der Null sich nähert, so behaupten *Briot* und *Bouquet*, es gebe keine solchen (von Ausnahmefällen abgesehen). Nach den Untersuchungen von *Bendixson* und *Horn* für das reelle Gebiet (Nr. **30**) ist diese Behauptung ungenau.

Briot und *Bouquet* betrachten auch den Typus:

$$x^m \frac{dy}{dx} = ax + by + \cdots \qquad (b \neq 0)); \tag{44}$$

sie zeigen, dass er keine holomorphen mit x verschwindenden Lösungen zulässt, ausser in Ausnahmefällen, in denen transcendente Bedingungen erfüllt sind.

25. Allgemeiner Fall, in dem y meromorph und von der Form $0/0$ ist. Für den allgemeinen Fall:

$$y' = \frac{a_{ij} x^i y^j + \cdots}{b_{kl} x^k y^l + \cdots} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{45}$$

beschränken sich *Briot* und *Bouquet* auf die Bestimmung derjenigen Lösungen $y(x)$, die mit x von angebbarer Ordnung unendlich klein werden. Sei $y(x) = x^\mu [c + \varepsilon(x)]$, $\lim\limits_{x=0} \varepsilon = 0$. Die möglichen Werthe von μ ergeben sich durch eine dem *Newton*'schen Polygon (II B 2) analoge Regel; nur können hier zwei Ecken des Polygons zusammenfallen und μ infolgedessen irrational oder imaginär sein. Abgesehen von diesem Fall, der *Briot* und *Bouquet* entgangen ist[96]), sind die möglichen Werte von μ rational und in endlicher Anzahl vorhanden. Sei $\mu = p/q$; die Transformation:

$$x = \xi^q, \quad y = \xi^p (c + z) \tag{46}$$

reduziert *im allgemeinen* die Gleichung auf die Form (43). Aber in vielen Fällen ist auch die neue Gleichung noch von der Form (45).

---

96) Vgl. *L. Autonne*, Lyon. Ann. 3^1, 1891; J. éc. polyt. (2), cah. 2, 1897, p. 51; cah. 3, p. 1; *J. Horn*, J. f. Math. 113, 1894, p. 50.

Dass man in jedem Fall nach einer endlichen Anzahl von Schritten die verschiedenen *möglichen* algebroïden Entwicklungen von $y(x)$ von einander trennen kann, hat erst *L. Autonne*[96]) gezeigt: es giebt eine ganze Zahl ν von der Art, dass, wenn man $x = X^\nu$ setzt, alle Entwicklungen nach ganzen steigenden Potenzen von X fortschreiten. Einige dieser Entwicklungen können eine willkürliche Konstante enthalten.

Bemerkenswert ist der Fall, dass man mit den Anfangswerten $x = 0$, $y = 0$ eine der Gleichung (45) *formell* genügende *Maclaurin*'sche Reihe bilden kann, die aber *divergiert;* es gilt das z. B. für Gleichungen der Form:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by + \cdots. \tag{47}$$

E. Borel[97]) zeigt auf Grund der Theorie der „summierbaren Reihen", dass (wenigstens in gewissen Fällen) eine solche Entwicklung in einem gewissen Winkelraum E, dessen Scheitel im Ursprung liegt, eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, für die der Ursprung transcendenter singulärer Punkt ist und die im Ursprung Ableitungen beliebig hoher Ordnung hat, wenn man die Veränderlichkeit von x auf den Winkelraum E beschränkt[98]). Diese Ableitungen haben dieselben Werte, wie die aus (47) durch successive Differentiationen erhaltenen.

Die genannten Abhandlungen sind die einzigen, die eine *strenge* Untersuchung der Differentialgleichung (45) im komplexen Gebiet für die Anfangswerte ($x = 0$, $y = 0$) geben[99]). Doch ergeben sich aus den Untersuchungen von *Horn* und *Bendixson* über das Verhalten im Reellen (Nr. 28) einige evidente Folgerungen auch für das komplexe Gebiet.

26. Untersuchungen von Picard. Die Methode von *Briot* und *Bouquet* giebt kein Mittel zur Reihenentwicklung der nicht holomorphen Integrale von (43), die mit x verschwinden; erst *E. Picard*[100]) und *H. Poincaré*[101]) haben durch zwei verschiedene Methoden, die

---

97) Ann. éc. norm. (3), 16, 1899, p. 95.

98) Vgl. *J. Horn* (J. f. Math. 120, 1898, p. 1), der mit einer andern Methode den singulären Punkt $x = 0$ der linearen Differentialgleichung:

$$x^{h+1} y' = A(x) y + B(x) \qquad (h > 0,\ A,\ B \text{ holomorph für } x = 0)$$

untersucht.

99) *C. Björling* (Arch. Math. (2) 4, 1886, p. 358) hat eine allgemeine Untersuchung der Gleichung (45) versucht

100) Par. C. R. 87, 1878, p. 430, 743; Bull. soc. math. 12, 1884, p. 48.

101) J. éc. polyt., cah. 45, 1878, p. 13; Par. thèse 1879; J. de math. (3) 7, 8; (4) 1.

beide von „fonctions majorantes“ (Nr. 11) Gebrauch machen, den Satz bewiesen:

Wenn in (43) b weder eine positive ganze [102]), noch eine negative reelle Zahl, noch Null ist, lassen sich die mit x verschwindenden Lösungen nach steigenden Potenzen von x und $u = x^b$ in Reihen entwickeln, die für hinlänglich kleine $|x|$ und $|x^b|$ konvergieren.

Picard's Methode beruht auf der Einführung einer Hilfsfunction $\varphi(x, u)$ von zwei Veränderlichen x, u, die einer partiellen Differentialgleichung genügt und für $u = x^b$ in die gesuchte Lösung von (43) übergeht.

27. Methode von Poincaré; Ergänzungen. *Poincaré*'s Methode (vgl. auch Nr. 32) umfasst den allgemeineren Fall, dass in der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{ax + by + \cdots}{\alpha x + \beta y + \cdots} \tag{48}$$

die beiden Kurven $P = 0$, $Q = 0$ einen *einfach* zählenden Punkt gemein haben. Dann sind die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{49}$$

beide von Null verschieden. Ist dann $\lambda = \lambda_2 : \lambda_1$ *weder eine positive ganze Zahl, noch der reciproke Wert einer solchen, noch eine negative reelle Zahl*, so gehen durch (0, 0) zwei Integralkurven, die diesen Punkt zum gewöhnlichen Punkt haben und sich in ihm nicht berühren. Seien $gx + hy + \cdots = 0$, $\gamma x + \varkappa y + \cdots = 0$ ihre Gleichungen, so lässt sich das allgemeine Integral von (48) auf die Form bringen:

$$\text{Const.} = \frac{(gx + hy + \cdots)}{[\gamma x + \varkappa y + \cdots]^\lambda}(1 + lx + my + \cdots) \equiv \frac{X(x,y)}{[Y(x,y)]^\lambda},$$

sodass X und Y für (0, 0) holomorph sind. Setzt man $Y = t$, $X = ct^\lambda$, so sieht man, dass sich x und y für hinlänglich kleine $|t|$ und $|ct^\lambda|$ nach Potenzen von t und ct^λ entwickeln lassen; c bedeutet eine willkürliche Konstante. Lassen wir x in seiner Ebene in bestimmter Richtung gegen Null konvergieren: ist $\Re(\lambda) > 0$, so konvergieren alle hinlänglich kleinen Anfangswerten (x_0, y_0) entsprechenden Integrale gegen Null; ist aber $\Re(\lambda) \leq 0$, so konvergiert keine Lösung $y(x)$ [oder $x(y)$] gegen Null, ausser den beiden holomorphen; aber man kann x auf Wegen, die im Nullpunkt keine Tangente haben, so gegen Null konvergieren lassen, dass unendlich viele Lösungen $y(x)$ gegen Null konvergieren [103]).

102) Für den Fall eines pos. gz. b vgl. man Nr. 27.

103) Hat die Gleichung die Form (43), so ist $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = b$, $\lambda = b$, $Y = x$, $x = t$; man erhält so wieder die Sätze von Nr. 24.

Ist λ oder $1/\lambda$ eine positive ganze Zahl, so geht durch $(0, 0)$ eine in diesem Punkt reguläre Integralkurve; und zwar nur eine, wenn nicht eine algebraische Bedingung erfüllt ist. Im letzteren Falle gehen durch ihn unendlich viele, die von einer willkürlichen Konstanten abhängen. Das allgemeine Integral lässt sich auf die Form bringen:

$$\frac{S(x, y)}{X(x, y)} + h \log X(x, y) = \text{Const.}, \tag{51}$$

in der h eine rationale Funktion der ersten Koeffizienten von P und Q bedeutet, S, X holomorphe Funktionen, die für $(0, 0)$ Null werden; die Kurve $X = 0$ ist die durch den Ursprung gehende singuläre Integralkurve. Setzt man $X = t$, so kann man x und y nach steigenden Potenzen von t und $t \log t$ entwickeln. Für $h = 0$ haben alle Integrale den Nullpunkt zum gewöhnlichen Punkt. Speziell für $h = 0$, $\lambda = 1$ haben sie in ihm getrennte Tangenten; er heisst dann ein *dikritischer* Punkt[104]).

Für $\lambda = 1$ sind diese Sätze von *H. Poincaré*[105]), *I. Bendixson*[106]), *E. Picard*[107]), für $\lambda = p$ oder $= p^{-1}$ von *J. Horn*[108]) und *E. Lindelöf*[109]) abgeleitet worden.

Ist λ *reell negativ*, so gehen immer noch zwei (und nur zwei) reguläre Integralkurven durch den Ursprung; aber es ist im allgemeinen nicht mehr möglich, das allgemeine Integral in der Form $XY^{-\lambda}$ darzustellen. *I. Bendixson*[110]) bringt in diesem Fall die Gleichung (48) auf eine Form, in der $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $a = 0$, $b = \lambda$ ist; indem er dann $xy^{-\lambda} = \varrho^{1-\lambda}$, $\log (y : x) = u$ setzt, erhält er für das allgemeine Integral eine Entwicklung:

$$\varrho + \varrho^2 A_2(u) + \varrho^3 A_3(u) + \cdots + \varrho^i A_i(u) + \cdots = \text{Const.}; \tag{52}$$

die A_i sind für $u = 0$ holomorph und die Reihe konvergiert für $|\varrho| < \delta$, $|u| < G$; G kann willkürlich gewählt werden, δ hängt von G ab und konvergiert mit G^{-1} gegen Null. *Dulac*[111]) bringt die Gleichung (48) auf die Form:

$$x\,dy + y\,dx[-\lambda + xy(1 + \cdots)] = 0 \tag{53}$$

und entwickelt dann das allgemeine Integral so:

$$yx^{\lambda}[1 + \varphi_1(x)y + \varphi_2(x)y^2 + \cdots] = \text{Const.}; \tag{54}$$

die φ sind Polynome in x und x^{λ}, wenn λ irrational, in x und $\log x$,

---

104) *L. Autonne*, a. a. O. (Fussn. 96).

105) Pal. Rend. 5, 1891, p. 161. — 106) Stockh. Öfv. 51, 1894, p. 141. — 107) Traité 3, p. 30.

108) J. f. Math. 116, 1896, p. 265. — 109) Acta Fenn. 22, 1897.

110) Stockh. Öfv. 13^2, 1895.

111) Par. C. R. 129, 1899, p. 276.

wenn λ rational ist. Die Reihe (54) konvergiert für $|y| < \delta$, $|\theta\varrho| < G$ (wenn $x = \varrho e^{i\theta}$); $\lim_{G=\infty} \delta(G) = 0$.

Den Fall $\lambda = -1$ untersucht *Poincaré*[112]), den allgemeineren eines *negativen rationalen* λ *Bendixson*[110]) und *Dulac*[111]). In diesen Fällen müssen unendlich viele Bedingungen erfüllt sein, wenn das Integral auf die Form $XY^{-\lambda} = \text{Const.}$ soll gebracht werden können[113]).

Mag die negative Zahl λ rational sein oder nicht, so giebt es (ausser den beiden regulären Lösungen) keine Lösung $y(x)$ [oder $x(y)$], die mit $x[y]$ so verschwindet, dass $\lim dy/dx$ existiert, oder die verschwindet, wenn x auf einem Wege C der Null zustrebt, der im Nullpunkt eine bestimmte Tangente hat. Aber giebt es für andere Wege C', z. B. für eine den Nullpunkt umwindende Spirale, andere Lösungen, die mit x verschwinden? Die meisten Autoren waren geneigt, die Frage zu verneinen; *Dulac*[114]) zeigt jedoch, dass es für negativ rationale λ unendlich viele Lösungen giebt, die auf einem passenden Wege nach Null konvergieren; ausgenommen den ganz speciellen Fall, dass das Integral auf die Form $XY^{-\lambda} = \text{const.}$ gebracht werden kann.

Dulac[111]) untersucht auch *den Fall* $\lambda = 0$. In diesem geht durch den Ursprung *eine* Integralkurve (und im allgemeinen *nur* eine); unendlich viele Integrale verschwinden mit x, wenn x auf einem passenden Wege der Null zustrebt. In besonderen Fällen geht durch $(0, 0)$ eine zweite Integralkurve; die Gleichung lässt sich in diesen Fällen auf die Form (43) bringen, im allgemeinen auf die Form:

$$(x + \cdots)\,dy + y^m\,dx = 0. \tag{55}$$

28. Fall eines algebroïden f. Diejenigen aussergewöhnlichen Singularitäten, für welche f algebroïd (und nicht meromorph) ist, sind noch sehr wenig untersucht. Die Methode von *Briot* und *Bouquet* (Nr. **24**, **25**) führt im allgemeinen die Aufsuchung der Lösungen, die

---

112) J. de math. (4) **1**, 1885, p. 170.

113) Sind P, Q Polynome, so zerfallen diese Bedingungen in unendlich viele Systeme, deren jedes nur eine endliche Anzahl Bedingungen enthält; dass eines dieser Teilsysteme erfüllt sei, ist notwendig und ausreichend, damit das Integral die verlangte Form hat. Aber man kennt kein Mittel, diese Teilsysteme zu bilden.

114) Fussn. 111. — Für $\lambda = -1$ waren solche Lösungen im reellen Gebiet von *Poincaré* (Nr. **29**) erhalten worden; nämlich für Gleichungen:

$$y' = -\frac{x + \cdots}{y + \cdots},$$

für die der Ursprung ein „foyer“ ist.

im Anfangspunkt eine bestimmte Ableitung haben, auf die Untersuchung einer Gleichung der Form (43) zurück; doch treten zahlreiche Ausnahmefälle auf. In allen Fällen erlaubt sie alle für $x = x_0$ algebroïden Lösungen zu bestimmen, wie kompliziert auch die algebraische Singularität von $f(x, y)$ bei $(x_0 y_0)$ sein mag. Eine Lücke im Beweise hat erst *L. Autonne*[96]) ausgefüllt.

Zur Untersuchung der Lösungen, die mit x Null werden, aber $x = 0$ zum transcendenten Punkt haben, hat nur in einem Fall *H. Poincaré*[115]) ein Mittel angegeben: Sei $dy/dx = H(x, y, z)$, mit $F(x, y, z) = 0$; H und F holomorph für $(0, 0, 0)$ und dieser Punkt ein Doppelpunkt der Fläche $F = 0$. Die Transformation:

$$\xi = \frac{x}{z}(1 - z), \quad \eta = \frac{y}{z}(1 - z), \quad \zeta = 1 - z$$

führt die Frage auf die Untersuchung von $d\eta/d\xi = \varphi(\xi, \eta)$ zurück, wo φ für $\xi = 0$, $\eta = 0$ meromorph ist.

29. Anwendung auf das reelle Gebiet. Sind in der Gleichung (48) die Koeffizienten von P, Q alle reell und fragt man nur nach ihren reellen Integralkurven — *Poincaré* nennt sie *Charakteristiken* — so sind zwei allgemeine Fälle zu unterscheiden:

1) λ_1 *und* λ_2 *reell.* Ist $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 0$, so gehen durch den Punkt $(0, 0)$ *unendlich viele* Charakteristiken; er heisst dann Knoteupunkt (*noeud*) der Differentialgleichung. Ist $\lambda < 0$, so gehen durch $(0, 0)$ *nur*[116]) *zwei* Charakteristiken; er heisst dann Sattelpunkt (*col*).

2) λ_1 *und* λ_2 *konjugiert imaginär. Keine* Charakteristik geht durch den Ursprung, aber die Charakteristiken umwinden ihn und er ist für sie asymptotischer Punkt; er heisst Brennpunkt (*foyer*). Ausgenommen ist nur der Fall, dass $\lambda = -1$ ist und das allgemeine Integral sich auf die Form $XY = \text{Const.}$ bringen lässt (was unendlich viele Bedingungen erfordert)[117]); die Charakteristiken bilden dann geschlossene Kurven, die den Nullpunkt umgeben, ohne durch ihn hindurchzugehen. Er heisst dann Mittelpunkt (*centre*).

30. Untersuchungen von Bendixson und Horn. Das Verhalten der reellen Integrale von Gleichungen der Form (44) in der Umgebung

---

115) J. de math. (4) 1, 1875, p. 199.

116) Diesen (von Poincaré als richtig angenommenen) Satz hat zuerst *Picard* bewiesen, traité 3, p. 201; die andern Resultate verdankt man *Poincaré*, J. de math. (3) 7, 1881; 8, 1882; (4) 1, 1885. Vgl. *Picard*, traité 3, p. 198 ff.

117) Vgl. Fussn. 113. Die Funktionen X, Y haben hier konjugiert komplexe Koeffizienten.

des Ursprungs ist von *I. Bendixson*[118]) und *J. Horn*[119]) vollständig festgestellt worden. Sie bestimmen unter Anwendung der (verallgemeinerten) Methode von *Picard* (Nr. 9) alle Charakteristiken, die durch den Ursprung gehen. Deren Zahl ist unendlich, ausser wenn m ungerade und $b<0$ ist; in diesem Fall geht durch den Ursprung, ausser der Achse $x=0$, nur eine Charakteristik rechts von der Achse und eine links von ihr. Wenn m ungerade und $b>0$ ist, bedecken die Charakteristiken eine gewisse Umgebung des Ursprungs vollständig; wenn m gerade ist, liegen sie alle bis auf eine auf derselben Seite der y-Achse. Für alle diese Charakteristiken $y=\varphi(x)$ hat man Reihenentwicklungen; *Horn* hat auch eine asymptotische Darstellung mit Hilfe halbkonvergenter Reihen (I A 3, **38**) gegeben, die der Gleichung (44) formell genügen.

Für b *gleich Null* treten ganz andere Verhältnisse auf. *Bendixson* und *Horn* bestimmen für $m=1$ (durch ziemlich komplizierte Entwicklungen) alle Charakteristiken der Gleichung:

$$x\frac{dy}{dx}=x[a+\cdots]+by^{q+1}[1+\cdots],\qquad (b\neq 0), \tag{56}$$

die durch den Ursprung gehen. Ihre Zahl ist unendlich, ausser wenn q ungerade, $b<0$ ist (in diesem Fall gehen durch den Ursprung nur die beiden regulären Charakteristiken). Ihre Verteilung hängt von der Parität von q und dem Vorzeichen von b ab.

Ist endlich $b=0$, m beliebig, also die Gleichung:

$$x^m\frac{dy}{dx}=x[a+\cdots]+by^{q+1}[1+\cdots]\equiv f(x,y),\qquad (b\neq 0), \tag{57}$$

so kennt man keine Darstellung der vom Ursprung ausgehenden Charakteristiken, aber ihre *qualitative* Untersuchung ist von *Bendixson*[120]) vollständig durchgeführt. Es giebt (ausser wenn q gerade, m ungerade und $b<0$ ist) unendlich viele solche Charakteristiken; ihre Verteilung hängt von der Parität von m und q und dem Vorzeichen von b ab und entspricht der der Charakteristiken von $x^m\frac{dy}{dx}=by^{q+1}$.

Bendixson's qualitative Methode verlangt nicht, dass $f(x,y)$ für $(0,0)$ holomorph ist, sondern nur, dass es die *Lipschitz*'sche Bedingung (Nr. **4**) erfüllt.

Für den ganz allgemeinen Fall der Gleichung (45) zeigt *Bendixson*[121]), dass die durch den Ursprung gehenden Charakteristiken

118) Stockh. Öfv. vom 9./2., 9./3., 13./4. 1898.

119) J. f. Math. 118 und 119, 1898; Math. Ann. 51, 1898, p. 346, 360.

120) Stockh. Öfv. 13./4. 1898. Auch Horn wendet gelegentlich qualitative Überlegungen an.

121) Stockh. Öfv. 9./11. 1898.

entweder *alle* Spiralen sind, oder *alle* im Ursprung eine Tangente haben. Für die Typen (44), (56), (57) tritt nur der zweite Fall ein. Mit Hilfe einer *endlichen* Anzahl von einfachen Transformationen [analog zu (46)] bestimmt er diese Charakteristiken oder führt ihre Untersuchung auf die Typen (44), (56), (57) zurück. Die qualitative Untersuchung dieses allgemeinsten Typus ist damit vollständig erledigt.

31. Picard's Untersuchung der Gleichungen 2. Grades in y'. *E. Picard*[122]) diskutiert die reellen Charakteristiken einer Gleichung der Form:

$$(58)\quad (ax+by+\cdots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(a_1x+b_1y+\cdots)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2y+\cdots)=0,$$

die durch den Ursprung gehen. Sie haben notwendig eine bestimmte Tangente im Ursprung, und die Transformation $y=tx$ führt ihre Untersuchung auf die der mit x verschwindenden Lösungen einer Gleichung der Form (43) zurück. Ausgenommen ist nur der Fall, dass die Koeffizienten a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 gewissen Gleichungen genügen. Je nach Umständen berühren die Charakteristiken im Ursprung eine bestimmte Richtung oder drei verschiedene.

Aussergewöhnliche Anfangsbedingungen bei beliebigen Differentialsystemen.

32. Allgemeiner Satz von Poincaré. Sei ein Differentialsystem beliebiger Ordnung vorgelegt, dessen Differentialkoeffizienten (Nr. 1) für die gegebenen Anfangswerte die Form 0/0 haben. Seien im Interesse der Symmetrie die Ordnung des Systems mit $n-1$, die Variabeln (komplexe Koordinaten eines Punktes im Raum von n Dimensionen) mit $x_1, x_2, \cdots x_n$ bezeichnet; in der Umgebung der Anfangswerte $(0, 0, \cdots 0)$ habe das System die Form:

$$(59)\quad \frac{dx_1}{a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+\cdots}=\frac{dx_2}{a_{21}x_1+\cdots}=\cdots=\frac{dx_n}{a_{n1}x_1+\cdots}.$$

Bezeichnen $P_1, P_2, \ldots P_n$ die Nenner dieser Brüche, so ist der Ursprung im einfachsten und allgemeinen Fall ein *einfacher* Schnittpunkt der Flächen $P_1=0$, $P_2=0, \cdots, P_n=0$. Dann sind die Wurzeln λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der Gleichung:

122) Traité 3, p. 217; Math. Ann. 46, 1895, p. 521. — Picard wendet seine Diskussion an auf das schon von *A. Cayley* (Philos. Mag. 26, 1863, p. 373, 441; coll. papers 5, p. 115) und *G. Darboux* (Par. C. R. 97, 1883, p. 1133; Ann. éc. norm. (3) 6, 1880, p. 385; Théorie des surfaces 4, Note 7) behandelte Problem der Krümmungslinien, die durch einen Nabelpunkt gehen; je nach Umständen sind deren unendlich viele, drei, oder nur eine. Der letzte Fall tritt bei den Flächen 2. Ordnung ein.

$$(60) \qquad \Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

alle *von Null verschieden.*

H. Poincaré[123]) setzt jeden der Brüche $(59) = dt/t$ und sucht die Integrale der partiellen Differentialgleichung (Nr. **16**):

$$(61) \qquad P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + t \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Der calcul des limites (Nr. **11**) beweist die Existenz von n verschiedenen Integralen der Form

$$(62) \qquad F_i \equiv t^{-\lambda_i} T_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

T_i holomorph für $(0, 0 \ldots 0)$, wenn folgende 3 Bedingungen erfüllt sind:

a) stellt man die λ_i (die komplex sein können) durch Punkte der Ebene dar, so giebt es eine Gerade durch den Ursprung, die alle λ_i auf derselben Seite lässt;

b) alle „*Elementarteiler*“ (1 B 2, Nr. 3) von $\Delta(\lambda)$ sind verschieden (was namentlich dann der Fall ist, wenn alle λ_i verschieden sind);

c) zwischen den λ_i besteht keine Relation der Form:

$$(63) \qquad p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n = \lambda_i,$$

in der die p nicht-negative ganze Zahlen sind, deren Summe > 1 ist.

Das allgemeine Integral des Systems (59) lässt sich dann in der Umgebung des Ursprungs durch die $(n - 1)$ Gleichungen:

$$(64) \qquad T_i^{\lambda_1} T_1^{-\lambda_i} = \text{Const.} \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

darstellen; ausser den hierdurch definierten Integralkurven gehen keine andern durch zum Ursprung benachbarte Punkte.

Bezeichnet man mit C_i willkürliche Konstante und setzt $\theta_i = C_i t^{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, so lassen sich die Lösungen von (59) in der Form darstellen: $x_i = \varphi_i(\theta_1, \ldots \theta_n)$, in der die φ für $(0, 0, \ldots 0)$ holomorph sind. Setzt man alle C_i bis auf eines $= 0$, so erhält man n holomorphe Lösungen, die durch den Ursprung gehen; ausser ihnen giebt es keine andern. Die Existenz der holomorphen Lösungen ergiebt sich auch[124]) aus einer Verallgemeinerung der Methode von *Briot und Bouquet*, und zwar auch für den Fall, dass nur die Bedingungen (b) und (c), nicht aber (a) erfüllt sind.

123) J. éc. polyt. cah. 45, 1878, p. 13; Par. thèse 1879. Vgl. auch *Königsberger*, Lehrbuch p. 352; *Picard*, traité 3, p. 1; *M. Liapunoff*, Chark. Mitt. (2) 1, 1888.

124) *H. Poincaré*, J. de math. (4) 2, 1886, p. 154.

Auf Grund der Darstellung (64) lässt sich das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung des Ursprungs untersuchen[125]). Der Eintritt der verschiedenen Möglichkeiten hängt (wie in Nr. **24**) von den Vorzeichen der reellen Teile der λ_i ab; sind diese z. B. alle positiv, so konvergiert jede Integralkurve, die durch zum Ursprung benachbarte Punkte hindurchgeht, gegen den Ursprung, wenn x gegen Null konvergiert, ohne dass dabei sein Argument unbegrenzt wächst.

33. Ergänzungen. Seien die Bedingungen (a) und (c) von Nr. **32** erfüllt, aber nicht (b). Dann zeigt *I. Bendixson*[126]), dass jedem zur Wurzel λ gehörenden Elementarteiler der Ordnung j j unabhängige Integrale der Gleichung (61) entsprechen von der Form:

$$(65)\quad \frac{T_1}{t^\lambda},\ \frac{T_2 + T_1 \log t}{t^\lambda},\ \cdots,\ \frac{T_j + T_{j-1}\log t + \cdots + \frac{1}{(j-1)!} T_1 (\log t)^{j-1}}{t^\lambda},$$

in der die T bei $(0, 0, \ldots, 0)$ holomorph sind. Elimination von t giebt $n - 1$ unabhängige erste Integrale von (59) und damit das allgemeine Integral.

Sind (a) und (b), aber nicht (c) erfüllt, so bildet *E. Lindelöf*[127]) n Integrale von (61) der Form $St^{-\lambda}$; dabei bedeutet S ein Polynom in $\log t$, dessen Koeffizienten für $(0, 0, \ldots, 0)$ holomorph sind; daraus leitet er die Existenz von $n - 1$ ersten Integralen von (59) ab, eines von der Form $T_1 e^R = \text{Const.}$ [T_1 holomorph, R meromorph für $(0, 0, \ldots, 0)$], andere von der Form $T_1^{-\lambda_i} T_i^{\lambda_1}$, andere endlich für $(0, 0, \ldots, 0)$ meromorph.

Den allgemeineren Fall, dass nur (a) erfüllt ist, behandelt *J. Horn*[128]). Zu jeder Wurzel λ_k gehören zwei Zahlen j_k[129]) und h_k von der Art, dass man das allgemeine Integral auf die Form bringen kann:

$$(66)\quad x_i = \varphi_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ m = \sum j_k \leq n),$$

in der die φ_i für $(0, 0, \ldots)$ holomorph sind und

$$\theta_1 = t^\lambda (\log t)^h, \quad \theta_2 = t^\lambda (\log t)^{h+1}, \cdots, \theta_j = t^\lambda (\log t)^{h+j-1}$$

(analog für die andern Wurzeln) gesetzt ist. Die theoretische Möglichkeit einer solchen Entwicklung folgt aus den Sätzen von *Bendixson*

125) *Königsberger* (Lehrbuch p. 390) untersucht im Detail den (zu Nr. 24 analogen) Fall $P_1 \equiv x_1$.

126) Stockh. Öfv. 11, 4. 1894.

127) Acta Fenn. 22, 1897.

128) J. f. Math. 116, 1896, p. 265; 117, 1896, p. 104, 254.

129) j_k ist das Maximum der Grade der zu λ_k gehörenden Elementarteiler; $\sum j_k$ ist $\leq n$.

und *Lindelöf* für die von ihnen behandelten Fälle[130]); *Horn* zeigt, dass man ihre Koeffizienten nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus dem System (59) berechnen kann.

34. Bestimmung besonderer Klassen von Integralen in Ausnahmefällen. Auch wenn die Bedingung (a) (Nr. 32) nicht erfüllt ist, kann man — zwar nicht von allen, aber doch — von einigen Integralen analytische Darstellungen angeben.

Seien die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ $(m < n)$ auf einer Seite einer Geraden D durch den Ursprung gelegen; seien diese Wurzeln alle einfach und durch keine Relation der Form:

$$(67)\quad p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_m\lambda_m = \lambda_j \qquad (j = 1, 2, \cdots \text{oder } m)$$

verbunden ($p_1, p_2, \ldots, p_m$ nicht negative ganze Zahlen, deren Summe > 2 ist). Setzt man $\theta_1 = C_1 t^{\lambda_1}, \cdots, \theta_m = C_m t^{\lambda_m}$, so giebt es Lösungen von (59) von der Form:

$$(68)\quad x_i = \varphi_i(\theta_1, \cdots, \theta_m),$$

in der die φ_i für $(0, 0, \ldots, 0)$ holomorph sind; diese Lösungen enthalten $m - 1$ unabhängige Konstanten[131]).

Allgemeiner: seien unter den m Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nur r verschiedene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, seien aber alle zugehörigen Elementarteiler von (60) einfach. Setzt man dann:

$$\theta_1 = t^{\lambda_1} \cdots \theta_r = t^{\lambda_r},$$

so existieren Lösungen von (59) von der Form:

$$x_i = \varphi_i(\theta_1, \ldots, \theta_r),$$

in der die φ_i für $(0, 0, \ldots, 0)$ holomorph sind und $m - 1$ unabhängige Konstanten enthalten[128]).

Gehören zu den m Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nicht lauter einfache Elementarteiler oder bestehen zwischen ihnen Relationen der Form (67), so erhält man Entwicklungen der Form (66) mit $m - 1$ unabhängigen Konstanten[128]). Dabei dürfen auch mehrere der nicht berücksichtigten Wurzeln Null sein.

Man kann die Gerade D stets so wählen, dass $m \geqq \frac{n}{2}$ wird.

---

130) Für den Fall, dass die Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind, beweist auch schon *Königsberger* (Lehrbuch p. 402) die Möglichkeit einer solchen Entwickelung.

131) Der Satz ist auf verschiedene Arten von *H. Poincaré* (Acta 13, 1890, p. 30); *E. Picard* (traité 3, p. 17; die Beweismethode schon Par. C. R. 87, 1878, p. 430, 743); *L. Königsberger* (Lehrbuch p. 390); *J. Horn* (Fussn. 128); *A. Liapunoff* (Fussn. 99) bewiesen.

Auch *A. Liapunoff* hat (für den Fall, dass die m Wurzeln einfach sind) Reihenentwicklungen gegeben, die $m-1$ Konstanten enthalten. Sie schreiten nach Potenzen der t^{2i} fort, mit Polynomen in $\log t$ als Koeffizienten.

35. Allgemeiner Fall meromorpher Differentialkoeffizienten. Der Fall, dass der Ursprung mehrfacher Schnittpunkt der Flächen $P_i = 0$ (Nr. 32) ist, ist noch wenig untersucht. In Erweiterung des Verfahrens von *Briot* und *Bouquet* (Nr. 24) führt *Königsberger*[132]) die Untersuchung der im Ursprung holomorphen Integrale von (59) im allgemeinen auf dasselbe Problem für den Fall zurück, dass $P_1 \equiv x_1$ und der Anfangspunkt einfacher Schnittpunkt der Flächen $P_i = 0$ ist. Aber es treten zahlreiche verschiedenartige Ausnahmefälle auf.

Noch sei auf die Fälle hingewiesen, in denen aus den Gleichungen (59) die Koeffizienten einer Entwicklung sich berechnen lassen, die dem System formell genügt, aber *divergiert*. Über deren Bedeutung vergleiche man den Schluss von Nr. 25. *E. Le Roy*[133]) hat dieses Verfahren auf die Untersuchung der irregulären Integrale linearer Differentialgleichungen angewendet.

36. Anwendung auf das reelle Gebiet. Seien jetzt im System (59) die Variabeln und die Differentialkoeffizienten reell. In allen Fällen, in denen man die Form des allgemeinen Integrals in der Umgebung des Nullpunkts kennt, bietet die Diskussion der Charakteristiken (Nr. 29) keine Schwierigkeit. Für $n = 3$ unterscheidet *Poincaré*[134]) fünf Fälle:

1) Die 3 Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind reell und haben gleiches Zeichen. Dann gehen alle Integralkurven, die dem Ursprung nahe kommen, durch ihn hindurch (*noeud*).

2) Die 3 Wurzeln sind reell und haben verschiedene Zeichen. Dann gehen durch den Ursprung unendlich viele Charakteristiken, die eine Fläche bilden, und eine isolierte (*col*).

3) Zwei Wurzeln λ_2, λ_3 sind konjugiert komplex und ihre Summe hat dasselbe Zeichen wie λ_1. Dann sind die Charakteristiken Spiralen oder Schraubenlinien, die den Ursprung zum asymptotischen Punkt haben (*foyer*).

---

132) Lehrbuch p. 347.

133) Par. C. R. Jan. 1899. — Übrigens werden die Singularitäten *linearer* Differentialgleichungen, die schon länger bekannt sind und der Untersuchung der Singularitäten der allgemeinen Gleichungen vielfach den Weg gewiesen haben, in II B 4 noch ausführlich besprochen.

134) J. de math. (4) 2, 1886, p. 151.

4) Zwei Wurzeln λ_2, λ_3 sind konjugiert komplex und ihre Summe hat das entgegengesetzte Zeichen wie λ_1. Unendlich viele Charakteristiken, die eine Fläche bilden, haben den Ursprung zum asymptotischen Punkt; eine isolierte Charakteristik geht durch ihn hindurch (*col-foyer*).

5) Die Wurzeln λ_2, λ_3 sind konjugiert rein imaginär. Der Ursprung ist dann *foyer* oder *col-foyer*, ausser in einem ausgezeichneten Fall, in dem unendlich viele Bedingungen erfüllt sind. In diesem letzteren Falle geht durch den Ursprung nur eine Charakteristik, und er ist von unendlich vielen geschlossenen Charakteristiken umgeben, die eine Fläche bilden (*centre*).

Poincaré untersucht auch den Fall, dass die Flächen $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ sich längs einer Linie schneiden; er zeigt, dass eine solche Linie in Bogen zerfällt, deren Punkte bezw. sämtlich noeuds, sämtlich foyers oder sämtlich cols sind, während die Trennungspunkte höhere Singularitäten sind.

37. Reelle asymptotische Lösungen. Die besprochenen Resultate bilden den Ausgangspunkt der Untersuchungen von *Poincaré* über die asymptotischen Lösungen der Gleichungen der Dynamik (III D 8) und von *Liapunoff*[135]) über die Stabilität des Gleichgewichts. Seien die Quotienten (59) $= dt$ gesetzt und sei angenommen, dass die so erhaltenen Gleichungen die Bewegung eines materiellen Systems mit k Parametern (Freiheitsgraden) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vorstellen, während $x_{k+1}, \ldots, x_n$ die Geschwindigkeiten sind ($n = 2k$). Den Anfangsbedingungen $t = t_0$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ entspricht keine andere Lösung als $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Wenn also reelle Charakteristiken durch den Ursprung gehen, können sie nur beschrieben werden, indem t dabei unbegrenzt zu- (oder ab-) nimmt. Solche Lösungen heissen zum Ursprung *asymptotisch*. Die Existenz einer einzigen solchen Lösung beweist, dass $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ eine *instabile* Gleichgewichtslage ist. Daraus folgt: Stabilität des Gleichgewichts verlangt, dass alle Wurzeln λ der Gleichung (60) rein imaginär sind. Haben die Kräfte ein Potential $V(x_1, x_2 \ldots x_n)$ — man darf annehmen, es sei im Ursprung Null — so beginnt seine Entwicklung mit Gliedern (mindestens) zweiter Ordnung; sei $H_2(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ das Aggregat dieser Glieder. Dasselbe lässt sich als algebraische Summe von $j\ (\leq k)$ verschiedenen Quadraten darstellen (1 B 2, Nr. 3). Wenn nicht vor jedem dieser Quadrate das Minuszeichen steht, giebt es asymptotische Lösungen.

135) Das allgemeine Problem der Stabilität der Bewegungen, Charkow 1892 (russ.); J. de math. (5) 3, 1897, p. 81.

Im allgemeinen Fall ist $j = k$ und das Gleichgewicht ist nur stabil, wenn V für $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ ein *Maximum* ist; diese (bekanntlich hinreichende) Bedingung ist also dann auch *notwendig*.

Die Resultate *Liapunoff*'s sind von *A. Kneser*[136]), *J. Hadamard*[137]) und *P. Painlevé*[138]) wiedergefunden und ergänzt worden. *Kneser* zeigt für $k = 2$, dass unendlich viele, von 2 willkürlichen Konstanten abhängende asymptotische Lösungen existieren, wenn H_2 Summe zweier positiven Quadrate ist. *Painlevé* behandelt den Fall, dass $H_2(x_1, x_2)$ sich auf ein negatives Quadrat reduziert, ohne dass V Maximum ist, sowie den Fall, dass V mit Gliedern der Ordnung $m > 2$, $H_m(x_1, x_2)$ beginnt und die Gleichung $H_m = 0$ keine mehrfachen reellen Wurzeln $x_2 : x_1$ hat. (Beide Fälle entziehen sich der Diskussion von *Liapunoff*.) Im ersten Fall existiert eine asymptotische Lösung und diese kann die einzige sein. Im zweiten Fall: wenn H_m in der Umgebung des Ursprungs > 0 ist, existieren unendlich viele, von zwei willkürlichen Konstanten abhängende asymptotische Lösungen; wenn die Gleichung $H_m = 0$ l reelle Wurzeln $x_2 : x_1$ hat, existieren mindestens l asymptotische Lösungen; wenn H_m in der Umgebung des Ursprungs negativ ist, ist das Gleichgewicht stabil. Die so gefundenen asymptotischen Lösungen lassen sich nicht durch die Entwicklungen von *Poincaré*, *Horn* und *Liapunoff* (Nr. **33**, **35**) darstellen.

Die verschiedenen qualitativen Methoden von *Kneser*, *Hadamard* und *Painlevé* verlangen nicht, dass die P_i (59) holomorph, sondern nur, dass sie mit ihren ersten Ableitungen in einer gewissen reellen Umgebung des Nullpunkts stetig sind.

136) J. f. Math. 115, 1895, p. 308; 118, 1897, p. 186.

137) Par. C. R. 124, 1897, p. 1503; J. de math. (5) 3, 1897, p. 332.

138) Par. C. R. 125, 1897, p. 1021.

II A 4b. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN; ELEMENTARE INTEGRATIONSMETHODEN

VON

E. VESSIOT

IN LYON.

Inhaltsübersicht.

1. Fundamentale Probleme. Definitionen.
2. Historischer Überblick. Formale Integrationstheorieen.
3. Einführung neuer Variabeln. Äquivalenzprobleme. Rationelle Integrationstheorieen.

Gleichungen erster Ordnung.

4. Methode der Trennung der Variabeln.
5. Methode des *Euler*'schen Multiplikators.
6. Methode von *Lie*.
7. Diskussion. Vergleichung der Transcendenten. Algebraische Integration.
8. *Jacobi*'sche und *Riccati*'sche Gleichung.
9. Unaufgelöste Gleichung; Integration durch Differentiation.
10. Geometrische Interpretationen; Verwendung homogener Koordinaten.

Systeme von Gleichungen 1. Ordnung; allgemeine Theorieen.

11. Multiplikatorensysteme.
12. Der *Jacobi*'sche Multiplikator.
13. Methode von *Lie*: Integration von Systemen mit bekannter Transformationsgruppe.
14. Integration von Systemen, von denen man Differential- oder Integralinvarianten kennt.
15. Variationssysteme.

Spezielle Methoden für Gleichungen n^{ter} Ordnung.

16. Methode des *Euler*'schen Multiplikators.
17. Fälle der Graderniedrigung.
18. *Lie*'sche Theorie. Gleichungen, die Gruppen von Punkttransformationen gestatten. Verallgemeinerungen.
19. Unaufgelöste Gleichungen. Typen integrabler Gleichungen.

Spezielle Klassen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

a) **Die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung.**

20. Allgemeine Begriffe; Fundamentalsysteme von Lösungen.
21. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Gleichungen von *Lagrange*. Methode von *d'Alembert*.

22. Gleichungen mit zweitem Glied. Methode der Variation der Konstanten.
23. Erniedrigung der Ordnung der Gleichung. Gemeinsame Lösungen zweier linearen Gleichungen.
24. Gleichung mit gegebenem Fundamentalsystem. Symbolische Methoden.
25. Rationale Differentialfunktionen der Lösungen eines Fundamentalsystems. Invariante Funktionen. Transformation.
26. Associierte Gleichungen. Adjungierte Gleichung.
27. Gleichungen zweiter Ordnung.

b) Lineare Systeme.

28. Ausdehnung der vorhergehenden Theorieen auf Systeme linearer Gleichungen.

c) Lie'sche Systeme und Verallgemeinerungen.

29. *Lie*'sche Systeme. Ihre verschiedenen Definitionen. Ihre Integrationstheorie.
30. Allgemeinste Systeme mit Fundamentallösungen. Gleichungen höherer Ordnung mit Fundamentalsystemen erster Integrale. Verallgemeinerung der *Lie*'schen Systeme.
31. Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen.
32. Verschiedene Klassen von Gleichungen.

Äquivalenzprobleme.

33. Formulierung des Problems. Einführung der Differentialinvarianten. Allgemeine Methoden.
34. Invarianten der linearen Gleichungen.
35. Invarianten verschiedener Klassen von Gleichungen.

Rationelle Integrationstheorieen.

36. Rationalitätsbereich. Irreducibilität.
37. Rationelle Integrationstheorie der linearen Gleichungen.
38. Ausdehnung der Theorie auf die *Lie*'schen Systeme. Theorie von *J. Drach* für beliebige Systeme von Gleichungen 1. Ordnung.

Litteratur.

Alle allgemeinen Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung (vgl. p. 56); namentlich *Euler*, Inst. calc. integr. 1, 2, 4; *Lacroix*, Traité 2; *C. Jordan*, t. 3; *E. Picard*, t. 3; *J. Boussinesq*, Cours d'analyse infinitésimale, Par. 1887; dann die p. 190 angeführten Lehrbücher von *Forsyth*, *Koenigsberger*; ausserdem *G. Boole*, Treatise on differential equations, Cambr. and Lond. 1865 (mit supplementary volume).

Speziell für *lineare* Gleichungen:

F. Klein, Autogr. Vorlesungen über höhere Geometrie 2, Göttingen 1893, und über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, Göttingen 1894.
L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1895/98.
L. Sauvage, Théorie générale des systèmes différentiels linéaires et homogènes, Toul. Ann. 8 und 9; auch separat, Paris 1895.

Für die *Lie*'sche Theorie:

S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearb. u. herausgeg. von *G. Scheffers*, Leipzig 1891.

Über Integration durch *bestimmte* Integrale vgl. man II B 3, über *algebraische* Integration und überhaupt die *funktionentheoretischen Methoden* II B 5; über *Approximationsmethoden* II A 4 a (bes. Nr. **4**) und 7 a, sowie auch die Artikel über astronomische Mechanik im IV. und V. Band; über die *Gestalt von Kurven, die durch Differentialgleichungen definiert sind* (III D 8); über *mechanische Integration* II A 1, Nr. **61**

1. Fundamentale Probleme. Definitionen. Die Probleme, mit denen sich die Theorie der Differentialgleichungen beschäftigt, sind bereits II A 4 a, Nr. **1** angegeben; hier sei nur noch zugefügt:

Unter dem *allgemeinen Integral* eines Systems n^{ter} Ordnung:

$$\frac{dx_i}{dx} = \lambda_i(x, x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

versteht man eine Lösung:

$$x_i = \theta_i(x \mid a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

die *wesentlich* von n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ abhängt. Die Funktionen θ_i sind nicht vollständig definiert; denn man kann in ihnen die a_i durch n willkürliche Funktionen von n andern willkürlichen Konstanten ersetzen, d. h. die allgemeinste Punkttransformation auf die a_i ausüben.

A. Cauchy[1]) und *C. G. J. Jacobi*[2]) haben gezeigt, dass das so gestellte Problem nicht zu trennen ist von dem der *Integration der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung*:

$$Lf \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

(vgl. II A 4 a, Nr. **6** und **16**; II A 5, Nr. **11**). Man weiss in der That seit *Lagrange*[3]), dass die Auflösungen der Gleichungen (2) nach den Konstanten ein *Fundamentalsystem von Lösungen von* (3) geben, d. h. ein System von n unabhängigen Lösungen dieser Gleichung. Umgekehrt erhält man das allgemeine Integral von (1), indem man n Funktionen $z_1(x, x_1, \ldots, x_n) \ldots z_n(x, x_1, \ldots, x_n)$, die ein Fundamentalsystem von Lösungen von (3) bilden, willkürlichen Konstanten gleichsetzt. Übrigens leitet man aus einem partikulären Integralsystem das allgemeinste durch Ausübung der allgemeinsten Punkttransformation auf die z her. Die Gleichung (3) heisst zu dem System (1) *äquivalent* oder ihm *associiert*. *Erstes Integral* oder einfach *Integral* von (1)

1) Par. C. R. 2 1836), p. 85; Oeuvr. (1) 5, p. 236. Er bezeichnet (3) als *charakteristische Gleichung*.

2) J. f. Math. 23 (1841), p. 1—104; Ges. Werke 4, p. 149.

3) Vgl. II A 5, Fussn. 58.

heisst jede Gleichung, die man erhält, indem man eine Lösung von (3) einer willkürlichen Konstanten gleichsetzt; abkürzungsweise auch oft eine solche Lösung selbst.

Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{4}$$

wird auf ein System n^{ter} Ordnung zurückgeführt, indem man:

$$y = x_1, \ \frac{dy}{dx} = x_2, \cdots, \ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = x_n \tag{5}$$

setzt; sie bildet also für die Integrationstheorieen nur eine besondere Klasse von Systemen n^{ter} Ordnung. Ein *erstes Integral von* (5) ist also eine Relation $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = a$, die von jeder Lösung von (5) für einen entsprechenden Wert der Konstanten a erfüllt wird. Allgemein heisst k^{tes} *Integral* oder Integral k^{ter} Ordnung eine Relation:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} \mid a_1, a_2, \ldots, a_k\right) = 0, \tag{6}$$

die von jeder Lösung von (5) für entsprechende Werte der a erfüllt wird. Endlich das *allgemeine Integral* von (5) ist definiert durch eine Relation der Form $\varphi(x, y \mid a_1, \ldots, a_n) = 0$ und stellt folglich eine Familie von ∞^n *ebenen Integralkurven* vor. — Diese Definitionen übertragen sich sofort auf beliebige Systeme von Gleichungen höherer Ordnung.

2. Historischer Überblick; formale Integrationstheorieen. Man hat sich ursprünglich zum Ziel gesetzt, das System (1) durch Funktionen θ zu integrieren, die nur eine endliche Anzahl von Zeichen der algebraischen Operationen und der „elementaren Transcendenten" enthalten sollten („explicite Integration"). In dieser Form ist das Problem, von ganz speziellen Fällen abgesehen, *unlösbar*, wie aus den Untersuchungen von *N. H. Abel* und *J. Liouville* über die durch Gleichungen der Form $dy/dx = f(x)$ definierten Transcendenten (II B 2) hervorgeht. Doch schon die Mathematiker des 18. Jahrhunderts waren von dieser Unmöglichkeit überzeugt und hatten daher ein weiteres Problem in Angriff genommen: das der *Integration durch Quadraturen*, bei dem nur verlangt wird, die θ durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen und *unbestimmter Integrale* auszudrücken. Auf dieses Problem beziehen sich die Methoden der *Trennung der Variabeln* (Nr. 4) und des *integrierenden Faktors* (Nr. 5). Dass auch das neue Problem im allgemeinen nicht lösbar ist, ist seit langem angenommen und von *J. Liouville* zuerst bewiesen worden (Nr. 8 und 37)

(vgl. II B 5). In der That haben die *klassischen Integrationstheorieen* thatsächlich nur die Reduktion des Systems (1) von der Ordnung n in wohlbestimmten Fällen auf einfachere Probleme derselben Art zum Ziel. So führt man in den klassischen Fällen der *Ordnungserniedrigung* das Problem auf die Integration einer Gleichung niedrigerer Ordnung und auf Quadraturen zurück; bei der Methode des *Eulerschen Multiplikators für Gleichungen höherer Ordnung* erniedrigt man die Ordnung um eine Einheit, sobald der Multiplikator bekannt ist; die Methode des *Jacobi'schen Multiplikators* erlaubt, unter gewissen Voraussetzungen, die Integration durch Quadraturen zu vollenden.

Erst seit wenigen Jahren betrachtet man als ein wesentliches Element der zu erzielenden Vereinfachungen die *Natur der Hülfssysteme*, auf die man das vorgelegte System zurückführt. Dieser neue Gesichtspunkt ist das Resultat der fortschreitenden Entdeckung zahlreicher Eigenschaften verschiedener *Klassen von Gleichungen*, deren Untersuchung allmählich zu einem wichtigen Teil der allgemeinen Theorie geworden ist; namentlich der *linearen Gleichungen* (II B 4), der *kanonischen Systeme der Dynamik* (IV), endlich der *Riccati'schen Gleichung* (der einfachsten Gleichung 1. Ordnung, die sich nicht durch Quadraturen integrieren lässt).

Die von *S. Lie* geschaffene allgemeine Theorie der *Transformationsgruppen* (II A 6) und ihr Annex, die Theorie der *Differentialinvarianten*, haben sowohl die allgemeinen Integrationstheorieen, als die Untersuchung spezieller Klassen von Gleichungen entscheidend gefördert. *Lie*'s Theorie der Integration von *Systemen, die bekannte Transformationsgruppen zulassen* (Nr. **13**), erlaubt nicht allein, die meisten klassischen Methoden auf *ein* Prinzip zurückzuführen, sondern auch aus der Struktur der als bekannt vorausgesetzten Gruppe präcise Folgerungen über die Natur der zur Integration des vorgelegten Systems ausreichenden Hülfssysteme zu ziehen. Zu gleicher Zeit sind die *Lie'schen Systeme* oder *Systeme mit Fundamentallösungen* (Nr. **29**) eingeführt worden, von denen die linearen Systeme und die Riccati'sche Gleichung nur ganz spezielle Fälle sind, und für die es regelrechte Integrationsmethoden giebt. Endlich sind auch die kanonischen Systeme der Dynamik spezielle Fälle sehr allgemeiner Systeme, deren Untersuchung sich an die der *unendlichen* Gruppen anschliesst.

Schliesslich kommt die Gesamtheit dieser *formellen Integrationstheorieen* auf die beiden folgenden Probleme hinaus: 1) aus vorher bekannten allgemeinen Eigenschaften eines Differentialgleichungssystems möglichsten Gewinn für seine Integration zu ziehen; 2) besondere

Klassen von Differentialgleichungen zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen.

3. Einführung neuer Variabeln. Äquivalenzprobleme. Rationelle Integrationstheorieen. Die allgemeinste und älteste Integrationsmethode ist die *Methode der Einführung neuer Variabeln* oder der *Transformation der Differentialsysteme*. Sie besteht in der Aufsuchung einer Transformation des Raumes von $n+1$ Dimensionen:

(7) $\bar{x} = F(x, x_1, .., x_n), \quad \bar{x}_i = F_i(x, x_1, .., x_n) \quad (i = 1, 2, .., n),$

die das System (1) in ein schon integriertes System von besonderer Form überführt. So aufgefasst ist die Methode dermassen vag, dass sie kaum den Namen einer Methode verdient: zwei beliebige Systeme (1) lassen sich durch unendlich viele Transformationen (7) in einander überführen. Gleichwohl hat sie nicht nur zahlreiche spezielle Resultate geliefert, sondern man kann mit *S. Lie* sagen, dass sie die gemeinsame Grundlage aller formalen Integrationstheorieen bildet, die nur zum Ziele haben, sie für die einzelnen Fälle zu präzisieren. Jede dieser Theorieen untersucht in der That ein besonderes Integrationsproblem: aus den speziellen Umständen dieses Problems folgt, dass das vorgelegte System durch Transformationen, die einer speziellen Gesamtheit von solchen angehören, in ein schon integriertes System übergeführt werden kann; die Eigenschaften dieser Gesamtheit von Transformationen bestimmen die Natur der zur Lösung des vorgelegten Problems erforderlichen Integrationen. Von diesem allgemeinen Prinzip aus, dass *jedes Integrationsproblem einem Transformationsproblem äquivalent* ist, hat *Lie* eine systematische Untersuchung der vorliegenden Integrationsprobleme unternehmen können[4]).

Die Transformationsmethode führt namentlich dann auf präcise Fragestellungen, wenn man zu entscheiden verlangt, ob zwei Differentialsysteme derselben Klasse sich in einander transformieren lassen mit Hülfe einer Transformation einer (endlichen oder unendlichen) Gruppe, deren Transformationen alle Systeme dieser Klasse in Systeme derselben Klasse überführen. Die Lösung dieser *Äquivalenzprobleme* hängt eng mit der Theorie der *Differentialinvarianten* zusammen (Nr. **33**).

Endlich seien als *„rationelle Integrationstheorieen“*[5]) gewisse neuere Theorieen bezeichnet, deren Ziel ist, die Natur der Vereinfachungen

4) Leipz. Ber. 47 (1895), p. 269; 48 (1896), p. 390.

5) *J. Drach* (Par. thèse 1898, p. 30) gebraucht in einem analogen Sinn den Ausdruck: *„logische Integration“*.

anzugeben, die die Integration eines vorgelegten *speziellen* Systems im Vergleich mit der des allgemeinsten Systems derselben Klasse zulässt; genauer gesagt, folgende drei Fragen zu beantworten:

1) Wann ist ein System als ein *spezielles* System der vorgelegten Klasse anzusehen und was für verschiedene Kategorieen spezieller Systeme enthält diese Klasse?

2) Welche Vereinfachungen bieten sich bei der Integration für jede dieser Kategorieen dar?

3) Wie kann man methodisch entscheiden, ob ein vorgelegtes System speziell ist, und wenn ja, zu welcher Kategorie es gehört?

Die zweite Frage fällt in den Rahmen der formellen Integrationstheorieen; die dritte lassen wir hier bei Seite, da sie einerseits gegenwärtig in den meisten Fällen keine entscheidende Beantwortung erlaubt, andererseits die Hülfsmittel der Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher erfordert.

Gleichungen erster Ordnung.

4. Methode der Trennung der Variabeln. Das einfachste System (1) ist dasjenige ($n = 1$), das aus einer Gleichung erster Ordnung besteht:

$$\frac{dy}{dx} - \lambda(x, y) = 0 \tag{8}$$

oder symmetrischer:

$$\frac{dx}{\alpha(x, y)} = \frac{dy}{\beta(x, y)}. \tag{8a}$$

Das allgemeine Integral ist $z(x, y) = a$, wenn z das Integral der äquivalenten Gleichung:

$$L(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

bezw.

$$\mathsf{A}(f) \equiv \alpha(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{9a}$$

ist. *Leibniz* und seine unmittelbaren Schüler haben den Fall untersucht, dass λ Produkt einer Funktion von x und einer Funktion von y ist. Die Gleichung kann dann geschrieben werden:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \tag{10}$$

und ihr allgemeines Integral ist:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = \text{const.}, \tag{11}$$

wo nur noch die angegebenen Quadraturen auszuführen sind. Man sagt in diesem Fall, in der Gleichung (8) seien *die Variabeln getrennt.*

Die *Methode der Trennung der Variabeln*, die die Schule von *Leibniz* auf diese Bemerkung gründete, besteht in der durch Einführung neuer Variabeln zu bewirkenden Zurückführung der vorgelegten Gleichung auf eine andere, in der die Variabeln getrennt sind. Sie gelingt u. a. für die *homogene* Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

vermittelst der Substitution $y = ux$ (*Joh. I Bernoulli*) und für die *lineare* Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x) \tag{13}$$

vermittelst der Substitution $y = ue^{\int A(x)\,dx}$ (*Jac. I Bernoulli*). Man verallgemeinert die Methode, indem man die vorgelegte Gleichung durch Einführung neuer Variabeln auf einen schon erledigten Fall, z. B. (12) oder (13), zurückzuführen sucht. Erwähnt sei die *Gleichung von Jac. I Bernoulli*:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)y^{-m+1}, \tag{14}$$

die durch die Substitution $u = y^m$ auf eine lineare zurückgeführt wird[6]).

5. Methode des Euler'schen Multiplikators. Eine zweite Methode[7]) gründet sich auf die Thatsache, dass das Integral z durch eine Identität der Form:

$$dz = M(x, y)\,[\alpha(x, y)\,dy - \beta(x, y)\,dx] \tag{15}$$

definiert ist. Kennt man also den *Multiplikator* oder *integrierenden Faktor* $M(x, y)$, so erhält man z durch eine Quadratur. Die allgemeine Bestimmung eines Multiplikators ist nicht leichter als die eines Integrals; denn sie verlangt die Integration der Gleichung:

$$\frac{\partial(M\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(M\beta)}{\partial y} = 0. \tag{16}$$

Euler zeigt, dass deren allgemeine Lösung $M = M_0\,\varphi(z_0)$ ist, wenn M_0 irgend einen Multiplikator, z_0 ein erstes Integral und φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Daraus folgt: der Quotient zweier Multiplikatoren ist ein Integral, wenn er keine Konstante ist.

---

6) Über die Bibliographie dieser Nummer vgl. man z. B. *Lacroix*, Traité 2 oder *M. Cantor*, Geschichte der Mathematik 3 (Leipz. 1898), Kap. 100.

7) *L. Euler*, N. Comm. Petr. 8 (1760), p. 3 und 17 (1772), p. 105, sowie Inst. calc. int. 2. — Die Idee des Multiplikators scheint auf *A. Clairaut*, Par. Hist. 1739 und 1740 zurückzugehen.

In gewissen speziellen Fällen kann die Form der Gleichung dazu führen, Multiplikatoren besonderer Form zu versuchen, die sich dann wirklich bestimmen lassen. Z. B. hat die lineare Gleichung (13) einen Multiplikator, der Funktion von x allein ist und sich durch eine Quadratur bestimmt: $M = e^{-\int A\,dx}$. Auf diese Weise konnte *Euler* seine Methode mit Erfolg nicht nur auf diejenigen Beispiele anwenden, die seine Vorgänger durch Trennung der Variabeln behandelt haben, sondern auch noch auf viele andere. So fand er z. B. für die Gleichung:

$$y\,dy + [A(x)\,y + B(x)]\,dx = 0 \tag{17}$$

verschiedene Fälle der Integrabilität[8]).

Aber die fruchtbarste Idee *Euler*'s war, das *umgekehrte Problem* zu behandeln, d. h. Gleichungen zu suchen, die Multiplikatoren von gegebener Form haben. Er erhielt so zahlreiche, freilich fast durchweg sehr spezielle Resultate[9]).

6. Methode von Lie. *S. Lie* bemerkte[10]), dass die meisten durch die vorhergehenden Methoden integrierten Gleichungen durch je eine eingliedrige Transformationsgruppe und also durch je eine infinitesimale Transformation in sich übergeführt werden. So gestattet die Gleichung (12) die Gruppe: $\bar{x} = mx$, $\bar{y} = my$; (13) die Gruppe: $\bar{y} = y + me^{\int A\,dx}$. Er wurde so zu folgendem Problem geführt: *Man kennt (durch ihre endlichen Gleichungen) eine eingliedrige Gruppe, die die Gleichung* (8) *invariant lässt; welchen Gewinn kann man daraus für deren Integration ziehen? Lie* zeigt, dass es genügt, die Gruppe auf ihre kanonische Form: $\bar{X} = X$, $\bar{Y} = Y + t$ zu bringen; in denselben neuen Variabeln hat die Gleichung (8) die integrable Form $dY/dX = \lambda(X)$. Die Reduktion der Gruppe auf ihre kanonische Form erfordert im allgemeinen eine Quadratur[11]).

Später[12]) nahm *Lie* das Problem wieder auf unter der Voraussetzung, dass von der Gruppe, die die Gleichung (8) oder (8a) in sich überführt, nur eine infinitesimale Transformation

---

8) Die Gleichung (17) ist seitdem noch vielfach untersucht worden; so von *N. H. Abel* (Oeuvr. 2, p. 26); *Minding* [Petersb. Mem. (7) 5, 1862, p. 1]; *V. Z. Elliot*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 101; *Korkine*, Math. Ann. 48 (1897), p. 317.

9) Hier reihen sich an: *N. Alexejeff*, Intégration des équations différentielles, Moscou 1878; *A. Winekler*, Wien. Ber. 99 (1890), p. 457, 875.

10) Über alle hier auftretenden Begriffe aus der Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen vgl. man II A 6.

11) *F. Klein* und *S. Lie*, Math. Ann. 4 (1871), p. 50.

12) Christ. Förh. 1874, p. 242.

$$\mathsf{T}(f) \equiv \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{18}$$

bekannt sei. Er findet, dass in diesem Fall der reciproke Wert von $\Delta = \alpha\eta - \beta\xi$ ein Multiplikator von $\alpha dy - \beta dx$ ist. Eine Quadratur genügt daher zur Integration der Gleichung. Die allgemeinste infinitesimale Transformation, die (8a) bezw. (9a) invariant lässt, ist definiert durch eine Identität der Form[13]):

$$(\mathsf{A}f, \mathsf{T}f) \equiv \varrho(x,y)\cdot \mathsf{A}(f), \tag{19}$$

die zur Bestimmung von ξ, η ein System partieller Differentialgleichungen liefert. Man kann diese Untersuchung vereinfachen, indem man nur Transformationen der Form $\mathsf{T}f \equiv \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$ berücksichtigt, was keine wesentliche Beschränkung ist; aber dann ist die Bedingung, dass $1/\eta$ ein Multiplikator von (8) ist. Die Methode von *Lie* ist also der von *Euler* (Nr. 5) genau äquivalent; aber sie ist im allgemeinen leichter anwendbar. *Lie* hat aus ihr eine geometrische Interpretation des Multiplikators abgeleitet[14]).

Endlich stellt *Lie* seine Methode noch in anderer Form dar[15]): Die Identität (19) zeigt, dass die Gleichungen

$$\mathsf{A}f = 0, \quad \mathsf{T}f = 1 \tag{20}$$

eine Lösung gemein haben; diese wird durch eine Quadratur erhalten, durch dieselbe, auf die auch der Multiplikator $1/\Delta$ führt. Die Gleichungen (20) sind die analytische Übersetzung der 1. Methode von *Lie*, die die Methode der Trennung der Variabeln (Nr. 4) systematisiert. Man hat also damit auch das Band zwischen den beiden klassischen Methoden.

Nach *Euler*'s Beispiel behandelt *Lie* auch das inverse Problem: *Alle Gleichungen 1. Ordnung zu bestimmen, die eine gegebene eingliedrige Gruppe zulassen.* Hier kann man die allgemeine Lösung angeben, nämlich: $\Phi(J_0, J_1) = 0$, wenn Φ eine willkürliche Funktion, J_0 die Invariante der Gruppe, J_1 ihre Differentialinvariante 1. Ordnung bedeutet. Diese beiden Invarianten berechnen sich durch Eliminationen, sobald man die endlichen Gleichungen der Gruppe kennt[16]).

7. Diskussion. Vergleichung der Transcendenten. Algebraische Integration. Wie man sieht, haben die drei besprochenen, im Grunde

13) Wegen der Definition des Jacobi'schen Klammerausdrucks vgl. man II A 6, Nr. 5.

14) a. a. O. Vgl. *Lie-Scheffers*, Differentialgleichungen, Kap. 9, wo auch verschiedene Anwendungen.

15) Vgl. z. B. *Lie-Scheffers*, p. 96.

16) *Lie-Scheffers*, p. 138.

äquivalenten Methoden einen gewissen Charakter der Unbestimmtheit gemein: er liegt in der voraufgehenden Aufsuchung, sei es der Transformation, die zur Trennung der Variabeln führt, sei es eines Multiplikators, sei es einer infinitesimalen Transformation, die die Gleichung invariant lässt. Sie haben auch thatsächlich nur sehr wenige Resultate geliefert; ihr Hauptnutzen liegt in der Bildung von Typen integrabler Gleichungen, von denen sich die interessantesten schon in *Euler*'s Integralrechnung finden.

Andrerseits ist über diese Methoden zu bemerken, dass sie häufig die wahre Natur des Integrals maskieren, indem sie direkt auf die Integration durch Quadraturen zustreben. So giebt die Methode der Trennung der Variabeln die Integrale der Gleichungen:

$$\frac{dx}{P(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0 \quad (P \text{ ein Polynom 1. oder 2. Grades}), \tag{21}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = 0 \quad (P \text{ ein Polynom 1., 2., 3. oder 4. Grades}) \tag{22}$$

in transcendenter Form, während diese Integrale thatsächlich algebraisch sind. Das folgt für (21) und für (22), wenn P vom 1. oder 2. Grade ist, aus der Theorie der Exponential- und Kreisfunktionen. Für (22), wenn P vom 3. oder 4. Grade ist, hat es *Euler* bewiesen, dessen Namen diese Gleichung behalten hat. Er entwickelt daraus, unter dem Namen der *Vergleichung der Transcendenten*, eine Theorie, welche die der elliptischen Funktionen (II B 6 a) im Keim enthält. Man hat später verschiedene Verfahren zur Integration der Euler'schen Gleichung angegeben; der wahre Grund des erwähnten Satzes liegt in dem *Abel'schen Theorem* (II B 2), das auch zu Verallgemeinerungen führt.

Im übrigen vergleiche man wegen der *algebraischen Integration* der Gleichungen 1. Ordnungen den Abschnitt II B 5.

8. Jacobi'sche und Riccati'sche Gleichung. Von speziellen Untersuchungen, die nicht unter die allgemeinen Methoden fallen, sind die wichtigsten:

Die Gleichung von C. G. J. Jacobi [17]):

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + R(x, y)\,(x\,dy - y\,dx) = 0 \tag{23}$$

(P, Q, R Polynome ersten Grades) hat das Integral:

$$U^{\lambda_2 - \lambda_3} V^{\lambda_3 - \lambda_1} W^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const.}, \tag{24}$$

wobei U, V, W Polynome 1. Grades, λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln einer

17) J. f. Math. 24 (1842), p. 1; Ges. Werke 4, p. 256.

Gleichung 3. Grades bedeuten. *J. A. Serret*[18]) hat mit Hülfe der Methode von *d'Alembert* (Nr. **21**) die Form des Integrals für die Fälle gegeben, dass diese Hülfsgleichung gleiche Wurzeln hat. Daran knüpfen sich die Untersuchungen von *G. Darboux*[19]) über algebraische Integrale der Gleichungen 1. Ordnung.

Die Riccati'sche Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{25}$$

verdankt ihren Namen dem speziellen Falle:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m \qquad (a,\ b \text{ konstant}), \tag{26}$$

der von *Graf J. Riccati*[20]) untersucht wurde. Dieser letztere lässt sich durch elementare Funktionen integrieren, wenn $m = -\frac{4k}{2k \pm 1}$ (k eine positive ganze Zahl), und steht im übrigen in naher Beziehung zu den *Bessel'schen Funktionen* (II B 4 b, Nr. **44**). Die allgemeine R.'sche Gleichung lässt sich nicht durch Quadraturen integrieren; das wurde von *J. Liouville*[20a]) für die spezielle Gleichung (26) angegeben und folgt auch aus dem entsprechenden Satz über lineare Gleichungen (Nr. **37**), sowie aus *de Maximovitsch*'s[21]) Bestimmung von durch Quadraturen integrierbaren Klassen von Gleichungen der Form: $dy/dx = F(x, y, \eta(x), \ldots, \eta_n(x))$ ($\eta_1, \ldots, \eta_n$ unbestimmte Funktionen, F eine bestimmte Funktion seiner Argumente). Das allgemeine Integral der R.'schen Gleichung hat die Form:

$$y = \frac{c\varphi(x) + \psi(x)}{c\chi(x) + \omega(x)}, \tag{27}$$

wenn c die Integrationskonstante bedeutet; m. a. W. das Doppelverhältnis von irgend 4 partikulären Integralen ist konstant. Diese Eigenschaft, die für die R.'sche Gleichung charakteristisch ist, scheint erst in den letzten Jahren hervorgehoben worden zu sein[22]); doch ergiebt sie sich unmittelbar aus der schon *Euler* bekannten Thatsache, dass man bei Kenntnis eines partikulären Integrals y_1 die

18) Calc. diff. et int. 2, p. 431.

19) Bull. soc. math. 1878, p. 72.

20) Acta erud. 1722. Schon *d'Alembert*, Berl. Hist. 1763 [70], p. 242 gebraucht den Namen in dem jetzt üblichen allgemeineren Sinne.

20a) J. de math. 6 (1841), p. 1.

21) Par. C. R. 101 (1885), p. 809.

22) *E. Picard*, Ann. éc. norm. (1) 6 (1877), p. 341; *Ed. Weyr*, Prag. Abh. (6) 8 (1875) [77], p. 30. Die Wichtigkeit der Riccati'schen Gleichung ergab sich schon aus den Untersuchungen von *O. Bonnet* über Regelflächen. Vgl. *G. Darboux*, Théorie des surfaces 1, chap. 2 und *E. Picard*, Traité d'analyse 2, p. 329.

Gleichung durch die Substitution $y = y_1 + u^{-1}$ in eine lineare überführen kann.

9. Unaufgelöste Gleichung. Integration durch Differentiation. Ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in unaufgelöster Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{28}$$

gegeben, so muss man sie, um die allgemeinen Methoden anwenden zu können, im allgemeinen erst nach $dy/dx = y'$ auflösen. Diese Auflösung kann unausführbar sein; man vermeidet sie oft durch eine Erweiterung der Transformationsmethode, indem man eine Transformation anwendet, die auch y' enthält. Man nennt das *Integration durch Differentiation*. Die älteste dieser Transformationen[23]) besteht darin, dass man y' an Stelle einer der alten Variabeln, z. B. von y, einführt; man hat dann y und dy aus (28) und den Gleichungen:

$$dy - y'\,dx = 0, \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial y'}\,dy' = 0 \tag{29}$$

zu eliminieren. Man erhält eine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen x und y'; man sucht ihr allgemeines Integral $V(x, y', a) = 0$ und hat dann nur y' zwischen $F = 0$ und $V = 0$ zu eliminieren. Diese Transformation führt zum Ziele bei der *d'Alembert'schen Gleichung:*

$$x\varphi(y') + y\psi(y') + \chi(y') = 0, \tag{30}$$

indem sie sie auf den linearen Typus zurückführt; ein spezieller Fall von dieser ist die *Clairaut'sche Gleichung*[24]):

$$y - xy' + \chi(y') = 0, \tag{31}$$

mit dem allgemeinen Integral:

$$y - ax + \chi(a) = 0.$$

Man wendet sie überhaupt immer an, wenn $F = 0$ sich nach y (oder nach x, mutatis mutandis) auflösen lässt.

Allgemeiner kann man, wenn F, G, H drei unabhängige Funktionen sind,

$$X = G(x, y, y'), \quad Y = H(x, y, y') \tag{32}$$

setzen; man eliminiert aus diesen Gleichungen, den daraus abgeleiteten $dX = dG$, $dY = dH$ und aus (28) und (29) x, y, y', dx, dy, dy'; ist $V(X, Y, a) = 0$ das allgemeine Integral der so erhaltenen Transformierten in X, Y, so hat man noch y' aus $F = 0$ und $V = 0$ zu

23) *J. d'Alembert*, Berl. Hist. 1748.

24) *A. Clairaut*, Par. Hist. 1734. Eine Verallgemeinerung bei *E. Goursat*, Bull. soc. math. 23 (1895), p. 88; Untersuchung der Transformierten in y' bei *L. Raffy*, ib. p. 50.

eliminieren. Eine solche Transformation lässt sich z. B. anwenden, wenn $F(x, y, y') = 0$ in x, y, y' eine rationale Fläche vorstellt[25]).

Man kann speziell *Berührungstransformationen* (III D 7) anwenden, d. h. die allgemeinsten Transformationen, die jede Gleichung 1. Ordnung in eine andere Gleichung 1. Ordnung und zugleich jede Lösung der ersteren in eine Lösung der letzteren überführen. Um Schwierigkeiten zu vermeiden, muss man dabei unter einer Lösung von $F = 0$ jede *Elementmannigfaltigkeit* M_1 (II A 5, Nr. 9) verstehen, deren sämtliche Elemente 1. Ordnung die Gleichung $F = 0$ erfüllen[26]). Man kann dann das Integrationsproblem folgendermassen auffassen: eine Berührungstransformation zu finden, die $F = 0$ auf $Y = 0$ reduziert. Für die Rechnung kommt das auf die Aufsuchung eines von F verschiedenen *ersten Integrals* von (29), d. h. einer Lösung der zu diesem System äquivalenten (Nr. 1) Gleichung[27]):

$$[F, f] = 0. \tag{33}$$

Denn wenn $U(x, y, y')$ diese Lösung ist, ist die verlangte Transformation:

$$X = U, \quad Y = F. \quad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial U}{\partial y'}; \tag{34}$$

und das allgemeine Integral von $F = 0$ ist definiert durch $F = 0$, $U = a$.

In dieser Form ist die Methode von *S. Lie*[26]) gegeben; doch hat man schon lange das Verfahren der Integration durch Differentiation geübt, indem man die Gleichung $F = 0$ durch das System 2. Ordnung (29) ersetzte. Da man von diesem schon ein erstes Integral F kennt, liegt es nahe, die Methode des Jacobi'schen Multiplikators (Nr. 12) auf dasselbe anzuwenden. Hierauf sich beziehende Untersuchungen von *J. Liouville*[28]), *Malmstén*[29]), *E. Laguerre*[30]) liefern durch Quadraturen integrable Typen, die willkürliche Funktionen enthalten. Analoge Typen geben die *Lie*'schen Theorieen[31]) (Gleichungen, die eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation zulassen). *A. Mayer*[32])

25) *Halphen*, Par. C. R. 87 (1878), p. 741. — Ebenso wird $F(y, y') = 0$ behandelt, wenn $F = 0$ eine rationale Kurve darstellt.

26) Vgl. z. B. *Lie-Engel*, Trf.-Gruppen 2, Kap. 1, § 8.

27) Wegen der Definition des *Poisson'schen Klammerausdrucks* [ ] vgl. man II A 5, Nr. 24.

28) J. de math. 20 (1855), p. 143.

29) J. de math. (2) 7 (1862), p. 314.

30) Bull. soc. math. 6 (1878), p. 224 (Oeuvr. 1, p. 409).

31) Vgl. z. B. *Lie-Scheffers*, Berührungstrf. 1, p. 111.

32) Leipz. Ber. 1890, p. 491.

bestimmt die Bedingung dafür, dass eine Gleichung, die eine willkürliche Funktion enthält, sich durch eine von dieser willkürlichen Funktion unabhängige Berührungstransformation auf den linearen Typus zurückführen lässt.

Unmittelbar integrabel sind Gleichungen der Form

$$\varphi(U(x, y, y'),\ V(x, y, y')) = 0,$$

wenn U, V zwei erste Integrale einer Gleichung 2. Ordnung sind[33]). Ihr allgemeines Integral ist definiert durch die Gleichungen $U = a$, $V = b$, $\varphi(a, b) = 0$, zwischen denen noch y' zu eliminieren ist. Die Bedingung, der U, V genügen müssen, ist $[U, V] = 0$, sodass sich das Resultat aus der vorhergehenden Methode von *Lie* ableiten lässt[34]).

10. Geometrische Interpretationen. Verwendung homogener Koordinaten. Häufig ist es vorteilhaft, die Gleichung 1. Ordnung durch ein Gleichungssystem zu ersetzen. Selbst für die Normalform (8a) substituiert man oft das System[35]):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x, y),\quad \frac{dy}{dt} = \beta(x, y), \tag{34}$$

was vom Lie'schen Standpunkt auf die Bestimmung der endlichen Gleichungen der von der infinitesimalen Transformation (9a) erzeugten eingliedrigen Gruppe hinauskommt. Ein anderes Beispiel davon giebt der Gebrauch der *homogenen Koordinaten*[36]): die Differentialgleichung 1. Ordnung drückt eine Beziehung zwischen einem beliebigen Punkt einer Integralkurve und ihrer Tangente an ihm aus und kann folglich auf die doppelt-homogene Form gebracht werden:

$$\Phi(x, y, z \mid u, v, w) = 0, \tag{35}$$

in der x, y, z die homogenen Koordinaten des Punktes, u, v, w die der Tangente bedeuten. Der „aufgelösten" Gleichung entspricht der Fall, dass Φ die Form hat:

$$A(x, y, z)\,u + B(x, y, z)\,v + C(x, y, z)\,w = 0, \tag{36}$$

in der A, B, C homogen und von demselben Grade m sind[37]). Man kann diese Gleichung durch das System

33) *J. Lagrange*, Leçons sur le calcul des fonctions, leçon 16; Oeuvr. 10, p. 220.

34) Vgl. *Lie-Engel*, Trf.-Gruppen 2, Kap. 1.

35) Vgl. z. B. die von *L. Euler* (Inst. calc. int. 4, p. 481), *J. Lagrange* (Oeuvres 2, p. 6), *G. Darboux* angewandten Methoden zur Integration der *Euler*schen Gleichung (Nr. 7).

36) *A. Clebsch*, Gött. Abh. 17, 1872 und Math. Ann. 5 (1872), p. 427 (vgl. *Clebsch-Lindemann*, Geometrie 1, Leipz. 1876, p. 963); *G. Darboux*, Bull. soc. math. 6 (1878), p. 68; vgl. auch *Fouret*, Par. C. R. 78 (1874), p. 837.

37) $m = 1$ giebt die *Jacobi*'sche Gleichung (Nr. 8); vgl. *A. Clebsch* und *P. Gordan*, Math. Ann 1 (1869), p. 359.

$$dx : dy : dz = A : B : C, \tag{37}$$

d. h. durch die associierte Gleichung:

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{38}$$

ersetzen; von dieser muss man ein homogenes Integral 0ter Ordnung suchen. Zu diesem Zweck kann man einen Multiplikator μ bestimmen, der der *Jacobi*'schen Relation:

$$\frac{\partial(\mu A)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu B)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu C)}{\partial z} = 0$$

genügt; sorgt man dafür, dass er homogen von der Ordnung $-(m+2)$ wird, so ist das Differential:

$$\mu \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$$

ein exaktes Differential (II A 2, Nr. 43); indem man es integriert, erhält man das gesuchte allgemeine Integral.

Über die Beziehungen zu *Clebsch*'s Theorie der Konnexe vgl. man III C 10.

Eine andere geometrische Interpretation hat *S. Lie* gegeben[38]): er betrachtet $F(x, y, y') = 0$ als Gleichung einer Fläche, auf welcher die dem linearen Komplex $dy - y'\,dx = 0$ angehörenden Kurven zu bestimmen sind. Von dieser Bemerkung aus kann man die Theorie der *singulären Integrale* (II A 4 a, Nr. 20) synthetisch entwickeln.

Systeme von Gleichungen 1. Ordnung; allgemeine Theorieen.

11. Multiplikatorensysteme. Das klassische Verfahren zur Integration des allgemeinen Systems (1) besteht in der successiven Erniedrigung der Ordnung des Systems. Zu diesem Zweck sucht man ein erstes Integral $z(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$ und eliminiert mit dessen Hülfe eine der Unbekannten, z. B. x_n, aus dem System (1). Man erhält so ein System $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$, das man ebenso weiter behandelt. So aufgefasst zerfällt die Integration in n successive Operationen, nämlich: Bestimmung *eines* Integrals eines Systems n^{ter} Ordnung, *eines* Integrals eines Systems $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, u. s. w., endlich des Integrals einer Gleichung 1. Ordnung. — Allgemeiner:

38) Vgl. z. B. *Lie-Scheffers*, Berührungstransformationen 1, p. 182. In etwas modifizierter Form in *L. Autonne*'s Untersuchungen über algebraische Integration, Par. C. R. 105, Nov. 1887.

kennt man k erste Integrale von (1), so kann man es durch Eliminationen auf die Ordnung $n - k$ reduzieren.

Die Aufsuchung eines ersten Integrals z kann mit Hülfe von *Multiplikatorensystemen* geschehen; denn da es durch eine Identität der Form:

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \mu_i [dx_i - \lambda_i dx] \tag{39}$$

definiert ist, kann es durch eine Quadratur erhalten werden, sobald die Multiplikatoren μ_i so bestimmt sind, dass die rechte Seite von (39) ein vollständiges Differential wird. Diese Multiplikatoren — eine unmittelbare Verallgemeinerung des *Euler*'schen Multiplikators (Nr. 5) — hat *C. G. J. Jacobi*[39]) untersucht; ihre allgemeine Bestimmung ist nicht leichter, als die direkte Integration des vorgelegten Systems. *Jacobi* macht eine interessante Anwendung auf das *lineare System* n^{ter} *Ordnung:*

$$dx_i - \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih}(x) x_h + b_i(x)\right] dx = 0 \quad (i = 1, 2, .., n). \tag{40}$$

Man kann hier für die μ_i Funktionen von x allein suchen; denn diese bestimmen sich durch ein gleichfalls lineares System, das *adjungierte*[40]) des vorgelegten, nämlich:

$$d\mu_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j a_{ji}(x) dx = 0. \tag{41}$$

Ist das System (40) *homogen*, d. h. sind alle $b_i(x)$ identisch Null, so sind die beiden Systeme (40) und (41) zu einander reciprok, jedes das adjungierte des anderen.

Gewöhnlich beschränkt man sich auf eine solche Wahl der μ_i, dass die lineare homogene Kombination der Gleichungen (1):

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (dx_i - \lambda_i dx) = 0 \tag{42}$$

eine „exakte Gleichung" (II A 5, Nr. **19**) wird; man erkennt das daran, dass ihre linke Seite nur von zwei Funktionen u, v der Variabeln $x, x_1, .., x_n$ und ihren Differentialen du, dv abhängt. Man erhält so eine Gleichung 1. Ordnung zwischen u und v, deren Integration ein

---

39) J. f. Math. 23 (1842), p. 1—104; Ges. Werke 4, p. 236; *Euler* hatte sich solcher Multiplikatoren für $n = 2$ und $n = 3$ bedient, doch ohne ihre Existenz allgemein zu behaupten.

40) *Jacobi*, J. f. Math. 27 (1844), p. 199 und 29 (1845), p. 213 u. 333; Ges. Werke 4, p. 319.

erstes Integral des Systems (1) liefert. Da es dabei nur auf die Verhältnisse der μ_i ankommt, kann man einen von ihnen willkürlich wählen. Diese Methode hat *J. d'Alembert*[41]) auf das lineare System (40) angewendet; indem er $\mu_n = 1$ setzt und für $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ Funktionen von x allein sucht, bringt er die Kombination (42) auf die Form:

$$(43)\quad \frac{du}{dx} - u\left\{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i a_{in} + a_{nn}\right\} - \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i b_i + b_n\right\} - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \Phi_k = 0,$$

mit:

$$(44)\quad \begin{cases} u = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_{n-1} + x_n, \\ \Phi_h = \frac{d\mu_h}{dx} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i a_{ih} + a_{nh} - \mu_h \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i a_{i,n} + a_{n,n}\right\} \\ (h = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Die Kombination (43) wird eine exakte Gleichung, wenn man $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ aus den Gleichungen $\Phi_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ bestimmt, die ein System $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden[42]). Ist dieses integriert, so bleibt eine lineare Gleichung in u, und die Integration wird durch zwei Quadraturen vollständig.

Man kann ferner auf diese Methode eine neuerdings von *A. Guldberg*[43]) vorgeschlagene Methode zur Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zurückführen.

Im allgemeinen Fall sind die partiellen Differentialgleichungen, denen die μ_i genügen müssen, kompliziert; aber es reicht aus, eine partikuläre oder selbst singuläre Lösung von ihnen zu kennen. So führt die Methode von *d'Alembert*, falls die a_{ik} Konstante sind, zum Ziele, indem man für die μ_i konstante Werte nimmt, die den Gleichungen $\Phi_h = 0$ genügen. — Dieselbe Bemerkung gilt für den *Euler*schen Multiplikator (Nr. 5).

12. Der Jacobi'sche Multiplikator[44]) ist ebenfalls eine Verallgemeinerung des *Euler*'schen, aber von ganz anderm Gesichtspunkt. Sei das System (1) in der symmetrischen Form gegeben:

$$(45)\quad \frac{dx_0}{\alpha_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_1}{\alpha_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\alpha_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)},$$

41) Berl. Hist. 1748 [50], p. 283; vgl. auch Par. Hist. 1768 und 1769.

42) Wegen der Eigenschaften solcher Systeme vgl. man Nr. **29.**

43) Par. C. R. 121 (1895), p. 49.

44) An der Fussn. 39 citierten Stelle ist die Theorie entwickelt, mit den meisten Anwendungen.

sodass die associierte Gleichung (3) wird:

$$\mathsf{A}f \equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{46}$$

Wenn $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $\mathsf{A}f = 0$ bilden, so existiert (II A 5, Nr. **12**) ein Multiplikator M, der der Identität genügt[45]):

$$\mathsf{M} \cdot \mathsf{A}f = \frac{\partial(f, z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{47}$$

was auch f sein mag; umgekehrt, wenn $\mathsf{M}, z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine solche Identität befriedigen, bilden $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $\mathsf{A}f = 0$. Diese Identität ist also die *Definition der Jacobi'schen Multiplikatoren* des Systems (45); sie ist äquivalent mit der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial(M\alpha_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{48}$$

(Für $n = 1$ kommt man auf den *Euler*'schen Multiplikator zurück.) Auch hier ist der Quotient zweier Multiplikatoren ein Integral; und die *singulären* Lösungen des Systems genügen der Gleichung $M^{-1} = 0$. Führt man an Stelle der $x_0, x_1, \ldots, x_n$ neue Variabeln $y_0, y_1, \ldots, y_n$ in das System ein, so ist

$$N = M \frac{\partial(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_0, y_1, \ldots, y_n)} \tag{49}$$

ein Multiplikator des transformierten Systems. Sind k der y_i erste Integrale des gegebenen Systems, so reduziert sich das transformierte auf die Ordnung $n - k$ und N ist ein Multiplikator des reduzierten Systems. Für $k = n - 1$ führt dieses Resultat zum *Satz vom letzten Multiplikator:* Wenn man $n - 1$ Integrale und einen Multiplikator kennt, bestimmt sich das letzte Integral durch eine Quadratur. Setzt man ausserdem noch voraus, dass eine der Variabeln in den Gleichungen des Systems nicht explicite auftritt, so bestimmt sich entweder schon das vorletzte Integral durch eine Quadratur, oder das letzte bestimmt sich ohne Quadratur. Dieses letzte Resultat liefert für die Dynamik das *Prinzip des letzten Multiplikators.*

Jacobi hat diese Theorie auf das lineare System (48) angewendet, das den Multiplikator:

---

45) Wegen der Bezeichnung der Funktionaldeterminante vgl. man I B 1 b Nr. **19**.

$$\mathsf{M} = e^{-\int \sum_{h=1}^{n} a_{hh}\, dx} \tag{50}$$

zulässt; er hat ferner aus ihr abgeleitet, dass die Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + B(x, y) = 0 \tag{51}$$

nur noch eine Quadratur erfordert, sobald man ein erstes Integral kennt. Aber die wichtigsten Anwendungen beziehen sich auf die *kanonischen Gleichungen von W. R. Hamilton*:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{52}$$

in denen H eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ und t ist; sie lassen eine Konstante als Multiplikator zu. Sie enthalten als spezielle Fälle die Gleichungen der Mechanik (IV 7), die der Variationsrechnung (II A 9) und die Gleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer Unbekannten (II A 5, Nr. 28 ff.).

Malmstén[46]) hat durch Kombination der Theorie des Multiplikators mit der Methode der Vertauschung der Variabeln formell allgemeinere Resultate erhalten und zahlreiche Anwendungen durchgeführt, namentlich auf Gleichungen 3. und 2. Ordnung, sowie auch auf solche 1. Ordnung unter Benutzung der Methode der Differentiation (Nr. 9). Z. B. lassen sich die Gleichungen $\frac{d\varphi(y, y')}{dx} = \psi(y, y')$ und $\frac{d\varphi(y, y')}{dx} = y''\psi(y, y')$ durch Quadraturen integrieren, sobald man ein erstes Integral kennt.

13. Methode von Lie: Integration von Systemen mit bekannter Transformationsgruppe. Ist ein System (45) gegeben, so kann es vorkommen, dass man infolge der Natur des Problems, das auf dieses System führt oder infolge der Form seiner Gleichungen, Transformationen kennt, die das System in sich überführen und von willkürlichen Konstanten abhängen. Durch Differentiationen leitet man aus ihnen infinitesimale Transformationen ab, die das System invariant lassen. So entspringt das von *S. Lie*[47]) gestellte Problem: *Das System* (45) *zu integrieren, wenn man q infinitesimale Transformationen:*

46) J. de math. (2) 7 (1862), p. 257. Wegen der Anwendungen der Jacobi'schen Methode vgl. man auch *Andrejewski*, Par. C. R. 68 (1869), p. 716 und *A. Winckler*, Wien. Ber. 80 (1879), p. 948.

47) Christ. Forh. 1874, p. 255; Math. Ann. 11 (1877), p. 464 und bes. 25 (1885), p. 71; vgl. *Lie-Scheffers*, Differentialgleichungen, Kap. 20 und 24.

$$(53) \qquad \mathsf{X}_k f = \sum_{i=0}^{n} \xi_{ki}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (q = 1, 2, \ldots, h)$$

kennt, die das System invariant lassen. Die Bedingung dafür, dass das System die infinitesimale Transformation $\mathsf{X}f$ zulässt, ist: sobald z ein Integral von $\mathsf{A}f = 0$ ist, muss auch $\mathsf{X}z$ ein Integral sein; und es muss folglich eine Identität der Form:

$$(54) \qquad (\mathsf{X}f, \mathsf{A}f) = \varrho(x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathsf{A}f$$

existieren. Wenn das System $\mathsf{X}_1 f$ und $\mathsf{X}_2 f$ gestattet, gestattet es auch die infinitesimale Transformation $(\mathsf{X}_1 f, \mathsf{X}_2 f)$. Endlich wenn eine Identität der Form:

$$(55) \qquad \mathsf{X}_q(f) \equiv \sum_{h=1}^{q-1} u_h(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, \mathsf{X}_h(f) + \sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, \mathsf{A}f$$

besteht, ist jede der Funktionen u_h entweder eine Konstante oder ein Integral von $\mathsf{A}f = 0$. Auf Grund dieser Sätze kann man in gewissen Fällen die Anzahl q der bekannten infinitesimalen Transformation vermehren, die das System invariant lassen und ohne Integration eine gewisse Anzahl erster Integrale erhalten, mit deren Hülfe man die Ordnung des Systems erniedrigt. Überdies: wenn $\mathsf{X}f$ das System invariant lässt, hat $\mathsf{X}f + \tau(x_0, x_1, \ldots x_n)\, \mathsf{A}f$ dieselbe Eigenschaft, was auch τ sein mag; man kann infolge dessen voraussetzen, dass das Glied mit $\partial f/\partial x_0$ in $\mathsf{X}_1 f, \ldots, \mathsf{X}_q f$ fehlt. Nach Vornahme aller dieser Vereinfachungen hat man ein dem ursprünglichen Problem analoges vor sich, bei welchem aber die infinitesimalen Transformationen eine endliche Gruppe G bilden, deren Ordnung höchstens gleich der Ordnung des Systems ist. Wir können also voraussetzen, dass das für die $\mathsf{X}_k f$ gilt, und dass überdies die Gleichungen $\mathsf{A}f = 0$, $\mathsf{X}_1 f = 0, \ldots, \mathsf{X}_q f = 0$ von einander unabhängig sind. Ist dann $q < n$, so bestimmt man die $n - q$ Integrale des vollständigen Systems $\mathsf{A}f = 0$, $\mathsf{X}_1 f = 0, \ldots, \mathsf{X}_q f = 0$, was die vorherige Integration eines gewöhnlichen Systems der Ordnung $n - q$ erfordert; indem man dann die Ordnung von $\mathsf{A}f = 0$ mit Hülfe dieser ersten Integrale erniedrigt, kommt man auf den Fall zurück, dass die Ordnung der Gruppe gleich der des Systems ist. Wir setzen also $q = n$ voraus.

In diesem Falle hat man zunächst den allgemeinen Satz, dass die Determinante:

$$(56) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \xi_{10} & \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n0} & \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

die nicht identisch Null ist, der reziproke Wert eines *Jacobi'schen Multiplikators* (Nr. 12) des Systems ist. Aber noch mehr: *Wenn die Gruppe G nicht einfach* (II A 6, Nr. 17) *ist, kann man das Problem auf eine Folge von Problemen derselben Art zurückführen, in denen Systeme niedrigerer Ordnung und einfache Gruppen auftreten; wenn die Gruppe G einfach ist, ist die Integration des Systems äquivalent mit der eines Hülfssystems, das einer besondern durch die Struktur der Gruppe definierten Klasse angehört.* *Lie* beweist diese Resultate zuerst unter der Voraussetzung, dass man die endlichen Gleichungen der Gruppe G kennt. Sei zu diesem Zwecke G_1 eine maximale invariante Untergruppe von G, von der Ordnung n_1. Man führt als neue Variable $r_1 = n - n_1$ unabhängige Invarianten dieser Gruppe G_1 ein; diese sind als Funktionen der unabhängigen Variabeln (z. B. x_0) definiert durch ein System der Ordnung r_1, mit einer einfachen Gruppe, die mit G/G_1 bezeichnet werden kann[48]). Ist dieses System integriert, so bedient man sich seiner ersten Integrale zur Erniedrigung der Ordnung von (45); dieses System reduziert sich so auf ein System der Ordnung n_1 mit einer zu G_1 holoedrisch isomorphen Gruppe, das ebenso weiter zu behandeln ist. Hat man also eine normale Zerlegung $G, G_1, G_2, \ldots, G_m$ von G, ist n_k die Ordnung von G_k und $n_{k-1} - n_k = r_k$, so hat man eine Folge von Hülfssystemen der Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ zu integrieren; das k^{te} von ihnen ($k = 1, 2, \ldots, m$) gestattet eine Gruppe der Ordnung r_k und der Struktur G_{k-1}/G_k (für welche die zu (56) analoge Determinante $\neq 0$ ist). Alle normalen Zerlegungen von G liefern, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben Zahlen r_k und dieselben Strukturen der einfachen Hülfsgruppen.

Die Natur der Hülfssysteme ist leichter nach einer andern, im Prinzip von *E. Vessiot*[49]) herrührenden Methode zu erkennen, die ausserdem den Vorteil hat, dass sie nur die infinitesimalen Transformationen von G benutzt. Seien $X_{r_1+1}f, X_{r_1+2}f, \ldots, X_nf$ die von G_1; dann ist identisch:

$$(57) \quad (X_i, X_k) = \sum_{s=1}^{r_1} c_{iks} X_s + \sum_{j=1}^{n_1} c'_{ikj} X_{r_1+j} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r_1),$$

48) Man kann die Ordnung dieses Hülfssystems reduzieren, indem man an Stelle der Invarianten von G_1 die einer G_1 enthaltenden Untergruppe von G einführt. Aus den so bestimmten ersten Integralen leitet man durch Differentiationen alle diejenigen ab, die das Hülfssystem des Textes liefert (*Lie*, Math. Ann. 25 [1885], p. 71, vgl. unten Nr. 37).

49) Toul. Ann. 8 (1894), H p. 29; vgl. *Lie-Scheffers*, Differentialgleichungen p. 554 und 568.

wobei die Konstanten c_{iks} die Struktur der einfachen Gruppe (G/G_1) definieren. Sei:

$$(58) \qquad \Upsilon_k f = \sum_{l=1}^{p} \eta_{kl}(y_1, \ldots, y_p) \frac{\partial f}{\partial y_l} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_1)$$

irgend eine Gruppe γ_1 dieser Struktur, also $(\Upsilon_i, \Upsilon_k) = \sum c_{iks} \Upsilon_s$. Integriert man dann das vollständige System (II A 5, Nr. **13**):

$$(59) \quad \mathsf{A}f = 0, \ \mathsf{X}_1 f = \Upsilon_1 f, \ \ldots, \ \mathsf{X}_{\nu_1} f = \Upsilon_{\nu_1} f, \ \mathsf{X}_{\nu_1+1} f = 0, \ldots, \mathsf{X}_n f = 0,$$

so erhält man p Integrale von $\mathsf{A}f = 0$; da sie die willkürlichen y enthalten, geben sie, für jedes p, ν_1 unabhängige erste Integrale von $\mathsf{A}f = 0$. Indem man sie als neue Variable einführt, erniedrigt man die Ordnung von (45) und erreicht zugleich, dass die Gruppe G_1, ebenso wie das transformierte System, nur die n_1 beibehaltenen Variabeln enthält. Damit ist die erste Reduktion vollzogen und man kann ebenso fortfahren. Integriert man überdies das System (59) nach der Methode von *A. Mayer* (II A 5, Nr. **17**), so kommt man auf *eine* Gleichung der Form:

$$(60) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\nu_1} \Theta_k(t) \Upsilon_k f = 0,$$

die mit einem System:

$$(61) \qquad \frac{dy_l}{dt} = \sum_{k=1}^{\nu_1} \Theta_k(t) \eta_{kl}(y_1, \ldots, y_p) \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

äquivalent ist — was die angekündigte Form für die Hülfssysteme ist. Die Ordnung dieses Systems wird möglichst klein, wenn man für γ_1 eine Gruppe der angegebenen Struktur in möglichst wenigen Veränderlichen wählt; man erhält dann einen kanonischen Typus des der Struktur G/G_1 entsprechenden Hülfssystems. — Von einem andern Gesichtspunkt aus kann man für γ_1 immer eine *lineare* Gruppe wählen, z. B. die zu der Struktur G/G_1 adjungierte Gruppe (II A 6, Nr. **15**). *Die Anwendung der Lie'schen Theorie kann also immer so geschehen, dass alle Hülfssysteme linear sind.* Ist $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_m = 1$, m. a. W. ist die Gruppe integrabel, dann geschieht die Integration bloss durch Quadraturen[50]).

---

50) *Lie*, Math. Ann. 25 (1885), p. 71; dort ist auch für eine grosse Anzahl von Fällen die Reducibilität auf lineare Systeme angekündigt. — *Lie* hat wiederholt (z. B. Leipz. Ber. 47 [1895], p. 261 und 506) versichert, seine Theorie liefere *alle* Vereinfachungen der Integration, die aus den Voraussetzungen folgten; aber er hat nie einen vollständigen Beweis veröffentlicht.

E. Cartan[51]) hat die gruppentheoretischen Probleme behandelt, von deren Lösung die Anwendung der *Lie*'schen Methode abhängt: Bestimmung und Eigenschaften der Normalreihen von Untergruppen; Reduktion der Struktur einer Gruppe auf eine kanonische Form; Bestimmung der einfachsten Hülfssysteme.

14. Integration von Systemen, von denen man Differential- oder Integralinvarianten kennt. Zur Vereinfachung des Systems (45) kann man auch noch aus anderen Umständen Nutzen ziehen. Man kann z. B. voraussetzen, man kenne irgend ein System von partiellen Differentialgleichungen, das durch die Integrale eines geeignet ausgewählten Fundamentalsystems von $Af = 0$ befriedigt werden kann. Diesen Fall behandelt *E. Vessiot*[52]) auf Grund *Lie*'scher Theorieen: die Voraussetzung ist äquivalent mit der der *Kenntnis gewisser Differentialinvarianten* der infinitesimalen Transformation Af, aus welchen man im allgemeinen neue ableiten kann. Die Integration lässt sich zurückführen auf die eines Systems Σ_G von partiellen Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösung aus einer partikulären durch die allgemeinste Transformation einer gewissen endlichen oder unendlichen Gruppe G abgeleitet werden kann (Nr. **31**). *Vessiot* zeigt auch, dass die Voraussetzung mit der folgenden äquivalent ist: *Man kennt die Definitionsgleichungen einer endlichen oder unendlichen Gruppe G, die $Af = 0$ invariant lässt;* man kann dann zunächst diese Gruppe zu bestimmen suchen und hat hierauf noch das Problem von Nr. **13** vor sich.

Man kann ferner voraussetzen, dass man *Integralinvarianten* von Af kennt. Darunter versteht man einfache oder mehrfache Integrale der Form[53]):

$$(62)\quad \mathfrak{J} = \iint \cdots \int \Phi\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_k}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_0^2}, \ldots\right) dx_0 dx_1 \ldots dx_{k-1},$$

die unverändert bleiben bei allen Transformationen der von Af erzeugten eingliedrigen Gruppe. Die Bedeutung dieser Integralinvarianten für die Integration von $Af = 0$ ist von *H. Poincaré*[54]) klargestellt

51) *E. Cartan*, Par. thèse 1894 und Amer. J. of math. 18 (1896), p. 1.

52) Par. C. R. 128 (1899), p. 544. Man kann das Problem auch mit den Theorieen von *J. Drach* (Nr. **38**) in Verbindung setzen.

53) Enthält Φ die Ableitungen von $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ nach $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ bis zu irgend einer Ordnung m, so heisst $\mathfrak{J}$ eine k-fache Integralinvariante m^{ter} Ordnung.

54) Acta math. 13 (1890), p. 46 und Méthodes nouvelles de la mécanique céleste 3, Par. 1899, p. 1.

worden; er hat hauptsächlich Integralinvarianten 1. Ordnung untersucht, die ganze Funktionen der Ableitungen sind, und Anwendungen auf die Gleichungen der Mechanik des Himmels gemacht. Von seinen Resultaten seien erwähnt: Ist $\mathfrak{J} = \int \sum_{k=0}^{n} \beta_k(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, dx_k$ eine Integralinvariante, so ist $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k$ ein erstes Integral; damit $\mathfrak{J} = \int^{(n+1)} M(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, dx_0 \cdot dx_1 \cdots dx_n$ eine Integralinvariante sei, ist notwendig und hinreichend, dass M für $A(f) = 0$ ein *Jacobi*'scher Multiplikator (Nr. **12**) ist. *G. Koenigs*[55]) untersucht die Beziehung zwischen der Existenz einer Integralinvariante der Form $\int \sum \beta_k dx_k$ und der Reducibilität des Systems (45) auf ein kanonisches System vermöge einer Punkttransformation. Seine Resultate waren vorher in anderer Formulierung von *S. Lie*[56]) erhalten worden, der seitdem auch gezeigt hat[57]), wie seine Theorie der *Differential*invarianten den Schlüssel zur allgemeinen Bestimmung der *Integral*invarianten giebt. Der Unterschied zwischen beiden Problemen ist, dass es nicht notwendig Integralinvarianten von jeder Vielfachheit und jeder Ordnung giebt, sodass man hier verschiedene *Klassen* von Gleichungen unterscheiden muss. Jedes so sich ergebende Problem lässt sich systematisch nach den Methoden von *Lie* behandeln; man wird im Grunde immer auf die Bestimmung einer Gruppe aus ihren Definitionsgleichungen geführt. Unter den von *Lie* im Detail behandelten Fällen sei erwähnt der eines Systems 2. Ordnung, für das man eine doppelte Integralinvariante 1. Ordnung kennt: man erhält dann entweder einen *Jacobi*'schen Multiplikator; oder einen Multiplikator und die Bestimmung eines ersten Integrals durch eine Gleichung 1. Ordnung; oder einen Multiplikator und ein Integral.

15. Variationssysteme. *Poincaré*[58]) hat die Bestimmung der Integralinvarianten eines Systems (1) verknüpft mit der Untersuchung des ihm zugeordneten „*Variationssystems*", d. h. des linearen Systems:

$$\frac{d\varepsilon_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i}\, \varepsilon_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{63}$$

55) Par. C. R. 121 (1895), p. 875.

56) Norw. Arch. 2 (1877), p. 10.

57) Leipz. Ber. 49 (1897), p. 342 und 369. — Andere Untersuchungen über Integralinvarianten: *C. Żorawski*, Krak. Ber. 1895; *E. Cartan*, Bull. soc. math. 24 (1896), p. 140; *A. Hurwitz*, Gött. Nachr. 1897, p. 71.

58) Méthodes nouv. [Fnssn. 55] 1, chap. 4 und 3, chap. 22.

das die 1. Variationen $\delta x_1 = \varepsilon_1(x)\delta t, \ldots, \delta x_n = \varepsilon_n(x)\delta t$ definiert, die man an irgend einem partikulären Integral $x_1 = x_1(x), \ldots, x_n = x_n(x)$ anbringen kann, wenn man zur Vereinfachung $\delta x = 0$ voraussetzt. Schon *C. G. J. Jacobi*[59]) hat für dieses System den Satz gegeben: Wenn man in (63) $x_1, \ldots, x_n$ durch die allgemeine Lösung von (1), $x_1 = \theta_1(x \mid a_1, \ldots, a_n), \ldots, x_n = \theta_n(x \mid a_1, \ldots, a_n)$ ersetzt, so ist die allgemeine Lösung von (63):

$$\varepsilon_k = \sum_{h=1}^{n} c_h \frac{\partial \theta_k}{\partial a_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{64}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ die willkürlichen Integrationskonstanten sind.

Dieses Variationssystem, das hauptsächlich in der Mechanik Anwendung findet, ist eng verknüpft mit der Bestimmung der infinitesimalen Transformationen der Form:

$$Xf = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{65}$$

die (1) invariant lassen. In der That ergiebt sich zu jeder solchen infinitesimalen Transformation aus jeder Lösung von (1) eine entsprechende von (63), wenn man $\varepsilon_k = \xi_k(x, x_1(x), \ldots, x_n(x))$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ setzt. Andrerseits: hat man n erste Integrale des aus (1) und (63) zusammengesetzten Systems, die unabhängige Funktionen von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sind, und setzt man sie willkürlichen Konstanten $\omega_1, \ldots, \omega_n$ gleich, so erhält man daraus Gleichungen:

$$\varepsilon_k = \xi_k(x, x_1, \ldots, x_n \mid \omega_1, \ldots, \omega_n), \tag{66}$$

deren zweite Glieder den allgemeinsten Wert von Xf geben, wenn man in ihnen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ durch n beliebige Integrale des Systems (1) (die auch Konstante sein können) ersetzt.

Spezielle Theorieen für Gleichungen n^{ter} Ordnung.

16. Methode des Euler'schen Multiplikators. Die allgemeinste Methode zur Integration einer Gleichung n^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \tag{67}$$

besteht in der Aufsuchung eines ersten Integrals, das man dann ebenso behandelt, u. s. w. Zu diesem Zwecke hat *L. Euler*[60]) den Begriff

---

59) Vorlesungen über Dynamik 12 (Ges. Werke Suppl.-Bd., p. 90). Vgl. *Serret*, Cours 2, p. 568.

60) Inst. calc. int. 2, p. 97.

des *Multiplikators* (Nr. 5) verallgemeinert: seine Theorie beruht auf der Bestimmung der Bedingungen, unter denen eine *„Differentialfunktion n^{ter} Ordnung“* $V\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ die *totale* Ableitung einer Differentialfunktion $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $W\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$ ist. Sie bestehen darin, dass *identisch* sein muss:

$$(68)\quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) + - + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right) = 0 \left(y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx_k}\right).$$

Sie sind von *Euler* mit Hülfe der Variationsrechnung, seitdem von vielen Autoren direkt erhalten worden[61]). Sind sie erfüllt, so erhält man W durch eine Quadratur. Eine von ihnen besagt, dass V in $y^{(n)}$ vom ersten Grad sein muss.

Sei nun (67) in der etwas allgemeineren Form gegeben:

$$(69)\quad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = A(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, y^{(n)} + B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0.$$

Euler's Methode besteht dann in der Aufsuchung eines Multiplikators $\mathsf{M}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ von der Art, dass $V = \mathsf{M}F$ den Bedingungen (68) genügt. Ist dann $V = dW/dx$, so ist $W = a$ das gesuchte erste Integral.

Die partiellen Differentialgleichungen, denen M genügen muss, sind kompliziert; doch hat *Euler* einige Anwendungen auf Gleichungen 2. und 3. Ordnung durchgeführt. Die interessanteste bezieht sich auf *lineare* Gleichungen; sie führt, auf eine solche Gleichung n^{ter} Ordnung verallgemeinert, zum Begriff der *adjungierten Gleichung*[62]). In der That, suchen wir zu der linearen Gleichung:

$$(70)\qquad p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)\, y = 0$$

einen *Euler*'schen Multiplikator z, der nur von x abhängt, so muss er der ebenfalls linearen Gleichung genügen:

$$(71)\qquad p_n z - \frac{d}{dx}(p_{n-1} z) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(p_0 z) = 0.$$

Sie heisst die Lagrange'sche Adjungierte von (70).

Übrigens ist *Euler*'s Methode nur eine spezielle Anwendung der

---

61) *Euler*, ib. 3, p. 425; *Condorcet*, Du calcul intégral; *Lexell*, Petrop. N. Comm. 15 und 16; *Lagrange*, Calcul des fonctions (Oeuvr. 10, p. 364); *J. Bertrand*, J. éc. polyt. cah. 28 (1841), p. 364; *J. Raabe*, J. f. Math. 31 (1846), p. 181; *F. Joachimsthal*, ib. 33 (1847), p. 95; *Stoffel* und *Bach*, J. de math. (2) 7 (1862), p. 49; *A. Winckler*, Wien. Ber. 88 (1883), p. 820.

62) *J. Lagrange*, Misc. Taur. 3, 1762/65, p. 179 (Oeuvr. 1, p. 471).

Methode der Multiplikatorensysteme (Nr. 11). Ist nämlich $V = dV/dx$ und setzt man:

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Y'\,dy' + \cdots + Y^{(n)}\,dy^{(n)},$$

so ist der Ausdruck:

$$V\,dx + Y^{(n)}(dy^{(n-1)} - y^{(n)}dx) + \left[Y^{(n-1)} - \frac{dY^{(n)}}{dx}\right](dy^{(n-2)} - y^{(n-1)}dx)$$
$$+ \cdots + \left[Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} - + \cdots\right](dy - y'\,dx)$$

ein exaktes Differential einer Funktion der als unabhängige Veränderliche zu betrachtenden Grössen $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$;[63]) daraus folgt, dass jeder Euler'sche Multiplikator von $F = 0$ mit einem Multiplikatorensystem des äquivalenten Systems:

(72) $A\,dy^{(n-1)} + B dx = 0,\ dy^{(n-2)} - y^{(n-1)}dx = 0, \ldots, dy - y'dx = 0$

äquivalent ist.

17. Fälle der Graderniedrigung. Einige Fälle von Graderniedrigung der Gleichung (67) sind seit langer Zeit bekannt[64]). Die hauptsächlichsten sind: 1) die Gleichung hat die binomische Form $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$; sie lässt sich dann durch n übereinanderstehende Quadraturen integrieren, die man mit Hülfe partieller Integration auch durch nebeneinanderstehende ersetzen kann. 2) Eine der Variabeln tritt nicht explicite auf, z. B. y; man erniedrigt auf die Ordnung $(n-1)$, indem man y' als Hülfsunbekannte einführt; es bleibt dann noch eine Quadratur zur Bestimmung von y. 3) y und seine Ableitungen bis $y^{(k-1)}$ incl. treten nicht explicite auf; führt man $y^{(k)}$ als Hülfsunbekannte ein, so hat man eine Gleichung der Ordnung $n - k$; es bleibt dann noch eine binomische Gleichung der Ordnung k. 4) Die Gleichung ist homogen in Bezug auf y und seine Ableitungen: die Substitution $x = e^z$ führt auf den Fall (2). 5) Die Gleichung ist homogen in Bezug auf $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$; die Substitution $x = e^u,\ y = ve^u$ führt ebenfalls auf (2).

S. Lie bemerkte[65]), dass in jedem dieser Fälle die Gleichung invariant bleibt bei den Transformationen einer endlichen Gruppe, näm-

63) Vgl. z. B. die Fussn. 61 citierten Abhandlungen von *Joachimsthal* und von *Stoffel* und *Bach*.

64) Vgl. die Lehrbücher, sowie *Allan Cunningham*, Mess. 17 (1887), p. 118 und 18 (1888), p. 122.

65) Gött. Nachr. 1874; Norw. Arch. 8 (1883), p. 167, 249, 371; 9 (1884), p. 431. Die 2 ersten Abh. aus Norw. Arch. 8 wieder abgedruckt Math. Ann. 32 (1888), p. 213.

lich: $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + a$ im Falle (2); $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$ im Falle (3) und, für $k = n$, im Falle (1); $\bar{x} = x$, $\bar{y} = ay$ im Falle (4); $\bar{x} = ax$, $\bar{y} = ay$ im Falle (5). Er wurde so zur *Theorie der Gleichungen höherer Grade* geführt, *die Gruppen von Punkttransformationen in x und y gestatten.*

18. Lie'sche Theorie. Gleichungen, die Gruppen von Punkttransformationen gestatten. Verallgemeinerungen. Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $(n > 1)$ gestattet im allgemeinen *keine* kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen; wenn doch, so ist die Gruppe *endlich,* und wenn $n = 2$, enthält sie höchstens 8 Parameter[66]). Die Gleichungen D mit einer Gruppe G von Transformationen in sich zerfallen in *Klassen,* je nach dem *Typus* von G (II A 6, Nr. **17**); die Gleichungen jeder Klasse lassen sich durch Punkttransformationen in einander überführen. Da *Lie* die verschiedenen Typen von Punkttransformationen bestimmt hatte, ergab sich die Bestimmung der zugehörigen Gleichungen D unmittelbar aus der Theorie der invarianten Funktionen und Gleichungen. Ausser gewissen exceptionellen Gleichungen, die durch Nullsetzen gewisser Determinanten erhalten werden, sind die Gleichungen D von der Form:

$$\Phi\left(J, \mathfrak{J}, \frac{d\mathfrak{J}}{dJ}, \frac{d^2\mathfrak{J}}{dJ^2}, \ldots, \frac{d^k\mathfrak{J}}{dJ^k}\right) = 0, \tag{73}$$

in der J, $\mathfrak{J}$ die beiden Differentialinvarianten niedrigster Ordnung von G, Φ eine willkürliche Funktion bedeuten. Für jeden der so erhaltenen Gleichungstypen hat *Lie* ein Integrationsverfahren gegeben: man erniedrigt erst die Ordnung auf k Einheiten, indem man J und $\mathfrak{J}$ als Variable einführt; es bleibt dann eine Gleichung der Form $F(J, \mathfrak{J}) = 0$ zu integrieren, für die sich spezielle Vereinfachungen ergeben (Integration durch Quadraturen oder Reduktion auf lineare Hülfsgleichungen). Als spezielle Typen erhält man die *linearen* Gleichungen und diejenigen, die die allgemeine projektive Gruppe zulassen. Letztere sind auch von *Halphen* und *Sylvester* in ihren Arbeiten über Differentialinvarianten (der projektiven Gruppe) und Reciprokanten (I B 2, Nr. **20**) eingeführt und untersucht worden.

Ein anderer bemerkenswerter Typus, nämlich:

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \omega(x)$$

ist u. a. von *H. A. Schwarz* untersucht[66a]).

66) Über diese Frage und allgemeinere analoge vgl. man *Lie,* Leipz. Ber. 46 (1894), p. 322 und *Fr. Engel,* ib. p. 297.

66a) J. f. Math. 75 (1872), p. 292 (Ges. Abh. 2, p. 220).

Ist irgend eine Differentialgleichung vorgelegt, so kann man durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob sie eine Gleichung D ist, und wenn ja, die Definitionsgleichungen ihrer Gruppe G bilden und den Typus bestimmen, zu dem sie gehört. Das ist ein *Aquivalenzproblem*, da es sich darum handelt zu entscheiden, ob die Gleichung durch eine Punkttransformation in eine spezielle Gleichung übergeführt werden kann; aber es ist nur in wenigen Fällen ganz explicite mit Hülfe der Differentialinvarianten gelöst (Nr. **33**—**35**). Um dann die vorgelegte Gleichung zu integrieren, kann man die Transformation suchen, die die Gruppe G in ihre kanonische Form überführt[67]). Man kann auch aus den Definitionsgleichungen von G ihre infinitesimalen Transformationen ableiten, was auf die Integration einer linearen Hülfsgleichung hinauskommt, und dann *Lie*'s allgemeine Methode zur Integration von Differentialsystemen mit bekannter Gruppe (Nr. **13**) anwenden, von der die hier besprochene im Grunde nur eine spezielle Anwendung ist.

Diese Theorie ist folglich verallgemeinerungsfähig. So hat *Lie*[68]) in gleicher Weise die Gleichungen n^{ter} Ordnung untersucht, die eine Gruppe von *Berührungstransformationen* zulassen. Das Problem hat nur für $n > 2$ Bedeutung; denn zwei Gleichungen 2. Ordnung lassen sich stets durch ∞ viele Berührungstransformationen in einander überführen. *Lie* hat speziell die Gleichungen n^{ter} Ordnung untersucht, die sich durch eine Berührungstransformation in den linearen Typus überführen lassen; ihre Integration verlangt die einer linearen Hülfsgleichung n^{ter} Ordnung (nur für $n = 3$ die einer 4. Ordnung).

Überhaupt ermöglicht die *Lie*'sche Theorie für jede Gruppe G in beliebig vielen Variabeln die Diskussion der bei dieser Gruppe invarianten Gleichungen oder Gleichungssysteme beliebiger Ordnung.

19. Unaufgelöste Gleichungen. Typen integrabler Gleichungen. Die Methoden zur Behandlung nicht aufgelöster Gleichungen 1. Ordnung (Nr. **9**) übertragen sich leicht auf Gleichungen n^{ter} Ordnung. So kann man

$$(74) \qquad X = \xi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \quad Y = \eta(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

setzen, unter ξ, η beliebige Funktionen verstanden, und dann zwischen diesen Gleichungen, der gegebenen, und den aus ihnen durch Differentiation abgeleiteten $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ eliminieren.

---

67) *S. Lie* an den Fussn. 65 citierten Stellen, sowie Math. Ann. 25 (1885), p. 120.

68) Christ. Förh. 1881, 1882, 1883.

Speziell hat man eine zu den *Lagrange*'schen Gleichungen (Nr. 9) analoge Klasse von Gleichungen der Form[69]) $\Phi(U, V) = 0$, wo $U(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = a$ und $V(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = b$ zwei erste Integrale einer Gleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Ein erstes Integral einer solchen Gleichung wird erhalten, indem man $y^{(n)}$ und eine der Konstanten zwischen $U = a$, $V = b$ und $\Phi(a, b) = 0$ eliminiert. Man kann auch, in Verallgemeinerung einer Idee von *G. Monge*[70]), Gleichungen der Form $\Phi(U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}) = 0$ betrachten, wenn $U_1 = a_1, \ldots, U_{n+1} = a_{n+1}$ $(n+1)$ erste Integrale derselben Gleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind; man erhält hier unmittelbar das allgemeine Integral, indem man $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ und eine der Konstanten aus $U_1 = a_1, \ldots, U_{n+1} = a_{n+1}$ und $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0$ eliminiert.

Spezielle Klassen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

a) Die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung.

20. Allgemeine Begriffe; Fundamentalsysteme von Lösungen. Von speziellen Klassen von Differentialgleichungen ist am frühesten die der *linearen Gleichungen* untersucht worden. Die Eigenschaften der *linearen homogenen Gleichungen* n^{ter} *Ordnung*:

$$(75) \qquad P(y) = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

bieten die grösste Analogie zu denen der algebraischen Gleichung n^{ter} Ordnung:

$$(76) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

dar. Wie die letzteren mit denen des Polynoms $f(x)$ verknüpft sind, so hängen jene von den Eigenschaften des *Differentialausdrucks* $P(y)$ ab, in dem y als unbestimmte Funktion zu behandeln ist[71]). So entspricht der *Taylor*'schen Formel (1 B 1 a, Nr. 6) hier die Formel:

$$(77) \qquad P(yz) = zP(y) + \frac{1}{1}\frac{dz}{dx}P'(y) + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2 z}{dx^2}P''(y) + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n z}{dx^n}P^{(n)}(y),$$

69) Vgl. die Note III (von *J. A. Serret*) zu *Lagrange*'s Leçons sur le calcul des fonctions und *J. A. Serret*, J. de math. 18 (1853), p. 1.

70) Par. Hist. 1783, p. 719.

71) Die erste Idee der symbolischen Darstellung einer solchen Differentialoperation geht auf *B. Brisson* zurück, J. éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 197 [a. d. J. 1804]; *A. Cauchy* hat sie auseinandergesetzt und erweitert (Exerc. de math. 1827); Oeuvr. (2) 7, p. 198); er gebraucht die Bezeichnung $f(D)y$, in der D für

wo $P'(y)$, $P''(y)$, ... aus $P(y)$ nach demselben Algorithmus abzuleiten sind, wie $f'(x)$, $f''(x)$, ... aus $f(x)$. Diese Formel ermöglicht die Graderniedrigung von (75) um eine Einheit, sobald man eine partikuläre Lösung y_1 kennt; denn setzt man $y = y_1 z$, so enthält die Gleichung für z z nicht mehr explicite[72]). Genügt y_1 zugleich den Gleichungen $P(y) = 0$, $P'(y) = 0, \ldots, P^{(k-1)}(y)$, m. a. W. sind y_1, xy_1, $x^2y_1, \ldots, x^{k-1}y_1$ gleichzeitig Lösungen von (75), so erniedrigt sich der Grad um k Einheiten; dieser Fall entspricht dem einer k-fachen Wurzel von (76).[73]) Man kann so die Ordnung successive um k Einheiten erniedrigen, wenn man k partikuläre Lösungen kennt; aber man muss dazu voraussetzen, dass diese Lösungen *linear unabhängig*, d. h. durch keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verknüpft seien. Die Bedingung dafür ist, dass die Determinante:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_k \\ y_1' & \ldots & y_k' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(k-1)} & \ldots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \tag{78}$$

nicht identisch Null ist[74]). Man beweist mit Hülfe der allgemeinen Methoden von *A. Cauchy* (II A 4a, Nr. **3**, **9**, **11**) oder des speziellen Verfahrens von *L. Fuchs* (II B 4), dass die Gleichung (75) unter gewissen Bedingungen, die wir hier stets als erfüllt voraussetzen, Systeme von n linear unabhängigen Lösungen hat; man nennt sie *Fundamentalsysteme*[75]). Jedes Fundamentalsystem lässt sich auf die Form bringen:

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1 \int v_2 \, dx, \ldots, y_n = v_1 \int v_2 \, dx \int \ldots \int v_n \, dx, \tag{79}$$

in der keine der Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ identisch Null ist.

J. Lagrange hat bewiesen[76]), dass:

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \tag{80}$$

die allgemeine Lösung ist, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem partikulärer Lösungen bilden und $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willkürliche Konstante

---

d/dx steht. Vgl. auch den Cours von *Sturm* und für neuere Untersuchungen die Bücher von *Boole*.

72) *J. d'Alembert*, Misc. Taur. 3 (1762/65) [66], p. 381 der 2. Paginierung.

73) *Brassinne* in einer Note zu *Sturm*'s Cours.

74) *O. Hesse*, J. f. Math. 54 (1857), p. 227; *E. Christoffel*, ib. 55 (1858), p. 293.

75) Der Terminus scheint von *L. Fuchs* (J. f. Math. 66 [1866], p. 121) herzurühren.

76) Misc. Taur. 3 (1762/66) [65], p. 181 der 2. Paginierung; Oeuvr. 1, p. 473.

sind. Diese Form des allgemeinen Integrals ist für die linearen homogenen Gleichungen charakteristisch, sie ist mit der Thatsache identisch, dass die Gleichung (75) (ausser der infinitesimalen Transformation $y\,\frac{\partial f}{\partial y}$) eine Gruppe von Transformationen der Form $\eta_k(x)\,\frac{\partial f}{\partial y}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) zulässt. Die lineare Gleichung gehört also zu den Gleichungen D der Nr. **18**.[77])

21. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Gleichungen von Lagrange. Methode von d'Alembert. Sind die Verhältnisse von $p_0, p_1, \ldots, p_n$ konstant, so kann die Gleichung (74) geschrieben werden:

$$P(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_n y = 0, \tag{81}$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ Konstante sind; man nennt sie dann *Gleichung mit konstanten Koeffizienten*. Sie lässt sich durch elementare Funktionen integrieren. Denn setzt man:

$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n \tag{82}$$

und bezeichnet mit ω eine Konstante, so hat man:

$$P(e^{\omega x}) = e^{\omega x} f(\omega), \quad P'(e^{\omega x}) = e^{\omega x} f'(\omega), \ldots; \tag{83}$$

also giebt jede Wurzel der *„charakteristischen Gleichung“* $f(\omega) = 0$ eine Lösung $y = e^{\omega x}$, und jede k-fache Wurzel k Lösungen $e^{\omega x}$, $x e^{\omega x}, \ldots, x^{k-1} e^{\omega x}$. Man erhält so n Lösungen und beweist, dass sie linear-unabhängig sind. Dieses Resultat verdankt man *L. Euler*[78]; den Fall gleicher Wurzeln hat zuerst *J. d'Alembert*[79]) nach einer in vielen analogen Fällen (z. B. Nr. 8) brauchbaren Methode behandelt, die seinen Namen behalten hat. Er geht von der Euler'schen Form des allgemeinen Integrals $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\omega_k x}$ mit ungleichen ω aus und sucht daraus Grenzformen für den Fall abzuleiten, dass die Wurzeln zusammenfallen. Am einfachsten ist es zunächst, nur zwei Wurzeln ω_1 und ω_2 zusammenfallen zu lassen; man muss dann die c durch solche Funktionen der ω ersetzen, dass y für $c_1 = c_2$ unbestimmt wird und man seinen „wahren Wert“ (II A 1, Nr. **13**) zu bestimmen hat. Man schreibt zu diesem Zweck:

---

77) Vgl. z. B. *Lie-Scheffers*, Differentialgleichungen, Kap. 16.

78) Misc. Berol. 7 (1743), p. 193 und Inst. calc. int. 2, sect. 2.

79) Vgl. z. B. den Art. Tangentes des Dictionnaire des mathém. der Encyclopédie méthodique. — Das Verfahren kann durch den Satz von *Poincaré*, II A 4 a, Nr. **15**, gerechtfertigt werden.

$$(84) \qquad y = c_1' e^{\omega_1 x} + c_2' \frac{e^{\omega_2 x} - e^{\omega_1 x}}{\omega_2 - \omega_1} + c_3 e^{\omega_3 x} + \cdots + c_n e^{\omega_n x},$$

wo $c_1' = c_1 + c_2$ und $c_2' = (\omega_2 - \omega_1) c_2$ als neue willkürliche Konstante angesehen werden können; der Grenzübergang für $\omega_2 = \omega_1$ hat keine Schwierigkeit. Ebenso geht man vom Fall einer doppelten zu dem einer dreifachen Wurzel über u. s. w.

Sind die konstanten Koeffizienten *reell*, so kann man die $2k$ Partikularlösungen, die zwei konjugiert-komplexen k-fachen Wurzeln $\omega = \alpha \pm \beta i$ der Gleichung $f(\omega) = 0$ entsprechen, durch Lösungen der reellen Form $x^h e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^h e^{\alpha x} \sin \beta x$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, k - 1)$ ersetzen.

Ist $p_k = A_k (x + b)^{n-k}$, unter b und den A_k Konstante verstanden[80]), so führt die Substitution $x + b = e^t$ die Gleichung in eine solche mit konstanten Koeffizienten über.

Eine andere allgemeine Klasse linearer Gleichungen, die sich durch elementare Funktionen integrieren lassen, hat *G. H. Halphen* angegeben[81]).

22. Gleichungen mit zweitem Glied. Methode der Variation der Konstanten. Die allgemeine Form der *nicht homogenen* linearen Gleichung (Gleichung „mit zweitem Glied") ist:

$$(85) \qquad P(z) = q(x).$$

Kennt man von ihr ein partikuläres Integral z_0 und setzt $z = z_0 + y$, so kommt man auf $P(y) = 0$ zurück. Also erhält man das allgemeine Integral:

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k,$$

indem man zu z_0 das allgemeine Integral der entsprechenden Gleichung „ohne zweites Glied" addiert[82]). Diese Form des Integrals ist für die vorliegende Klasse charakteristisch; sie entspricht dem Umstand, dass (85) eine Gruppe von Transformationen der Form $\eta_k(x) \frac{\partial f}{\partial y}$ zulässt.

Umgekehrt: kennt man das allgemeine Integral von $P(y) = 0$, so erhält man das von (85) durch Quadraturen, wie *J. Lagrange* aus seiner *Methode der Variation der Konstanten*[83]) abgeleitet hat. Es ist das eine spezielle Form der Methode der Einführung neuer Veränder-

80) *J. Lagrange*, Misc. Taur. 3 (1762/65) [66], p. 190 der 2. Paginierung; Oeuvr. 1, p. 481.

81) Par. C. R. 92 (1881), p. 779.

82) *J. d'Alembert*, Misc. Taur. 3 (1762/65) [66], p. 381 der 2. Paginierung

83) Berl. nouv. mém. 1774 und 1781 (Oeuvr. 4, p. 111; 5, p. 123).

licher. Man benutzt sie zunächst, um aus einer partikulären Lösung $x_i = \omega_i(x \mid a_1, \ldots, a_p)$ eines beliebigen Systems (1), die p willkürliche Konstante $a_1, a_2, \ldots, a_p$ enthält, allgemeinere abzuleiten; zu diesem Zweck führt man an Stelle von p der x_i, z. B. von $x_1, \ldots, x_p$, die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ein, die man erhält, wenn man in p der Gleichungen, die die bekannte partikuläre Lösung definieren, die a_i durch diese neuen Variabeln u_i ersetzt. In dieser Form hat *Lagrange* die Methode benutzt, um die Ordnung von $P(y) = 0$ zu erniedrigen, wenn man p partikuläre Integrale y_k, also die Lösung $y = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$ kennt. Ein anderer Fall der Anwendbarkeit dieser Methode ist: die Gleichungen eines Systems (1) enthalten gewisse Parameter $m_1, m_2, \ldots, m_r$; man kennt das allgemeine Integral für specielle Werte $m_1^0, m_2^0, \ldots, m_r^0$ dieser Parameter; man führt dann als neue unbekannte Funktionen diejenigen ein, die durch die allgemeinen Integralgleichungen dieses speziellen Falls definiert sind, wenn man in ihnen die Integrationskonstanten eben als neue Variable ansieht. Um diese Methode hier anzuwenden, bilde man die Gleichung $P(z) = mq(x)$. Für $m = 0$ kennt man das allgemeine Integral $z = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$; es ist dann auch $z^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Die Substitution

$$z = \sum_{k=1}^{n} u_k y_k, \quad z^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} u_k y_k^{(i)} \tag{86}$$

führt zu dem Gleichungssystem

$$\sum_k y_k \frac{du_k}{dx} = 0, \ldots, \sum y_k^{(n-2)} \frac{du_k}{dx} = 0, \; p_0 \sum y_k^{(n-1)} \frac{du_k}{dx} = mq(x) \tag{87}$$

(in dem man $m = 1$ setzen kann). Dieses System lässt sich im allgemeinen durch n nebeneinanderstehende Quadraturen integrieren, in speziellen Fällen durch eine geringere Anzahl.

Dieses Resultat gilt speziell auch für die binomische Gleichung $d^n z / dx^n = q(x)$; *A. Cauchy*[84]) zeigt, dass es auf die Formel:

$$z = \int_{\alpha}^{x} \varphi(\alpha, x) d\alpha \tag{88}$$

hinauskommt, wenn $\varphi(\alpha, x)$ das den Anfangsbedingungen $y = 0$, $y' = 0, \ldots, y^{(n-2)} = 0$, $y^{(n-1)} = q(\alpha)$ für $x = \alpha$ genügende Integral

84) Oeuvr. (2) 7, p. 40, 198; Par. C. R. 8 (1839), p. 827, 845, 889, 931. Vgl. z. B. *H. Laurent*, Traité d'analyse 5, p. 141.

von $P(y) = 0$ ist. Er giebt auch[85]), als Anwendung seiner Residuentheorie, das allgemeine Integral für den Fall konstanter $p_0, p_1, \ldots, p_n$ in einer expliciten Form, die man übrigens auch direkt erhalten kann.

Da das Integral von $P(z) = mq(x)$ durch das von (85) mit gegeben ist (man braucht nur in diesem z durch z/m zu ersetzen), so kann man an Stelle der Gleichung mit 2. Glied die homogene Gleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$q(x)\frac{dP(z)}{dx} - q'(x)P(z) = 0 \tag{89}$$

setzen, die man durch Elimination von m erhält. Alle n Lösungen von $P(z) = 0$ genügen ihr; man erhält also ihre $(n+1)^{\text{te}}$ Lösung durch eine Quadratur. Durch eine ähnliche Überlegung lassen sich ganz allgemein die beiden angegebenen Formen der Methode der Variation der Konstanten auf einander zurückführen (vgl. auch II A 4 a, Nr. **15**).

Auch durch Anwendung der Methoden von *Lie* kann man diese Resultate wiederfinden[86]).

23. Erniedrigung der Ordnung der Gleichung. Gemeinsame Lösungen zweier linearen Gleichungen. Man kann die Ordnung der Gleichung $P(y) = 0$ auch jedesmal dann erniedrigen, wenn man eine andere lineare Gleichung kennt, die mit ihr Lösungen gemein hat. Es ergiebt sich das aus einer zur Theorie der Division und des grössten gemeinsamen Teilers von Polynomen (I B 1 a, Nr. 12) analogen Theorie[87]). Seien $A(y)$, $B(y)$ zwei Ausdrücke derselben Form wie $P(y)$, der zweite nicht von höherer Ordnung als der erste. Setzt man zur Vereinfachung voraus, dass die ersten Koeffizienten aller dieser Ausdrücke sich auf 1 reduzieren, so kann man durch rationale Operationen zwei analoge Ausdrücke $Q(y)$ und $R(y)$, den zweiten von niedrigerer Ordnung als $B(y)$, so bestimmen, dass identisch:

$$A(y) \equiv Q(B(y)) + \varrho(x) \cdot R(y) \tag{90}$$

wird. Dann ist jede gemeinsame Lösung von $A = 0$ und $B = 0$ auch Lösung von $R = 0$, und umgekehrt. Man erhält so durch ein zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers analoges Verfahren eine lineare Gleichung $C(y) = 0$, deren Lösungen die sämtlichen ge-

---

85) Oeuvr. (2) 6, p. 253, 316 und (2) 7, p. 40. Vgl. die Methode von *Laplace* (II B 4).

86) Vgl. z. B. *Lie-Scheffers*, Differentialgleichungen, Kap. 16.

87) *G. Libri*, J. f. Math. 10 (1833), p. 185; *Brassinne* in einer Note zu *Sturms* Cours.

meinsamen Lösungen von $A = 0$ und $B = 0$ sind. Die Voraussetzung lässt sich also ersetzen durch die, dass $P(y) = 0$ *alle* Lösungen einer linearen Gleichung k^{ter} Ordnung $S(y) = 0$ zulässt und dass folglich eine Identität der Form $P(y) = T(S(y))$ besteht, in der $T(y)$ einen linearen Differentialausdruck $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Man bestimmt $n-k$ linear unabhängige Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}$ von $T(u) = 0$ und hat dann noch die Gleichungen mit zweitem Glied $S(y) = u_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n-k)$ zu integrieren, was die Integration von $S(y) = 0$ und Quadraturen verlangt[88]).

Man kann daraus auch ein zum Descartes'schen Verfahren der Befreiung einer algebraischen Gleichung von mehrfachen Wurzeln (I B 1 b, Nr. **14**) analoges Verfahren ableiten. — Andere Methoden zur Elimination von y aus $A(y) = 0$ und $B(y) = 0$ hat *G. von Escherich*[88a]) gegeben.

24. Gleichung mit gegebenem Fundamentalsystem. Symbolische Methoden. Die lineare Gleichung, die ein gegebenes Fundamentalsystem von Lösungen: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ besitzt, ist:

$$P(y) \equiv \Delta(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

mit der in (78) angegebenen Bedeutung von Δ.[89]) Man erhält daraus Ausdrücke der Verhältnisse $p_i : p_0$ durch die $y_1, \ldots, y_n$ und ihre Ableitungen in Form von Determinantenquotienten, entsprechend den Ausdrücken der Koeffizienten einer algebraischen Gleichung durch ihre Wurzeln (I B 3 b, Nr. **1**). Speziell hat man die Formel von *J. Liouville*[90]):

$$\frac{p_1}{p_0} = -\frac{d \log \Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{dx}. \tag{91}$$

Die Gleichung $P(y) = 0$ lässt sich auch noch auf andere Formen bringen. Für $p_0 = 1$ und $\Delta(y_1, \ldots, y_k) = \Delta_k$ hat man:

$$P(y) \equiv \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_n \Delta_{n-1}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2 \Delta_0} \frac{d}{dx} \frac{y}{\Delta_1}. \tag{92}$$

Nimmt man das Fundamentalsystem in der Form (79), so hat man[91]):

$$P(y) \equiv \frac{d}{dx} v_n^{-1} \frac{d}{dx} v_{n-1}^{-1} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} v_1^{-1} y. \tag{93}$$

88) Vgl. auch *L. W. Thomé*, J. f. Math. 76 (1873), p. 273 und *G. Frobenius*, ib. p. 256; 80 (1875), p. 321 und 85 (1878), p. 185.

88a) Wien. Denkschr. 46 (1882), p. 61 u. 47 (1883), p. 1.

89) *G. Libri*, J. f. Math. 10 (1833), p. 185.

90) J. de math. (1) 3 (1838), p. 349, vgl. *Brassinne* a. a. O.; *E. Christoffel*, J. f. Math. 55 (1858), p. 296. Der Satz findet sich für den Fall einer Gleichung 2. Ordnung schon bei *N. H. Abel*, J. f. Math. 2, p. 22 = Oeuvr. 1, p. 251.

91) *G. Frobenius*, J. f. Math. 76 (1873), p. 256 und 77 (1873), p. 245

Aus diesen Resultaten folgt, wie *G. Floquet*[92]) gezeigt hat, dass man symbolisch schreiben kann:

$$P(y) = A_n A_{n-1} \cdots A_1(y), \tag{94}$$

indem man $AB(y)$ für $A(By)$ setzt. Dabei ist:

$$A_k(y) = \frac{dy}{dx} - a_k y, \quad a_k = \frac{d \log (v_1 v_2 \cdots v_k)}{dx} = \frac{d}{dx} \log \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}. \tag{95}$$

Die Formel (94) entspricht der Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren. Für die Gleichung mit konstanten Koeffizienten (Nr. 21) sind die a_k die Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Den allgemeineren Fall vertauschbarer (I A 6, Nr. 1) A_k führt *Floquet* auf den der konstanten Koeffizienten zurück.

Diese symbolischen Zerlegungen geben neue Methoden[92a]) zur Integration der Gleichungen mit zweitem Glied (Nr. 22). Im Falle konstanter Koeffizienten hat man:

$$\left(\frac{d}{dx} - \omega_n\right)\left(\frac{d}{dx} - \omega_{n-1}\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \omega_1\right) z = q(x) \tag{96}$$

aufzulösen. Setzt man, als Definition:

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1} u = e^{ax} \int e^{-ax} u \, dx, \tag{97}$$

so erhält man:

$$z = \left(\frac{d}{dx} - \omega_1\right)^{-1} \left(\frac{d}{dx} - \omega_2\right)^{-1} \cdots \left(\frac{d}{dx} - \omega_n\right)^{-1} q(x). \tag{98}$$

Man beweist, dass sich die übereinanderstehenden Quadraturen trennen lassen durch eine zur Zerlegung der rationalen Funktionen in Partialbrüche (I B 1 a, Nr. 2; II A 2, Nr. 26) analoge Formel:

$$z = \sum_{k=1}^{n} f'(\omega_k)^{-1} \left(\frac{d}{dx} - \omega_k\right)^{-1} q(x). \tag{99}$$

Wie für rationale Funktionen lässt sich das Resultat auf mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung erweitern.

25. Rationale Differentialfunktionen der Lösungen eines Fundamentalsystems. Invariante Funktionen. Transformation. Auch die Theorie der rationalen Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung (I B 3 b) hat ihr Analogon in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Das allgemeinste Fundamentalsystem $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ der Gleichung (75) lässt sich aus einem speziellen $y_1, \ldots, y_n$ durch die Gleichungen:

92) Ann. éc. norm. (2) 8 (1879), Suppl. (Par. thèse), p. 49. Vgl. auch *E. Grünfeld*, J. f. Math. 98 (1885), p. 333.

92a) Vgl. Fussnote 71.

$$\bar{y}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{100}$$

ableiten, die die *allgemeine homogene lineare Gruppe* Γ (II A 6, Nr. **20**) definieren. Diese Gruppe spielt also hier dieselbe Rolle, wie die Gruppe der Vertauschungen von n Buchstaben für die algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung. Die p_k/p_0 sind als Funktionen der y und ihrer Ableitungen Differentialinvarianten der Gruppe Γ, und jede mit den y und ihren Ableitungen gebildete Differentialinvariante von Γ ist Funktion der p_k/p_0 und ihrer Ableitungen allein; ist sie überdies eine rationale Funktion der y, ihrer Ableitungen und des x, so ist auch ihr Ausdruck in den p_k/p_0, ihren Ableitungen und dem x rational. Jede *relative* Differentialinvariante von Γ ist das Produkt einer rationalen Funktion der p_k/p_0 und ihrer Ableitungen in $e^{-\int p_1/p_0 \, dx}$.[93])

Sei allgemeiner R irgend eine Differentialfunktion, die rational aus $y_1, \ldots, y_n$, ihren Ableitungen und x gebildet ist. Ihre Eigenschaften sind verknüpft mit denjenigen *ihrer Gruppe*[94]), d. h. derjenigen Untergruppe G von Γ, bei der die Form dieser Funktion ungeändert bleibt. Die aus R durch die allgemeine Transformation von Γ abgeleitete Funktion — man nennt sie den allgemeinen Wert von Γ — ist die allgemeine Lösung einer in R und seinen Ableitungen rationalen Differentialgleichung $\Psi(R) = 0$, deren Koeffizienten rationale Funktionen der p_k/p_0, ihrer Ableitungen und des x sind. Man nennt $\Psi(R) = 0$ eine *Transformierte* oder *Resolvente* von $P(y) = 0$; sie ist von der Ordnung $n^2 - r$, wenn r die Zahl der Parameter von G ist.

Sei S eine andere Differentialfunktion, derselben Natur wie R, und H ihre Gruppe. Ist H ganz in G enthalten, so lässt sich R rational in S, den p_k/p_0, ihren Ableitungen und dem x ausdrücken. Allgemein genügt R einer rationalen Differentialgleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von S, den p_k/p_0, ihren Ableitungen und von x sind, und deren Ordnung gleich ist der Differenz zwischen der Parameterzahl von H und der der grössten gemeinsamen Untergruppe von G und H.[94])

Wenn S keine Transformation von Γ ausser der identischen zu-

---

93) Diese Sätze rühren von *P. Appell* her, Ann. éc. norm. (2) 10 (1881), p. 400.

94) *E. Vessiot*, Par. thèse 1892 (Ann. éc. norm. (3) 9, p. 197). — Die Sätze übertragen sich auf einen beliebigen Rationalitätsbereich (Nr. **36**).

lässt, lässt sich jede Funktion R, also auch jedes der Integrale $y_1, \ldots, y_n$ rational durch S, die p_k/p_0, ihre Ableitungen und x ausdrücken. Speziell gilt das für die Funktion $S = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$, in der die u_i unbestimmte Funktionen von x bedeuten; sie genügt einer linearen homogenen Gleichung der Ordnung n^2 (*allgemeine Resolvente*)[95]).

Nimmt man:

$$(101) \quad z = R(y) = u_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + u_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + u_n(x)\,y,$$

unter $u_1, u_2, \ldots, u_n$ rationale Funktionen von x, den p_k/p_0 und ihren Ableitungen verstanden, so erhält man eine *lineare Resolvente* $Q(z)$, die im allgemeinen wie $P(y)$ von n^{ter} Ordnung ist. Die Lösungen von $P(y) = 0$ und $Q(z) = 0$ entsprechen einander durch die Relation $z = R(y)$ und auch durch eine umgekehrte derselben Form $y = S(z)$. Man hat also hier das Analogon zur Tschirnhausen-Transformation (I B 2, Nr. **19**). Zwei lineare Differentialgleichungen $P(y) = 0$ und $Q(z) = 0$ heissen von derselben *Art*[96]), wenn sie in dieser Weise mit einander zusammenhängen.

26. Associierte Gleichungen. Adjungierte Gleichung. Nach den eben erwähnten sind die einfachsten Resolventen diejenigen, denen die Minoren der Determinante $\Delta(y_1, \ldots, y_n)$ genügen. Diese Determinante selbst genügt der Gleichung 1. Ordnung (91). Alle aus denselben m Zeilen von Δ entnommenen Minoren genügen einer und derselben Gleichung und bilden von ihr ein Fundamentalsystem von Lösungen; ersetzt man die m Zeilen durch m andere, so erhält man Gleichungen derselben Art (Nr. **25**). Man kann sich also für jedes m auf die Untersuchung derjenigen Gleichung beschränken, der $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ genügt; sie heisst die $(n-m)^{\text{te}}$ *Associierte* von $P(y) = 0$. Die Lösungen eines Fundamentalsystems von ihr sind (ausser für $m = 1$ und $m = n - 1$) durch homogene ganze Relationen mit konstanten Koeffizienten verbunden. Die Eigenschaften dieser Associierten sind vielfach behandelt worden[97]); sie dienen u. a. zur Untersuchung der Reducibilität der linearen Gleichungen (Nr. **36** und II B 4).

---

95) *E. Picard,* Par. C. R. 96 (1883), p. 1131 und Toul. Ann. 1 (1887), A.

96) *H. Poincaré,* Acta math. 5 (1884), p. 212. Vgl. *L. Schlesinger,* Lineare Diff.-Gl. 2, p. 118.

97) *L. Fuchs,* Berl. Ber. 1888, p. 1115; *A. R. Forsyth,* Lond. Trans. 179 (1888), p. 420; *J. Cels,* Ann. éc. norm. (3) 8 (1891), p. 341; *E. Borel,* ib. 9 (1892), p. 63; *E. Grünfeld,* J. f. Math. 115 (1895), p. 328; *A. Gutzmer,* Hab.-Schr. Halle 1896.

Die $(n-1)^{\text{te}}$ Associierte ersetzt man gewöhnlich durch die (leicht aus ihr abzuleitende) Gleichung, für die ein System von Fundamentallösungen ist:

$$z_k = (-1)^{n+k} \frac{\Delta(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_k)}{\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)}. \tag{102}$$

C. G. J. Jacobi[98]) zeigt, dass sie mit der *Lagrange'schen Adjungierten*[99]) $P'(z) = 0$ identisch ist;

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k(p_{n-k} z)}{dx^k} \tag{103}$$

heisst der zu $P(y)$ adjungierte Ausdruck. Seine Eigenschaften ergeben sich aus der Identität:

$$z P(y) - y P'(z) = \frac{dP(y, z)}{dz}, \tag{104}$$

in der:

$$P(y, z) = \sum_{h,k} (-1)^h y^{(k-h-1)} \frac{d^h(p_{n-k} z)}{dx^h} \tag{105}$$

ist. Die Adjungierte der Adjungierten ist wieder die ursprüngliche Gleichung. Mit Hülfe des Fundamentalsystems (102) lässt sich die Lösung der Gleichung mit 2. Glied $P(y) = q(x)$ in der expliciten Form darstellen:

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k \int q(x) z_k \, dx. \tag{106}$$

Die allgemeine Form der Ausdrücke gerader Ordnung, die mit ihren Adjungierten identisch sind, ist[100]):

$$P(y) = Q' Q(y); \tag{107}$$

die der Ausdrücke ungerader Ordnung, die ihren Adjungierten entgegengesetzt gleich sind[101]):

$$P(y) = Q' \frac{dQ(y)}{dx}. \tag{108}$$

Ist $P(y) = M_1 M_2 \ldots M_k(y)$ und sind M_1', M_2', . . , M_k' bezw. die Adjungierten von M_1, M_2, . . , M_k, so ist $P'(z) = M_k' M_{k-1}' \ldots M_1'(z)$.[102])

98) J. f. Math. 32 (1846), p. 189 (ges. Werke 2, p. 127).

99) Vgl. Nr. 16 und *N. H. Abel*, Oeuvr. 2, p. 47.

100) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 17 (1837), p. 68 (ges. Werke 4, p. 39). Vgl. Fussn. 98. Vgl. *G. Frobenius*, J. f. Math. 85 (1877), p. 192; *G. Darboux*, Théorie des surfaces 2, p. 109. — Die sich selbst adjungierten Gleichungen sind für die Variationsrechnung wichtig (vgl. II A 9).

101) *G. Darboux*, Théorie des surfaces 2, Par. 1889, p. 121.

102) *L. W. Thomé*, J. f. Math. 76 (1873), p. 277; *G. Frobenius*, ib. p. 263; *E. Grünfeld*, ib. 98 (1885), p. 333.

Diese Verhältnisse erlauben eine *geometrische Darstellung*[103]). Man betrachtet die Gleichungen $x_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, unter $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $P(y) = 0$ verstanden, als Gleichungen einer Kurve des $(n-1)$-dimensionalen Raumes in homogenen Koordinaten. Der Übergang von einem Fundamentalsystem zu einem andern kann als Transformation der homogenen Koordinaten gedeutet werden; man kann also sagen, dass die Gleichung $P(y) = 0$, vom projektiven Gesichtspunkt, eine bestimmte *Integralkurve* definiert. Die adjungierte Gleichung giebt diese Kurve dualistisch; die associierten Gleichungen geben sie in den verschiedenen Arten von Tangentialkoordinaten, die es im R_{n-1} giebt. — Auch für andere Fragen ist diese Darstellung nützlich[104]). — Zu beachten ist übrigens, dass die Kenntnis der Integralkurve nur die Verhältnisse der Integrale giebt; zur Bestimmung dieser selbst bedarf es dann noch einer Quadratur.

27. Gleichungen zweiter Ordnung. Die Gleichung 2. Ordnung:

$$P_2(y) \equiv p_0 \frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0 \tag{109}$$

hat spezielle Eigenschaften. Ihre Transformierte in $z = d \log y/dx$ ist eine *Riccati*'sche Gleichung; ist sie integriert, so bedarf es noch der Quadratur $e^{-\int p_1/p_0 \, dx}$. Setzt man in der *Riccati*'schen Gleichung $dz/dx = A + Bz + Cz^2$ umgekehrt $z = -\frac{1}{Cy}\frac{dy}{dx}$, so erhält man für y eine Gleichung $P_2(y) = 0$.[105]) — Diese Sätze lassen sich auf die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung und ihre Transformierte in $d \log y/dx$ übertragen. Vermittelst dieser Transformation hat *J. Liouville* bewiesen, dass die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2h\frac{dz}{dx} + \lambda(x)z = 0 \tag{109a}$$

sich für $\lambda(x) = n(n+1)x^{-2}$ durch elementare Funktionen integrieren lässt, wenn h eine Konstante, n eine ganze Zahl ist[105a]). Auf diesen Integrabilitätsfall lassen sich die meisten bekannten Fälle zurückführen[105b]).

103) *E. Borel,* Ann. éc. norm. (3) 9, 1892.

104) *G. H. Halphen,* Par. sav. [étr.] (2) 28 (1884), p. 115; *S. Lie,* Christ. Förh. 1883, Nr. 12.

105) Vgl. z. B. *G. Darboux,* Théorie des surfaces 1, Par. 1887, p. 23.

105a) J. de math. 6 (1841), p. 1. Vgl. auch *L. Euler,* Misc. Taur. 3 (1762/65), II p. 60.

105b) Vgl. wegen solcher Fälle u. a. *Hargreave,* Lond. Trans. 1848, p. 31, sowie das Buch von *Boole.*

Darüber hinaus hat *Moutard*[106]) alle Gleichungen der Form (109a) aufgestellt, von denen ein Integral eine rationale ganze Funktion des Parameters h ist. Seine Lösung beruht auf der Betrachtung gewisser Folgen von Gleichungen $P_2(z) = 0$ von der Art, dass man, sobald man von einer von ihnen ein partikuläres Integral kennt, alle vorhergehenden successive integrieren kann[106a]). Diese Methode ist verwandt mit der Methode von *Laplace* für lineare *partielle* Differentialgleichungen 2. Ordnung (II A 5, Nr. 59). Zu ihr analog ist eine Methode von *J. Cels*[107]) für die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung, bei der die zu $P(y) = 0$ gehörige Folge dadurch erhalten wird, dass man abwechselnd von jeder Gleichung ihre *Lagrange*'sche Adjungierte und ihre *„Adjungierte der ersten Zeile"* $\left(\text{d. h. die Transformierte in } \Delta\left(\frac{dy_1}{dx}, \cdot\cdot, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) : \Delta(y_1, \cdot\cdot, y_n)\right)$ bildet.

Über das *Verhalten der Integrale linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung im reellen Gebiet*, die Lage ihrer Nullpunkte u. s. w. vgl. man II A 7 a; über *spezielle Klassen solcher Gleichungen und die ihnen genügenden Funktionen* II B 4 und 4 b.

b) Lineare Systeme.

28. Ausdehnung der vorhergehenden Theorieen auf Systeme linearer Gleichungen. Die linearen Systeme[108]), deren allgemeine Form ist:

$$\frac{dx_i}{dx} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \cdot x_k = b_i(x), \tag{110}$$

haben ähnliche Eigenschaften wie die linearen Gleichungen. Betrachten wir zunächst das *homogene* System:

$$\frac{dx_i}{dx} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) x_k = 0. \tag{111}$$

Es besitzt *Fundamentalsysteme*, gebildet aus n Lösungen $x_i = x_{hi}(x)$ $(h, i = 1, 2, \cdot\cdot, n)$, deren Determinante $\Delta = |x_{hi}|$ nicht identisch Null ist. Die allgemeine Lösung ist:

106) Par. C. R. 80 (1875), p. 729.

106a) Vgl. *L. Euler*, Misc. Taur. 3 (1762/65), p. 88.

107) Ann. éc. norm. (3) 8 (1891), p. 341; Par. C. R. 115 (1892), p. 1057; 116 (1893), p. 176.

108) Ihre Untersuchung geht auf *J. d'Alembert* zurück [Fussn. 42]. Vgl. *Natani*, Die höhere Analysis; *L. Königsberger*, Lehrbuch, Kap. III; *L. Sauvage*, Toul. Ann. 8 und 9 (1894/95).

$$x_i = \sum_{h=1}^{n} c_h x_{hi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{112}$$

mit den n willkürlichen Konstanten c_h; diese Form der allgemeinen Lösung ist für die linearen Systeme charakteristisch. Kennt man eine oder mehrere partikuläre Lösungen, so kann man die Ordnung des Systems erniedrigen, z. B. mit der Methode der Variation der Konstanten (Nr. 22). m Lösungen ($m \leqq n$) sind linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildeten Determinanten m^{ter} Ordnung nicht alle identisch Null sind.

Sind die a_{ik} konstant, so giebt es Lösungen der Form $x_i = m_i e^{\omega x}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), in denen ω Wurzel der *charakteristischen Gleichung*:

$$f(\omega) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \omega, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} \tag{113}$$

und die m_i Konstante sind, deren Verhältnisse sich aus Gleichungen 1. Grades berechnen. Hat $f(\omega)$ nur einfache Wurzeln, so ist die Integration damit vollzogen. Der Fall mehrfacher Wurzeln hängt im Grunde von der *Weierstrass*'schen Elementarteilertheorie (1 B 2, Nr. 3) ab[109]). Man kann auch *d'Alembert*'s Multiplikatormethode (Nr. 11) und seine Methode des Grenzübergangs (Nr. 23) benutzen. Die Methode von *Laplace*[110]), der Residuenkalkül von *Cauchy*[111]) geben andere Formen der Lösung. Die Frage steht übrigens zur Frage nach den kanonischen Formen für — sei es endliche, sei es infinitesimale — lineare Transformation in naher Beziehung[112]).

Durch die Benutzung symbolischer Bezeichnungen ist es *Vaschy*[113]) gelungen, den Fall eines nicht aufgelösten Systems von n linearen homogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und n unbekannten Funktionen allgemein zu behandeln. Die Resultate gleichen in ihrer symbolischen Gestalt denjenigen der Theorie der algebraischen Gleichungen ersten Grades.

Das nicht homogene System (110) lässt sich durch Quadraturen

109) *L. Sauvage* a. a. O. und J. de math. (3) 10 (1884), p. 387.

110) Vgl. z. B. *E. Picard*, Traité d'analyse 3, p. 395.

111) *A. Cauchy*, Par. C. R. 8 (1839), p. 827, 845, 889, 931. Vgl. z. B. *H. Laurent*, Traité d'analyse 5, p. 294; eine andere Darstellung bei *J. Collet*. Grenoble Ann. 6 (1894), p. 309.

112) *Lie-Engel* 1, p. 585.

113) Par. C. R. 116 (1893), p. 491; vgl. *C. Jordan*, Cours d'analyse 3.

integrieren, sobald das entsprechende homogene System (111) integriert ist[113a]). Man beweist das durch die Methode der Variation der Konstanten (Nr. **22**), durch die Methode von *Cauchy* (II B 4) oder durch Anwendung des adjungierten Systems (Nr. **11**).

Man kann diese Resultate auch an die *Lie*'sche Theorie (Nr. **13**) anknüpfen; das System (110) gestattet eine Gruppe der Form:

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{114}$$

das System (111) ausserdem noch $Xf = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. (Vgl. Nr. **29**.)

Man kann das lineare System bilden, das n gegebene n-tupel von Funktionen von x, $x_i = x_{ki}(x)$ $(k, i = 1, 2, \ldots, n)$ zu einem System von Fundamentallösungen hat; es lautet:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_k}{dx} & \frac{dx_{1k}}{dx} & \cdots & \frac{dx_{nk}}{dx} \\ x_1 & x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_n & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{115}$$

Hieraus sind die Ausdrücke der a_{ki} durch die x_{ki} und ihre Ableitungen zu entnehmen. Es sind Invarianten der linearen homogenen Gruppe der Ordnung n^2:

$$\bar{x}_{kj} = \sum_{h=1}^{n} c_{kh} x_{hj} \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, n),$$

die hier die Rolle der Gruppe Γ von Nr. **22** spielt. Alle Theorieen von Nr. **22** übertragen sich fast ohne Modifikation[114]). Unter den transformierten Systemen tritt das *adjungierte System von Jacobi* (Nr. **11**) auf:

$$\frac{dz_i}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{ki} z_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{116}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von ihm ist gegeben durch:

$$z_i = z_{hi} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x_{hi}} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n). \tag{117}$$

Der *Liouville*'schen Formel (91) entspricht hier[114a]):

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{118}$$

113a) Vgl. u. a. *L. Königsberger*, Lehrbuch, p. 122.

114) *E. Vessiot*, Toul. Ann. 8 (1894), H p. 29.

114a) *C. G. J. Jacobi*, Werke 4, p. 403.

c) Lie'sche Systeme und Verallgemeinerungen.

29. Lie'sche Systeme. Ihre verschiedenen Definitionen. Ihre Integrationstheorie. Die linearen Systeme sind ein spezieller Fall der *Lie'schen Systeme*[115]), deren allgemeine Form ist:

$$(119) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t)\, \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei bilden die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(120) \qquad \mathsf{X}_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

eine „dem System (119) associierte" Gruppe G. Die äquivalente partielle Differentialgleichung (Nr. **1**) ist:

$$(121) \qquad Af \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t)\, \mathsf{X}_k f = 0.$$

Das System (119) wird linear, wenn G in der allgemeinen linearen Gruppe, linear und homogen, wenn G in der homogenen linearen Gruppe enthalten ist; es reduziert sich auf eine *Riccati*'sche Gleichung (Nr. 8), wenn G die projektive Gruppe in einer Variabeln ist; auf eines der Systeme $\Phi_k = 0$ (Nr. **11**), zu denen die Anwendung der *d'Alembert*'schen Multiplikatorenmethode auf Systeme linearer Gleichungen führt, wenn G die projektive Gruppe in $n - 1$ Variabeln ist. In ihrer allgemeinen Form treten solche Systeme als Hülfssysteme in der *Lie*'schen Theorie der Integration der Systeme mit bekannter Gruppe (Nr. **13**) auf.

Sind die $\theta_k(t)$ konstant, so definieren die Gleichungen (119) die endlichen Gleichungen einer Transformation von G in kanonischer Form. *Lie* zeigt[116]), dass die Bestimmung dieser kanonischen Gleichungen, wenn man die endlichen Gleichungen von G in irgend einer Form kennt, höchstens Quadraturen verlangt. Es ist das die Verallgemeinerung des Satzes über lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten; ein spezieller Fall davon ist auch die Integrabilität der Jacobi'schen Gleichung (Nr. 8).

Lie hat auch[116]) die Bedeutung dieser Gleichungen für seine Integrationstheorie hervorgehoben und Andeutungen über die Benutzung der Kenntnis von ersten Integralen, oder partikulären Integralen, oder Relationen zwischen solchen gegeben.

115) Math. Ann. 25 (1885), p. 124.

116) Vgl. z. B. *Lie-Engel* 3, p. 624.

Wieder aufgetreten sind solche Systeme als die *allgemeinsten Systeme mit Fundamentallösungen*, d. h. solche, deren allgemeines Integral sich in der Form schreiben lässt:

$$(122)\quad x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n};\ x_{21}, \ldots, x_{2n};\ \ldots;\ x_{p1}, \ldots, x_{pn} \mid e_1, e_2, \ldots, e_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

in der $x_{11}, \ldots, x_{1n};\ x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ p beliebige (nur Ungleichungen unterworfene) Lösungen bedeuten, die das bilden, was man ein Fundamentalsystem nennt; in der ferner $e_1, \ldots, e_n$ die Integrationskonstanten sind und die Funktionen Φ *das t nicht explicite enthalten* und von der Auswahl des Fundamentalsystems nicht abhängen. Für $n = 1$ sind diese Systeme [117]) unter der Voraussetzung algebraischer Φ von *L. Königsberger* [118]), ohne diese Einschränkung von *E. Vessiot* [119]) bestimmt worden; den allgemeinen Fall behandeln *A. Guldberg* [120]), *E. Vessiot* [121]) und *S. Lie* [122]); letzterer hat das definitive Resultat gegeben und bewiesen.

Auch *G. Bohlmann* [123]) hat die Lie'schen Systeme wiedergefunden bei der Frage nach den *Klassen von Systemen, die Integrationsmethoden zulassen*, d. h. Systemen der Form:

$$(123)\quad \frac{dx_i}{dt} = H_i(x_1, \ldots, x_n \mid \theta_1(t), \ldots, \theta_r(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(in der die θ_k unbestimmte, die H_i aber bestimmte Funktionen ihrer Argumente bedeuten) und mit allgemeinem Integral der Form:

$$(124)\quad \Omega_i(x_1, \ldots, x_n, t \mid u_1(t), \ldots, u_r(t)) = e_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in der die Natur der Funktionen Ω nur von der der H abhängt, während die u_i analytisch bestimmt sind, sobald man den θ spezielle Formen beilegt (z. B. durch Differentialgleichungen, deren Koeffizienten aus den θ_k und ihren Ableitungen gebildet sind).

Endlich ist noch eine charakteristische Eigenschaft der Systeme (119), dass man ihr allgemeines Integral auf eine solche Form bringen kann, dass *die Integrationskonstanten in ihm ebenso auftreten, wie die*

117) Für diesen Fall hatte schon *Ed. Weyr* einige Resultate gegeben. Vgl. Prag. Abh. (6) 8 (1875/76).

118) Acta math. 3 (1883), p. 1.

119) Ann. éc. norm. (3) 10 (1893), p. 53.

120) Par. C. R. 116 (1893), p. 964; J. f. Math. 115 (1895), p. 111.

121) Par. C. R. 116 (1893), p. 1112.

122) ib. p. 1233; Leipz. Ber. 45 (1893), p. 341; 48 (1896), p. 394. Vgl. auch *Lie-Scheffers*, Transformationsgruppen, Kap. 24.

123) J. f. Math. 43 (1894), p. 207; 115 (1895), p. 89.

Variabeln in den endlichen Gleichungen der Gruppe G. D. h. sind diese endlichen Gleichungen:

$$(125) \qquad x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so hat das allgemeine Integral von (119) die Form:

$$(126) \qquad x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_1(t), \ldots, a_r(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $x_1^0, \ldots, x_n^0$ die willkürlichen Konstanten sind und die $a_k(t)$ definiert sind durch das *Lie*'sche Hülfssystem:

$$(127) \qquad \frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\, \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

für das die zugehörige Gruppe die erste Parametergruppe (II A 6, Nr. **14**) von G ist. Aus dieser Bemerkung, die man als Anwendung der Methode der Variation der Konstanten ansehen kann, hat *E. Vessiot*[124]) eine Theorie der Integration der Lie'schen Systeme abgeleitet, unter der Voraussetzung, dass die endlichen Gleichungen von G bekannt seien: Zwei Lie'sche Systeme sind äquivalent, d. h. die Integration des einen zieht die des andern nach sich, wenn die zugehörigen Gruppen holoedrisch isomorph und die Funktionen $\theta_k(t)$ in beiden Systemen dieselben sind. Die Integration des Systems (119) geschieht mit Hülfe von der des *adjungierten linearen Systems*:

$$(128) \qquad \frac{de_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) \sum_{i=1}^{r} c_{iks}\, e_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

für das die zugehörige Gruppe die *adjungierte Gruppe* (II A 6, Nr. **15**) von G ist. Nach dieser Hülfsintegration hat man höchstens eventuell noch Quadraturen auszuführen, nämlich wenn G ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält. Ist G nicht einfach, so kann man die Integration von (119) auch durch die einer Folge *Lie*'scher Systeme mit einfacher Gruppe ersetzen.

Die Sätze von Nr. **25** über lineare Systeme lassen sich auf alle *Lie*'schen Systeme übertragen.

Setzt man die endlichen Gleichungen von G nicht als bekannt voraus, so enthält die Integration von (119) als speziellen Fall die Bestimmung dieser endlichen Gleichungen — ein Problem, für das *Lie*[125]) wesentliche Resultate gegeben hatte. *E. Vessiot*[126]) führt den allgemeinen Fall auf die in Nr. **13** dargestellte *Lie*'sche Theorie

---

124) Toul. Ann. 8 (1894), H.

125) Vgl. z. B. *Lie-Engel* 3, p. 518, 798 u. s. w.

126) Toul. Ann. 10 (1896), G.

zurück, indem er zuerst die Gruppe der infinitesimalen Transformationen der Form $\sum \vartheta_k(t) X_k f$ bestimmt, die das System (119) invariant lassen (vgl. Nr. **28**). Man schliesst daraus speziell, dass die Integration von (119) sich immer auf die von linearen Hülfssystemen zurückführen lässt, wenn G transitiv (II A 6, Nr. **11**) ist; und auch wenn G intransitiv ist, sobald man ihre Invarianten berechnet hat.

30. Allgemeinste Systeme mit Fundamentallösungen. Gleichungen höherer Ordnung mit Fundamentalsystemen erster Integrale. Verallgemeinerung der Lie'schen Systeme. Man kann den Begriff der *„Differentialsysteme mit Fundamentallösungen"* erweitern, indem man zulässt, dass die unabhängige Variable explicite im Ausdruck der allgemeinen Lösung durch partikuläre Lösungen auftritt. Aber man muss dann, ausser für $n = 1$, eine Zusatzhypothese einführen. Ein System:

$$(129) \qquad \frac{dx_i}{dt} = H_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist ein System mit Fundamentallösungen, wenn man Relationen der Form:

$$(130) \quad x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{p1}, \ldots, x_{pn}; t \mid c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kennt, die das allgemeine Integral geben, sobald man in ihnen $x_{11}, \ldots x_{1n}; \ldots; x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ durch p Partikularlösungen ersetzt, und die so beschaffen sind, dass die Gleichungen:

$$(131) \quad \bar{x}_{kj} = \Phi_j(x_{11}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{p1}, \ldots, x_{pn}; t \mid a_{k1}, \ldots, a_{kn})$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Gruppe definieren, deren Parametergleichungen von t unabhängig sind. Unter diese Definition fallen alle Transformierten der linearen Gleichungen[127]) und der Lie'schen Systeme. Solche Systeme lassen sich immer vermittelst *Lie*'scher Hülfssysteme integrieren[128]).

In anderer Weise verallgemeinert *A. Guldberg*[129]) die Lie'schen Systeme, indem er Systeme von Gleichungen höherer Ordnung sucht, die Fundamentalsysteme erster Integrale zulassen. Es sind das Systeme:

$$(132) \qquad \frac{d^p x_i}{dt^p} = H_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{p-1}x_n}{dt^{p-1}}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

deren allgemeines Integral sich auf die Form bringen lässt:

---

127) *Vessiot*, Thèse p. 31.

128) *Vessiot*, Toul. Ann. 8, H p. 30; vgl. einen Satz von *T. Levi-Cività*, Lomb. Rend. 1895.

129) Par. C. R. 117 (1893), p. 215.

$$(133)\qquad \frac{d^{p-1}x_i}{dt^{p-1}} = \Phi_i(\psi_{11},\ldots,\psi_{1n};\ldots;\psi_{s1},..,\psi_{sn}\,|\,c_1,..,c_n),\quad (i=1,2,..,n)$$

während die Gleichungen:

$$(134)\qquad \frac{d^{p-1}x_i}{dt^{p-1}} = \psi_{ki}\left(t, x_1, .., x_n, \frac{dx_1}{dt}, .., \frac{d^{p-2}x_n}{dt^{p-2}}\right)$$
$$(i=1,2,..,n;\ k=1,2,..,s)$$

s partikuläre erste Integrale darstellen. Die Bestimmung und Integration solcher Systeme knüpft sich ebenfalls an die Theorie der Transformationsgruppen.

Eine dritte Verallgemeinerung der *Lie*'schen Systeme liefern die unendlichen Gruppen; nämlich Systeme der Form[130]):

$$(135)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1,..,x_n\,|\,t)\qquad (i=1,2,..,n),$$

wo die Familie vom Parameter t abhängender infinitesimaler Transformationen:

$$(136)\qquad X_t f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1,..,x_n\,|\,t)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ganz in einer (von der Gruppe aller Punkttransformationen verschiedenen) unendlichen Gruppe G enthalten sind. Zu dieser Klasse gehören u. a. die kanonischen Systeme der Mechanik (Nr. **12**). Auch hier treten die willkürlichen Konstanten im allgemeinen Integral ebenso auf, wie die Variabeln in den endlichen Gleichungen der Gruppe G. — Man kann auch sagen: die äquivalente Gleichung:

$$(137)\qquad Lf = \frac{\partial f}{\partial t} + X_t f = 0$$

hat n Lösungen, die den Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen von G genügen (vgl. Nr. **14**).

31. Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen. Anwendungen. Von noch allgemeinerem Gesichtspunkt aus ist ein System mit Fundamentallösungen jedes System Σ_G partieller Differentialgleichungen:

$$(138)\qquad F_k\left(x_1,..,x_m, z_1,..,z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, .., \frac{\partial z_n}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0,$$

dessen allgemeine Lösung aus einer partikulären durch die allgemeine Transformation $z_i = \varphi_i(z_1^0,..,z_n^0)$ einer (endlichen oder unendlichen)

130) *E. Vessiot*, Par. C. R. 125 (1897), p. 1019.

Gruppe G hervorgeht[131]). Die Systeme der Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen von G sind ein spezieller Fall davon. Allgemein ist ein System Σ_G nichts anderes als ein System, das die Gruppe G zulässt und dessen Lösungen durch G transitiv vertauscht werden. Die Bildung aller solchen Systeme hängt also ab von der Bestimmung der Typen von Gruppen G und der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten; sie werden, von gewissen Ausnahmssystemen abgesehen, erhalten, indem man ein System passend gewählter Differentialinvarianten gleich gegebenen Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$ setzt.

Ist die Gruppe G *endlich*, so fällt die Integration von Σ_G unter die bereits behandelten Probleme. Ist die Gruppe G *unendlich* und *nicht einfach*, so lässt sich die Integration von Σ_G zurückführen auf die einer Folge von Systemen derselben Art, die einfachen Gruppen entsprechen; diese einfachen Gruppen ergeben sich auch hier aus der *normalen Zerlegung* von G in eine Folge von Gruppen, deren jede ausgezeichnete Maximaluntergruppe der vorhergehenden ist (II A 6, Nr. 6; 17). Anzahl und Struktur derselben sind bis auf die Reihenfolge von der angewandten Zerlegung unabhängig[132]). Ist G *unendlich* und *einfach*, so sucht man die Anzahl der unbekannten Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ auf ein Minimum zu reduzieren; man kommt so zu Systemen Σ_G, die man als nicht mehr weiter reduzierbar und als die der Struktur von G entsprechenden kanonischen Systeme ansehen darf[133]).

Die Systeme Σ_G sind uns bereits in Nr. 14 begegnet. *Lie*[131]) hat ferner das folgende allgemeine Problem auf die Integration solcher Systeme zurückgeführt: *Wenn man die Definitionsgleichungen einer Gruppe G und die allgemeine Form seiner infinitesimalen Transformationen kennt, die Gleichung $Xf = 0$ zu integrieren, wenn Xf irgend eine infinitesimale Transformation von G ist.* Dieses Problem umfasst als spezielle Fälle die allgemeine Theorie der *Lie*'schen Systeme (Nr. 29), die *Lie*'sche Theorie von Nr. 13, die Systeme vom Schluss von Nr. 27 und die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung (II A 5, IV). Auch die Theorie des Jacobi'schen Multiplikators (Nr. 12) kann man ihm unterordnen: die Kenntnis eines Multiplikators M des Systems (45) giebt die äquivalente Gleichung:

$$(139) \qquad Xf - M \sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

in der Xf eine infinitesimale Transformation der Gruppe von Punkt-

131) *S. Lie*, Leipz. Ber. 1895, p. 261 und *J. Drach*, Par. thèse 1898, p. 90.
132) *J. Drach*, Par. thèse 1898, p. 104.
133) Über diesen letzten Punkt spricht sich *Lie* sehr unbestimmt aus.

transformationen ist, die die Volumina ungeändert lässt. So konnte *Lie* beweisen, dass die Theorie des letzten Multiplikators die *ganze* Vereinfachung giebt, die aus der Kenntnis eines Multiplikators M für die Integration des Systems resultiert. Er hat auch von demselben Gesichtspunkt aus die Integration eines Systems n^{ter} Ordnung wieder vorgenommen, von dem man einen Multiplikator und eine infinitesimale Transformation kennt[134]): entweder man leitet daraus ein oder mehrere erste Integrale ab; oder man vollendet die Integration durch 2 Quadraturen, nachdem man $n-2$ erste Integrale bestimmt hat; oder man erhält das letzte Integral ohne Quadratur, nachdem man $n-1$ erste Integrale bestimmt hat.

32. Verschiedene Klassen von Gleichungen. Die vorhergehenden Klassen von Differentialsystemen sind alle erhalten worden, indem man die eine oder die andere der beiden folgenden Haupteigenschaften der linearen Gleichungen zu verallgemeinern suchte: 1) sie besitzen Fundamentalsysteme von Lösungen, d. h. ihre Lösungen sind in gewissem Sinne nicht von einander unabhängige Transcendente; 2) man weiss, in welcher Art die willkürlichen Konstanten im allgemeinen Integral enthalten sind.

Die nähere Betrachtung dieser zweiten Eigenschaft hat noch zur Untersuchung anderer Gleichungsklassen geführt: z. B. Gleichung 2. Ordnung, deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Funktion der beiden Integrationskonstanten ist[135]) und die Gleichungen höherer Ordnung mit allgemeinem Integral der Form:

$$\frac{\sum a_k u_k(x)}{\sum b_k v_k(x)}, \tag{140}$$

in der die Konstanten a_k, b_k durch eine geeignete Anzahl homogener Relationen verbunden sind[136]). *P. Painlevé*[137]) zeigt, dass jedes System (1), dessen allgemeine Lösung *rational* von willkürlichen Konstanten abhängt, sich durch lineare Hülfssysteme integrieren lässt; er untersucht auch allgemeiner die Systeme (1), deren allgemeine Lösung von den Konstanten algebraisch abhängt (II B 5).

Man hat auch die der *Jacobi*'schen Gleichung (Nr. 8) eigentüm-

---

134) Math. Ann. 11 (1877), p. 508; Norw. Arch. 9 (1884), p. 441.

135) *Hazzidakis,* J. f. Math. 90 (1881), p. 174; *E. Vessiot,* Toul. Ann. 9 (1895), F.

136) *P. Appell,* Par. C. R. 12. und 19./11. 1888; 24./3. 1890; J. de math. (4) 5 (1889), p. 361; *P. Rivereau,* Par. thèse 1890.

137) Par. C. R. 116 (1893), p. 173 und leçons de Stockholm, p. 392.

liche Form des allgemeinen Integrals zu verallgemeinern gesucht, z. B. Gleichungen behandelt, deren allgemeines Integral die Form hat [138]):

$$M(x) \prod_{i=1}^{q} [x_i - \theta_i(t)]^{m_i} = \text{Const.} \tag{141}$$

Andere Klassen kommen im folgenden zur Sprache.

Äquivalenzprobleme.

33. Formulierung des Problems. Einführung der Differentialinvarianten. Allgemeine Methoden. Sei eine Klasse C von Differentialsystemen n^{ter} Ordnung (1) definiert durch die allgemeine Form ihrer Systeme, indem die rechten Seiten des allgemeinen Systems der Klasse in bestimmter Weise von einer gewissen Anzahl willkürlicher Elemente (Funktionen oder Parameter) abhängen. Es gebe ferner eine (endliche oder unendliche) Transformationsgruppe G von der Art, dass jede ihrer Transformationen jedes System von C in ein System derselben Klasse transformiert, doch ohne dass jedes System von C in jedes andere durch eine Transformation von G übergeführt werden könnte. Zwei Systeme von C heissen dann (gegenüber G) *äquivalent*, wenn es mindestens eine Transformation von G giebt, die das eine in das andere überführt; das *Aquivalenzproblem* verlangt die Aufsuchung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zwei Systeme von C äquivalent sind [139]). Die Lösung dieses Problems hängt ab von der Bestimmung der *Differentialinvarianten der Klasse C* gegenüber der Gruppe G: jeder Transformation von G entspricht eine Transformation der willkürlichen Elemente, von denen das allgemeine System der Klasse abhängt; diese Transformationen bilden eine zu G isomorphe Gruppe γ, und um die Differentialinvarianten dieser Gruppe γ handelt es sich [140]). Sie lassen sich alle durch Differentiationen vermittelst gewisser *Differentialparameter* aus

138) *Minding*, Petersb. Mém. (7) 5 (1862), p. 1; *Elliot*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 101; *Kojalowitsch*, Diss. Petersbg. 1894; *Sonin*, Petersb. Bull. 1895; *Korkin*, Math. Ann. 48 (1897), p. 317 und Par. C. R. 122, 123 (1896); *P. Painlevé*, ib. und leçons de Stockholm. Vgl. auch *E. Haentzschel*, J. f. Math. 112 (1893), p. 148; *W. Heymann*, ib. 113 (1894), p. 84.

139) Die Einführung der „*erweiterten Gruppe*“ (II A 6, Nr. **13**) zeigt, dass man nur mit einem speziellen Fall des allgemeinen Problems der Äquivalenz zweier Mannigfaltigkeiten gegenüber einer Gruppe zu thun hat. Vgl. *S. Lie*, Christ. Förh. 1883, 1884; *Lie-Scheffers*, Kontinuierliche Gruppen, Kap. 23, § 4.

140) Über den Begriff der Differentialinvariante und seine Geschichte vgl. man I B 2, Nr. **20**. — Der allgemeine Begriff gehört *S. Lie* an, Math. Ann. 24 (1884), p 537.

einer endlichen Anzahl von *Fundamentalinvarianten* ableiten; die Aquivalenz zweier allgemeinen Systeme der Klasse drückt sich aus, indem man eine endliche Anzahl von Invarianten des einen Systems den entsprechenden Invarianten des andern Systems gleichsetzt[141]). Diese allgemeinen Äquivalenzkriterien können illusorisch werden für gewisse singuläre Kategorieen von Systemen der Klasse, die durch (invariante) Relationen zwischen den willkürlichen Elementen definiert sind. Für jede dieser Kategorieen ist das Problem nach denselben Prinzipien zu behandeln, indem man es nur, wegen jener Relationen, mit einer geringeren Anzahl willkürlicher Elemente zu thun hat.

Die Differentialinvarianten der Klasse C lassen sich als Differentialinvarianten der Gruppe γ nach den allgemeinen Methoden von *Lie* bestimmen: d. h. durch algebraische Operationen, wenn man die endlichen Gleichungen von G oder wenigstens die Definitionsgleichungen ihrer endlichen Transformationen; durch Integration vollständiger Systeme, wenn man nur die infinitesimalen Transformationen von G benutzt. Eine andere allgemeine Methode besteht in der Reduktion der Anzahl der willkürlichen Elemente, indem man über die in der allgemeinen Transformation von G enthaltenen Unbestimmten so verfügt, dass einige (passend gewählte) von jenen feste Werte erhalten; die in der so gewonnenen *reduzierten* oder *kanonischen* Form des allgemeinen Systems noch übrig bleibenden willkürlichen Elemente bilden ein System von Fundamentalinvarianten der Klasse[141]).

Diese für die Diskussion der Äquivalenzbedingungen sehr bequeme Methode hat den Nachteil, dass sie die Invarianten in komplizierter, gewöhnlich irrationaler oder selbst transcendenter Form liefert. Man sucht deshalb zugleich Systeme rationaler Invarianten (wenn es solche giebt), indem man die andern Methoden oder für jeden Fall geeignete spezielle Prozesse anwendet. Die *„absoluten"* Invarianten, von denen bisher allein die Rede war, erscheinen dabei im allgemeinen als Quotienten von Potenzen *„relativer"* Invarianten, d. h. solcher, die sich bei der allgemeinen Transformation von G multipliziert mit einem Faktor reproduzieren, der nur von den willkürlichen Elementen dieser Transformation abhängt.

Für die Integration sind diese Äquivalenzsätze insofern nützlich, als sie zu jedem speziellen System der Klasse C, das man integriert hat, eine Kategorie ebenfalls integrabler Systeme liefern, nämlich die mit ihm äquivalenten.

---

141) Dass eine *endliche* Anzahl Fundamentalinvarianten stets ausreicht beweist *A. Tresse,* Par. thèse 1893, p. 42 (Acta math. 18 (1894), p. 1).

34. Invarianten der linearen Gleichungen. Das älteste Beispiel zu der vorhergehenden Theorie bilden die *linearen* Gleichungen:

$$(142)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n}{1} p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p_2(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n(x) y = 0.$$

Man erhält damit eine neue Analogie mit der Theorie der algebraischen Gleichungen (Invariantentheorie der binären Formen, II B 2). Die willkürlichen Elemente sind hier die Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$; die Gruppe G ist die unendliche Gruppe:

$$(143)\qquad \bar{y} = y \cdot \eta(x), \quad \bar{x} = \xi(x), \quad (\xi, \eta \text{ willkürlich}).$$

Man muss $n \geqq 3$ voraussetzen, denn für $n = 1$ und $n = 2$ sind zwei Gleichungen (142) immer äquivalent gegenüber dieser Gruppe. Sie ist die umfassendste Gruppe von Punkt- (und auch von Berührungs-) Transformationen in x, y, die die Klasse von Gleichungen (142) invariant lässt[142]).

Die von *E. Laguerre*[143]) eingeführten relativen Invarianten reproduzieren sich multipliziert mit einer Potenz von $d\bar{x}/dx$, deren Exponent der *Index* der Invariante heisst. *Fr. Brioschi* legte den Grund zu ihrer Bestimmung[144]). *G. H. Halphen*[145]) nahm ihre allgemeine Untersuchung wieder auf, indem er sie mit den schon vorher von ihm untersuchten projektiven Differentialinvarianten der ebenen und Raumkurven in Verbindung setzte. Zwei gegenüber der Gruppe (143) äquivalente Gleichungen (142) haben nämlich dieselbe Integralkurve (Nr. **26**), und diese ist nur bis auf eine projektive Transformation definiert; die projektiv-invarianten Eigenschaften der Integralkurve drücken sich also aus durch gegenüber der Gruppe (143) invariante Eigenschaften der Differentialgleichung. *Halphen* gab eine Methode zur Bildung von Invarianten vermittelst einer Beziehung zwischen den Gleichungen 2er und n^{ter} Ordnung; den Begriff des *Gewichts* und seine Beziehung zum Index; die allgemeine Form der Invariante vom Gewicht 3, θ_3; und später[146]) die allgemeine Form der Invarianten für $n = 4$. Für die Anwendungen auf die Integration gebraucht *Halphen* eine reduzierte Form mit $p_1 = 0$, $\theta_3 = 1$; er untersucht die Integration derjenigen Gleichungen, die sich durch Transformationen (143) auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten oder auf solche zurück-

142) *Lie,* Christ. Förh. 1881.
143) Par. C. R. 88 (1879), p. 116 und p. 224. Vgl. auch *Cockle,* Quart. J. 1876.
144) Bull. soc. math. 7 (1879), p. 105.
145) Par. sav. [étr.] (2) 28 (1884), p. 1.
146) Acta math. 3 (1883), p. 325.

führen lassen, deren allgemeines Integral eine (durch rationale oder elliptische Funktionen ausdrückbare) eindeutige Funktion ist.

A. R. Forsyth[147]) wendet eine andere (schon von *Cockle* für $n = 3$, von *Laguerre* für den allgemeinen Fall benutzte) Normalform an; sie ist durch $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ definiert und wird durch Integration einer Hülfsgleichung 2. Ordnung und eine Quadratur erhalten. Für diese reduzierte Form erhält man den expliciten Ausdruck von $n - 2$ Invarianten $\theta_3, \theta_4, \ldots, \theta_n$, von durch den Index angegebenem Gewicht, die in den p_k und ihren Ableitungen linear sind; dieser Ausdruck ist von n unabhängig. Sie sind $\equiv 0$, wenn das allgemeine Integral von (142) die allgemeine binäre Form n^{ten} Grades von zwei unabhängigen Lösungen einer Gleichung 2. Ordnung ist; (142) lässt sich dann vermittelst *einer* Hülfsgleichung 2. Ordnung integrieren. *Forsyth* giebt geregelte Verfahren, um aus diesen Invarianten durch Differentiationen alle andern abzuleiten. Die Invarianten $\theta_3, \ldots, \theta_n$ sind rational und ganz in den Koeffizienten von (142); sie bestehen im allgemeinen Fall aus einem von *Fr. Brioschi*[148]) bestimmten linearen Teil und einem Teil, dessen sämtliche Glieder p_2 oder eine seiner Ableitungen zum Faktor haben.

Die Gleichungen (142), die Transformationen der Form (143) gestatten, bilden eine spezielle Kategorie. Sie sind von *P. Appell*[149]) behandelt worden; ihre Bestimmung ergiebt sich auch aus den allgemeinen Sätzen von *Lie* (Nr. 18). Man kann sie auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen[150]).

35. Invarianten verschiedener Klassen von Gleichungen. *R. Liouville*[151]) hat die Klasse von Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3 \tag{144}$$

(c_0, c_1, c_2, c_3 willkürliche Funktionen von x) gegenüber der Gruppe:

$$\bar{x} = \xi(x), \quad \bar{y} = y \cdot \eta(x) + \zeta(x) \tag{145}$$

untersucht und das Bildungsgesetz einer Reihe rationaler ganzer relativer Invarianten gegeben. *P. Appell*[152]) hat diese Untersuchung mit Hülfe der reduzierten Form $dY/dX = Y^3 + \Im(X)$ wieder auf-

147) Lond. Trans. 179 (1888), p. 377.

148) Acta math. 14 (1890/91), p. 233.

149) Acta math. 15 (1891), p. 281.

150) Über die Anwendung der Invarianten linearer Gleichungen vgl. man auch noch *L. Berzolari*, Ann. di mat. (2) 25 (1897).

151) Par. C. R. 6./9. 1886 und 12./9. 1887; Amer. J. 10 (1888), p 283.

152) J. de math. (4) 5 (1889), p. 361.

genommen, in der X und $\mathfrak{Z}$ absolute, aber irrationale Invarianten sind. Für alle unter einander äquivalenten Gleichungen der Klasse gilt eine und dieselbe Gleichung $F(\mathfrak{Z}, d\mathfrak{Z}/dx) = 0$, die sich mit Hülfe der Invarianten von *R. Liouville* in rationale Form bringen lässt. Beide Autoren geben verschiedene Integrabilitätsfälle: Reducibilität auf konstante Koeffizienten und auf spezielle Gleichungen, die sich durch Quadraturen oder eine *Riccati*'sche Gleichung lösen lassen. *Elliot*[153]) untersucht den *singulären* Fall, dass das Polynom $c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$ eine Doppelwurzel y hat; er führt auf die Gleichung $y\,dy = dx + yX(x)$ (Nr. **5**).

P. Appell[152]) untersucht allgemeiner, gegenüber derselben Gruppe (145), die Klasse von Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_n(y)}{Q_p(y)} = \frac{a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \cdots + b_p y^p} \tag{146}$$

(die a_k, b_k willkürliche Funktionen von x; $p \leq n - 2$); er benutzt die durch $a_{n-1} = a_{p+1} = 0$, $a_n = b_p = 1$ definierte reduzierte Form. Für $p = n - 2$ ist eine andere reduzierte Form erforderlich. *Appell* wendet diese Resultate hauptsächlich auf Gleichungen an, die auf solche mit konstanten Koeffizienten reduzierbar sind.

P. Painlevé[154]) untersucht die Klasse von Gleichungen (146) gegenüber der Gruppe:

$$\bar{x} = \xi(x), \quad \bar{y} = \frac{y\eta(x) + \zeta(x)}{y\theta(x) + \omega(x)} \tag{147}$$

(ξ, η, ζ, θ, ω willkürlich) — ein von dem vorigen nicht wesentlich verschiedenes Problem. Er benutzt zuerst eine der Appell'schen analoge kanonische Form zur Bestimmung von Gleichungen der Klasse, die Untergruppen von (147) zulassen; diese Gleichungen, die Riccati'sche ausgenommen, lassen sich durch Quadraturen integrieren. Da diese kanonische Form den Nachteil hat, dass es unendlich viele äquivalente reduzierte Formen giebt, so giebt *Painlevé* die Mittel zur Bildung von andern, die diesen Nachteil nicht haben; dadurch wird die Lösung des Äquivalenzproblems erleichtert. — Diese Theorie lässt sich, wie *Painlevé* angiebt, auf die in y und dy/dx rationalen Gleichungen 1. Ordnung mit unbestimmten von x abhängenden Koeffizienten ausdehnen.

P. Appell[155]) und *P. Rivereau*[156]) untersuchen die in y und seinen

153) Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 101.

154) Par. C. R. 110 (1890), p. 840; Mém. sur les équ. diff. du 1er ordre, Paris 1890 (Ann. éc. norm. 1892).

155) J. de math. (4) 5 (1889), p. 361.

156) Par. thèse 1890.

Ableitungen rationalen ganzen homogenen Gleichungen höherer Ordnung mit unbestimmten Koeffizienten, gegenüber der Gruppe (143) nach der Methode der reduzierten Formen. Die Hauptanwendungen beziehen sich auf Gleichungen, die auf solche mit konstanten Koeffizienten reduzierbar sind; Gleichungen, die einen von x allein abhängigen Euler'schen Multiplikator (Nr. 5) zulassen; endlich Gleichungen mit allgemeinem Integral der Form (140).

Die Gleichung:

$$y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0 \tag{148}$$

(a_0, a_1, b_0, b_1 unbestimmte Funktionen von x und y) ist auf ihr Verhalten gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen in x und y untersucht worden. *S. Lie*[157]) giebt die Bedingungen dafür, dass sie mit $y'' = 0$ äquivalent ist und führt in diesem Fall die Integration auf die einer linearen Gleichung 3. Ordnung zurück. *R. Liouville*[158]) giebt das Bildungsgesetz der rationalen relativen Invarianten dieser Gleichung, verschiedene reduzierte Formen für sie, mehrere Fälle der Integrabilität, endlich Anwendungen auf die Theorie der geodätischen Linien. *A. Tresse*[159]) hat diese Resultate mit *Lie*'schen Methoden wiedergefunden.

E. Vessiot[160]) untersucht die Invarianten und die reduzierten Formen der Gleichung:

$$a(yy'' - y'^2) + by'' + eyy' + dy' + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \tag{149}$$

gegenüber der Gruppe (147).

C. Żorawski[161]) bestimmt die Invarianten der allgemeinen Gleichung 1. Ordnung gegenüber den unendlichen Untergruppen der Gruppe aller Punkttransformationen in x und y.

A. Tresse[162]) endlich giebt sehr vollständige Resultate über die Invarianten der allgemeinen Gleichung $y'' = F(x, y, y')$ gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen. Er führt relative Invarianten ein, die sich reproduzieren multipliziert mit Potenzen zweier bestimmten Faktoren; mit dreien dieser Invarianten kann man eine absolute bilden. Diese Invarianten sind rational; mit Hülfe von vieren

157) Norw. Arch. 8 (1883), p. 372.

158) Par. C. R. 28./11. 1887 und J. éc. polyt. cah. 59 (1889), p. 7.

159) Par. thèse 1893 [Acta math. 18 (1894), p. 1].

160) Toul. Ann. 9 (1895), F. Dieselbe Gleichung ist von andern Gesichtspunkten aus von *E. Picard*, J. de math. (4) 5 (1889), p. 277 und *G. Mittag-Leffler* Acta math. 18 (1894), p. 233 untersucht worden.

161) Krak. Ber. 26.

162) Preisschriften der Jablonowski'schen Gesellschaft, Leipzig 1896.

von ihnen und von drei Differentialparametern kann man sie alle successive bilden. *Tresse* leitet daraus, ausser den allgemeinen Äquivalenzbedingungen, die Bedingung dafür ab, dass eine Gleichung 2. Ordnung eine, 2, 3 oder 8 unabhängige infinitesimale Transformationen zulässt. Gleichung (148) ist ein spezieller Fall; wirklich singulär ist aber nur der Fall der auf $y'' = 0$ reduzierbaren Gleichungen, für die alle Invarianten $= 0$ sind.

Rationelle Integrationstheorieen.

36. Rationalitätsbereich. Irreducibilität. Die *rationellen Integrationstheorieen* sind der *Galois'schen Gleichungstheorie* (I B 3 c) nachgebildet. Ihr gemeinsames Prinzip ist die isolierte Aufsuchung *einer* Lösung durch die eines Fundamentalsystems von Lösungen (Nr. **30**) zu ersetzen; ihr Erfolg ist daher an die Existenz solcher Systeme geknüpft.

Die Definition einer speziellen Gleichung beruht auf dem Begriff des *Rationalitätsbereichs*[163]) (I B 3 c, Nr. **1** und Fussn. 2). Ein solcher Bereich $[R]$ ist definiert durch eine gewisse Anzahl *Elemente*, die seine *Basis* bilden, und eine gewisse Anzahl *fundamentaler Operationen*. Die Elemente sind hier: *alle Konstante, gewisse unabhängige oder abhängige Variable und gewisse bestimmte oder unbestimmte Funktionen dieser Variabeln*. Die Operationen sind hier, wenn nichts anderes angegeben, *die rationalen algebraischen Operationen und die Differentiation*. Dem Rationalitätsbereich $[R]$ gehört jede Funktion an, die sich aus den Elementen seiner Basis durch eine endliche Anzahl der fundamentalen Operationen ableiten lässt. Enthält die Basis keine Funktion, sondern nur unabhängige Variable, so ist $[R]$ der *absolute Rationalitätsbereich*. Leitet man aus einem Bereich $[R]$ einen andern $[R']$ dadurch ab, dass man zu der Basis von $[R]$ eine gewisse Anzahl Funktionen hinzufügt, so sagt man: man hat diese Funktionen dem Bereich $[R]$ *adjungiert* (I B 3 c, Nr. **7**).

Eine rationale[164]) Differentialgleichung $F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0$ heisst in einem Bereich R (dem x und y angehören) *irreducibel*, wenn sie im algebraischen Sinne irreducibel ist (I B 1 b, Nr. **5**) und wenn sie mit keiner ebenfalls rationalen Gleichung niedrigerer Ordnung ein Integral gemein hat; andernfalls *reducibel*. Die erste Idee einer Ausdehnung des Irreducibilitätsbegriffs auf Differentialgleichungen gehört *G. Fro-*

163) *E. Vessiot*, Par. thèse 1892.

164) d. h. F soll dem Bereich R angehören.

benius[165]), die vorstehende Form der Definition *L. Königsberger*[166]). Von den Resultaten des letzteren seien die beiden folgenden erwähnt:

Wenn eine rationale Gleichung *eine* Lösung mit einer irreducibeln Gleichung gemein hat, genügen ihr *alle* Lösungen der letzteren.

Wenn zwei rationale Gleichungen Lösungen gemein haben, so giebt es eine irreducible Gleichung, der alle diese gemeinsamen Lösungen und nur diese genügen; man erhält sie durch einen Algorithmus, der zu dem des grössten gemeinsamen Teilers analog ist.

Man schränkt zuweilen den Irreducibilitätsbegriff ein, indem man den betrachteten Gleichungen noch andere Bedingungen als die der Rationalität auferlegt, z. B. die, linear und homogen zu sein. Im letzteren Fall und bei Beschränkung auf den absoluten Rationalitätsbereich ist man in der That im Stande zu entscheiden, ob eine vorgelegte Gleichung reducibel ist oder nicht[167]).

37. Rationelle Integrationstheorie der linearen Gleichungen. Die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung ist die erste, für die eine rationelle Integrationstheorie entwickelt worden ist — eine neue Analogie dieser Gleichung mit der algebraischen Gleichung n^{ter} Ordnung. Wir setzen voraus, ihre Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ seien gegebene Funktionen von x; dass sie dem betrachteten Rationalitätsbereich $[R]$ angehören, ist Definition. Dieser Bereich enthält ausserdem die Variable x, die unbestimmten Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und kann ausserdem noch andere gegebene Funktionen von x enthalten. Damit ist definiert, was unter einer *rationalen Differentialfunktion V der y* zu verstehen ist. Ersetzt man in einer solchen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch die Integrale $y_1^0(x), \ldots, y_n^0(x)$ eines ein für allemal gewählten Fundamentalsystems, so geht V in eine Funktion $V_0(x)$ über, die man den *numerischen Wert* von V nennt. Er kann in $[R]$ rational sein oder nicht.

Man führe nun in V eine lineare homogene Substitution:

$$(150) \qquad \bar{y}_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit konstanten Koeffizienten aus; V geht über in eine neue rationale Differentialfunktion $\bar{V}$, und diese hat einen numerischen Wert $\bar{V}_0$. Wenn $\bar{V}$ als Funktion aller darin auftretenden Unbestimmten mit V

165) J. f. Math. 76 (1873), p. 234; 80 (1875), p. 183.

166) J. f. Math. 91 (1881), p. 199; 92 (1882), p. 291. Vgl. auch sein Lehrbuch, p. 61 u. 155.

167) *J. Bendixson*, Stockholm Öfv. 49 (1892), p. 279; *E. Beke*, Math. Ann. 45 (1894), p. 278.

identisch ist, so sagt man: V ist bei (150) *formal invariant*; wenn V_0 als Funktion von x allein mit V_0 identisch ist, sagt man: V ist bei (150) *numerisch invariant*. V kann bei (150) numerisch invariant sein, ohne formal invariant zu sein[168]).

Eine Gleichung heisst in $[R]$ speziell, wenn irgend eine rationale Differentialfunktion V einen rationalen numerischen Wert hat. Die verschiedenen nach dieser Definition möglichen *Arten von Spezialfällen* ergeben sich aus dem fundamentalen Doppelsatz: Der Gleichung entspricht mit Beziehung auf den Rationalitätsbereich R eine Untergruppe G der allgemeinen homogenen linearen Gruppe in n Veränderlichen mit folgender Doppeleigenschaft: 1) *Jede rationale Differentialfunktion V, deren numerischer Wert rational ist, gestattet numerisch alle Transformationen von G;* 2) *jede Funktion V, die numerisch alle Transformationen von G gestattet, hat einen rationalen numerischen Wert.* Diese Gruppe heisst die *Transformationsgruppe* oder *Rationalitätsgruppe* der Gleichung[169]). Durch eine solche Gruppe G ist jede spezielle Gleichung G charakterisiert. Da übrigens das Fundamentalsystem $y^{(0)}(x),\ldots,y_n^0(x)$ beliebig gewählt werden kann, ist G nur bis auf eine lineare homogene Transformation, m. a. W. nur seinem *Typus* nach definiert. Man kann auch sagen: jede spezielle Gleichung ist charakterisiert durch eine von den Lösungen eines Fundamentalsystems erfüllte bekannte[170]) Relation der Form

$$\Omega\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right) = \varrho(x),$$

in der Ω eine Funktion von V ist, die (formal und numerisch) alle Transformationen von G und keine andern zulässt, und in der $\varrho(x)$ dem Bereich $[R]$ angehört. Ω heisst eine *charakteristische Invariante von G*.

Die hieraus entspringende *Integrationsmethode*[171]) besteht in der

---

168) Die Wichtigkeit dieser Unterscheidung hat *F. Klein* betont, autogr. Vorl. über höhere Geometrie 2 (1893), p. 299. Vgl. auch *E. Beke*, Math. Ann. 49 (1897), p. 573.

169) Den Begriff der Transformationsgruppe einer linearen Gleichung verdankt man *E. Picard* [Par. C. R. 96 (1883), p. 1131 und Toul. Ann. 1 (1887), A]; er wurde darauf geführt durch Untersuchungen über die Reducibilität der allgemeinen Resolvente (Nr. **25**). *Picard*'s erste Formulierung des Fundamentalsatzes wurde von *E. Vessiot* vervollständigt (Par. thèse 1892). Da auch dessen Analyse noch gewisse Schwierigkeiten bestehen liess, vervollständigte *Picard* [Par. C. R. 121 (1895), p. 789; Traité 3, p. 536] seinen Beweis in der Art, dass er zu der Formulierung des Textes gelangte.

170) Wegen der wirklichen Bestimmung der Rationalitätsgruppe vgl. man *F. Marotte*, Par. C. R. 124 (1897), p. 608; 126 (1898), p. 715 und Par. thèse 1898, p. 44.

171) *Vessiot*, Thèse p. 39.

successiven Reduktion der Gruppe G durch Adjunktion neuer, durch Hülfsgleichungen definierter Funktionen von x zu $[R]$. Sei G_1 eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe von G und Ω_1 eine charakteristische Invariante von G_1; Ω_1 genügt als Funktion von Ω einer rationalen Differentialgleichung. Ist diese integriert, so genügt die Adjunktion *eines* ihrer Integrale zur Reduktion der Rationalitätsgruppe auf G_1. Man gelangt zu demselben Resultat, wenn man *alle* Integrale der Gleichung adjungiert, der eine charakteristische Invariante irgend einer G_1 enthaltenden Untergruppe von G als Funktion von Ω genügt; dieser Umstand erlaubt Gleichungen niederer Ordnung zu benutzen. Diese Hülfsgleichungen haben Fundamentalsysteme von Lösungen; man kann daher ihre Integration ersetzen (Nr. 30) durch die einer linearen Hülfsgleichung, deren Transformationsgruppe einfach und zu G/G_1 isomorph ist[172]).

Ist die Gruppe auf G_1 reduziert, so fährt man ebenso fort.

Die Tragweite dieser Methode ergiebt sich aus folgendem Satz: *Wenn die vollständige Integration einer rationalen Hülfsgleichung die Gruppe G reduziert, so reduziert sie sie auf eine invariante Untergruppe*[173]). Es kann also keine vorteilhaftere Methode als die vorhergehende geben. Man schliesst daraus insbesondere: $P(y) = 0$ ist dann und nur dann *durch Quadraturen integrierbar*, wenn ihre Rationalitätsgruppe eine integrable Gruppe (II A 6, Nr. 17) ist[174]). Daraus folgt, dass die allgemeine lineare Gleichung n^{ter} Ordnung für $n > 1$ und folglich auch die allgemeine *Riccati*'sche Gleichung nicht durch Quadraturen integrierbar sind[174]). *Algebraisch integrierbar* ist $P(y) = 0$ dann und nur dann, wenn seine Rationalitätsgruppe nur eine *endliche* Anzahl von Transformationen enthält[174]).

Die besprochene Integrationsmethode ist eng mit dem folgenden Problem verknüpft: Die Gleichung $P(y) = 0$ (oder ein lineares System n^{ter} Ordnung) zu integrieren, wenn man weiss, dass die Lösungen eines Fundamentalsystems eine oder mehrere Relationen der Form $F_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ erfüllen. Am häufigsten ist der Fall untersucht, dass diese Relationen algebraisch und homogen sind. *G. Darboux*[175]) hat gezeigt, welche Rolle dabei die Kovarianten des Systems algebraischer Formen F_k spielen. *Laguerre* und nament-

172) *Vessiot*, Toul. Ann. 8 (1894), H p. 29.

173) Für den Fall, dass die Hülfsgleichung Fundamentalsysteme von Lösungen besitzt, giebt den Satz *Vessiot*, Thèse p. 44; allgemein *Picard*, Traité 3, p. 562.

174) *Vessiot*, Thèse p. 43, 46, 68.

175) Par. C. R. 90 (1880), p. 524, 596.

lich *Halphen*[176]) haben die Beziehungen des Problems, besonders für quadratische Relationen, zur Theorie der Invarianten linearer Differentialgleichungen untersucht. *L. Fuchs*[177]) behandelt das Problem vom funktionentheoretischen Gesichtspunkt; seine Resultate sind nach dieser Richtung von *Wallenberg*[178]) vervollständigt worden. *E. Picard*[179]) zeigt, wie sie sich sehr naturgemäss aus der vorhin entwickelten Theorie ergeben. *S. Lie*[180]) endlich zeigt, dass man die Frage sehr vollständig behandeln kann, indem man sie auf die Untersuchung eines Differentialsystems zurückführt, das eine bekannte Transformationsgruppe zulässt.

38. Ausdehnung der Theorie auf die Lie'schen Systeme. Theorie von J. Drach für beliebige Gleichungen 1. Ordnung. *E. Vessiot*[181]) zeigt, dass sich die vorangehende Theorie in ihren wesentlichen Punkten auf jede Klasse *Lie*'scher Systeme (Nr. **29**) übertragen lässt. Man kann sich auf den Fall beschränken, dass die zugehörige Gruppe *G einfach transitiv* ist; die zu ihr *reciproke* einfach transitive Gruppe (II A 6, Nr. **10**) spielt dann dieselbe Rolle, wie die allgemeine lineare Gruppe in der vorangehenden Theorie.

E. Picard[182]) macht einige Angaben über die Mittel, um die Methode, vermöge deren er die allgemeinen Sätze von Nr. **37** gewonnen hat, auf Gleichungen beliebiger Ordnung auszudehnen.

J. Drach[183]) endlich skizziert eine rationelle Theorie der Integration der allgemeinen Systeme (1) oder vielmehr der associierten partiellen Differentialgleichung (3). Die auftretende Gruppe ist die *aller Punkttransformationen*:

$$\bar{z}_i = F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \tag{151}$$

die die Relation zwischen irgend einem Fundamentalsystem von Lösungen von $Lf = 0$ und dem allgemeinsten solchen System geben.

---

176) Vgl. Fussn. 143 und 145.

177) Acta math. 1 (1882), p. 321; Berl. Ber. 1882, p. 703 und 1890, p. 469. Vgl. *L. Schlesinger*, Diss. Berl. 1887.

178) J. f. Math. 113 (1894), p. 1; 114 (1895), p. 181.

179) Traité 3, p. 550.

180) Leipz. Ber. 1891, p. 253; 1896, p. 396.

181) Toul. Ann. 8 (1894), H p. 21.

182) Par. C. R. 1895.

183) Par. C. R. 8./5. 1893, 14./1. 1895, 26./10. 1897; Par. thèse 1898. *Drach* giebt Betrachtungen über das logische Wesen des Integrationsproblems und die Definition der Transcendenten; er verallgemeinert ferner den Begriff der Reducibilität für beliebige Differentialsysteme. — Vgl. auch *Vessiot*, Par. C. R. 128 (1899), p. 544.

Man hat rationale Differentialfunktionen V zu betrachten, die mit z_1, $z_2, \ldots, z_n$ und ihren partiellen Ableitungen nach x, $x_1, \ldots, x_n$ gebildet sind. Die Eigenschaften einer jeden von ihnen sind mit der Natur der Untergruppe von (151) verbunden, die sie invariant lässt; man hat insbesondere Sätze, die zum Satz von den symmetrischen Funktionen und zum Satz von *Lagrange* (I B 3 c, Nr. **16**) analog sind.

Ein System (1) ist *speziell*, wenn (3) mit irgend einem System von Relationen verträglich ist, die man erhält, indem man irgend welche Funktionen V rationalen Funktionen von x, $x_1, \ldots, x_n$ gleichsetzt. Der Charakter eines jeden speziellen Systems wird präzisiert durch die Thatsache der Existenz einer Untergruppe G von (151), deren sämtliche Differentialinvarianten rationelle Werte in $x, x_1, \ldots, x_n$ erhalten, sobald man in ihnen die Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch die Lösungen gewisser Fundamentalsysteme von (3) ersetzt. Diese Untergruppe ist die *Rationalitätsgruppe* von (1).

Daraus ergiebt sich von neuem eine Integrationsmethode, die in der fortschreitenden Reduktion dieser Rationalitätsgruppe in ausgezeichnete Untergruppen besteht — einer *normalen Zerlegung* dieser Gruppe gemäss. Die auftretenden Hülfssysteme sind allgemeine Systeme partieller Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen (Nr. **31**); die ihnen zugeordneten Gruppen sind einfach, und ihre Struktur ist durch die normale Zerlegung von G definiert.

II A 5. PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

EDUARD VON WEBER

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

I. Allgemeine Eigenschaften der Differentialsysteme.

1. 2. Existenz der Lösungen; passive Systeme.
3. *Mayer*'sche Systeme.
4. Das allgemeine Integral.
5. Singuläre Integrale.
6. Intermediäre Integrale.
7. Vollständige Integrale.
8. Verschiedene Formen des allgemeinsten Differentialsystems.
9. *Lie*'s Verallgemeinerung des Integralbegriffs.
10. Transformationen der Differentialsysteme.

II. Die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten.

11. Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.
12. Der *Jacobi*'sche Multiplikator.
13. Vollständige Systeme.
14. Systeme totaler Differentialgleichungen.
15. *Jacobi*'s Integrationsmethode.
16. Die Hauptintegrale.
17. Die *Lie-Mayer*'sche Transformation.

III. Das Pfaff'sche Problem.

18. Historisches; *Pfaff*'s Reduktionsmethode.
19. *Grassmann*'s Methode; das Fundamentaltheorem.
20. Integraläquivalente; die allgemeinste Normalform.
21. Transformationen eines *Pfaff*'schen Ausdrucks.
22. Reduktionsmethoden von *Clebsch* und *Lie*.
23. Methode von *Frobenius*.
24. Die Theorie der Berührungstransformationen als Spezialfall der Theorie des *Pfaff*'schen Problems.
25. Die *Jacobi*'sche und die *Mayer*'sche Identität.
26. Verallgemeinerung der *Frobenius*'schen Theorie.
27. Beziehungen zwischen *Pfaff*'schen Ausdrücken und infinitesimalen Transformationen.

IV. Die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten.

28. Methoden von *Lagrange* und *Pfaff*.
29. Methode von *Cauchy*.
30. *Jacobi*'s erste Methode.
31. Die *Hamilton-Jacobi*'sche Theorie.
32. Variation der Konstanten; die charakteristischen Kurven.
33. Singuläre Integrale.
34. Die charakteristischen Streifen; Abbildung und Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.
35. Homogene Elementkoordinaten.
36. *Jacobi*'s zweite Methode.
37. *Lie*'s Verallgemeinerung von *Jacobi*'s zweiter Methode.
38. Involutionssysteme.
39. Spezielle Involutionssysteme.
40. 41. Funktionengruppen.
42. Die *Bäcklund*'sche Theorie.

V. Höhere Differentialprobleme.

1) Differentialsysteme mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

43. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinsichtlich ihrer Charakteristiken erster Ordnung.
44. 45. Erste Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.
46. 47. Die Charakteristiken höherer Ordnung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.
48. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.
49. Beziehungen zwischen zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
50. *Darboux*'sche Systeme; Involutionssysteme.
51. Die *Darboux-Lévy*'sche Integrationstheorie und ihre Verallgemeinerungen.
52. Differentialsysteme erster Ordnung mit mehreren Unbekannten.
53. Die Methode von *Laplace* und ihre Verallgemeinerungen.
54. Verwertung des Gruppenbegriffs für Differentialgleichungen.

2) Differentialsysteme mit m unabhängigen Veränderlichen.

55. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.
56. Involutionssysteme mit *einer* Unbekannten.
57. Die Verallgemeinerung der *Monge-Ampère*'schen Theorie.
58. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten.
59. Nichtlineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten; Normalsysteme.
60. Systeme *Pfaff*'scher Gleichungen.

Litteratur.

Lehrbücher.

George Boole, A Treatise on Differential Equations, Cambridge & London 1865 (mit Supplementary Volume).

Paul Mansion, Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1875, deutsch von H. Maser, Berlin 1892.

A. Johnson, Treatise on ordinary and partial Differential Equations, New-York 1880.

Andrew Russell Forsyth, A Treatise on Differential Equations, second ed. London 1889, deutsch von H. Maser, Braunschweig 1889.

Derselbe, Theory of Differential Equations, pt. I: exact equations and *Pfaff*'s problem, Cambridge 1890; deutsch von H. Maser, Leipzig 1893 („Forsyth A").

Émile Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891, deutsch von H. Maser, Leipzig 1893 („Goursat A").

Derselbe, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, I. Bd. Paris 1896, II. Bd. Paris 1898 („Goursat B").

Sophus Lie und *Georg Scheffers,* Geometrie der Berührungstransformationen, I. Bd., Leipzig 1896 („Lie-Scheffers, Btr.").

Étienne Delassus, Leçons sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1897.

Eduard von Weber, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig 1900.

Vgl. auch *C. G. J. Jacobi*'s Vorlesungen über Dynamik, herausgeg. von *A. Clebsch,* Berlin 1866 = Werke, Supplementband, Berlin 1884; ferner *S. Lie* und *F. Engel,* Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888—93, 3 Bände („Lie-Engel, Tr."); *G. Darboux,* Leçons sur la theorie générale des surfaces, Paris 1887—96, 4 Bände, bes. Bd. 2, Livre IV, sowie die Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung, z. B. *Ch. Méray,* Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale, prem. partie, Paris 1894; *C. Jordan,* Cours d'analyse de l'École polytechnique, tome III, Paris 1896.

Monographien.

Paul du Bois-Reymond, Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln, erstes (einziges) Heft, Leipzig 1864.

L. Natani, Die höhere Analysis in vier Abhandlungen (aus *Hoffmann-Natani,* Math. Wörterbuch), Berlin 1866, dritte Abhandlung.

Man vergleiche auch die zusammenfassenden Darstellungen von:

V. G. Imschenetzky, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1869 = Arch. math. 50, p. 278, 369 (1869).

Derselbe: Études sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, a. a. O. 54, p. 209 (1872), übers. im Anhang zu der deutschen Ausgabe von Mansion.

J. Graindorge, Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres, Liège & Paris 1872 (= Liège Mém. (2) 5).

Gaston Darboux, Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Par. sav. [étr.] 27 (1883) („Darboux, sol. sing.").

Litteratur bei *Mansion,* Anhang, und *Forsyth,* Theory of Diff. Equ. pt. I, Anhang.

I. Allgemeine Eigenschaften der Differentialsysteme.

1. Existenz der Lösungen. Eine Relation zwischen den unabhängigen Variabeln $x_1 \ldots x_m$, den unbekannten Funktionen $z_1 \ldots z_n$

dieser Variabeln, und einer endlichen Zahl ihrer partiellen Ableitungen nach den x heisst eine *partielle Differentialgleichung;* als ihre *Ordnung* bezeichnet man die Ordnung der höchsten darin auftretenden Ableitungen. Ein System partieller Differentialgleichungen

$$(1)\quad \varphi_k(x_1, \ldots x_m,\ z_1 \ldots z_n,\ z_{1,1,0\ldots0} \ldots z_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m} \ldots) = 0^{1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

werde kurz ein *Differentialsystem* genannt. Wir nehmen an, dass in den Gleichungen (1) die Ableitungen von z_i bis zur r_i^{ten} Ordnung einschliesslich enthalten seien, dass also die linken Seiten dieser Gleichungen von den Variabeln:

$$(2)\qquad x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_n,\ z_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m} \qquad \left(\sum \alpha \leqq r_i\colon\ i = 1, \ldots n\right)$$

abhängen. Giebt es n analytische Funktionen $z_1 \ldots z_n$ der Variabeln x, die sich an einer Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ in gewöhnliche Potenzreihen[1a]

$$(3)\qquad z_i = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{z^0_{i\alpha_1 \ldots \alpha_m}}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m}$$

entwickeln lassen, und das Differentialsystem (1) identisch befriedigen, so werden sie zusammen als ein *Integral* oder eine *Lösung* von (1) bezeichnet, und (1) heisst ein *integrables System.* Das Differentialsystem (1) *integrieren* heisst alle seine Lösungen bestimmen. Jede Lösung von (1) erfüllt auch die unendlich vielen Gleichungen, die man erhält, wenn man die Gleichungen (1) nach $x_1 \ldots x_m$ wiederholt partiell unter der Annahme[2]) differentiiert, dass die z_i und ihre Ableitungen Funktionen der x sind.

Die von *A. Cauchy*[3]) aufgeworfene und in Spezialfällen gelöste Frage nach der Existenz der Integrale erledigte *Sophie v. Kowalewsky*[4]) für ein Differentialsystem (1), das aus n Gleichungen besteht und in der Form

---

1) Es wird $z_{i\alpha_1 \ldots \alpha_m} \equiv \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}$ gesetzt.

1a) Vom Standpunkt der Analysis *reeller* Grössen sind bisher nur wenige spezielle Kategorieen von Differentialproblemen untersucht (II A 7); eine Übertragung der *Cauchy-Lipschitz*'schen Existenztheoreme (II A 4 a, Nr. 3) auf beliebige partielle Differentialsysteme ist noch nicht durchgeführt.

2) Solche Differentiationen nennen wir im Folgenden „Derivationen", die dadurch entstehenden Gleichungen die „Derivierten" von (1).

3) Bes. Par. C. R. 15, p. 44, 85, 141 (1842) = Werke (1) 7, p. 17, 33, 62.

4) J. f. Math. 80, p. 1 (1875); s. auch *G. Darboux,* Par. C. R. 80, p. 101, 317 (1875); *L. Königsberger,* J. f. Math. 109, p. 261; 112, p. 181; Math. Ann 42, p. 485; *P. Stäckel,* J. f. Math. 119, p. 339.

$$(4) \qquad \frac{\partial^{r_i} z_i}{\partial x_1^{r_i}} = U_i(x_1 \dots x_m,\ z_1 \dots z_m, \dots z_{k,\beta_1 \dots \beta_m} \dots) \quad (i = 1, \dots n)$$

auflösbar[5]) ist; bei einem algebraischen[6]) System bedient man sich zu dieser Auflösung zweckmässig einer Verallgemeinerung der von *C. Weierstrass* für gewöhnliche algebraische Differentialgleichungen gebrauchten Normalform[7]). Die Gleichungen (4) besitzen ein und nur ein System an der Stelle $x_1^0 \dots x_m^0$ regulärer Integralfunktionen z_i derart, dass $z_i, \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^{r_i-1} z_i}{\partial x_1^{r_i-1}}$ vermöge $x_1 = x_1^0$ bezw. in die an der Stelle $x_2^0 \dots x_m^0$ regulären, sonst aber willkürlichen Funktionen $\chi_i, \chi_i^{(1)}, \dots \chi_i^{(r_i-1)}$ übergehen; dabei ist vorausgesetzt, dass die Funktionen U_i an der Stelle

$$x_1^0 \dots x_m^0,\ (\chi_1)^0 \dots (\chi_m)^0,\ z^0_{k,\beta_1 \dots \beta_m} = \left(\frac{\partial^{\beta_2 + \cdots + \beta_m} \chi_k^{(\beta_1)}}{\partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_m^{\beta_m}} \right)^0$$

alle regulär sind. Vermöge der aufgestellten „Anfangsbedingungen" kennt man nämlich in den Reihenentwickelungen (3) alle Koeffizienten $z^0_{i,\alpha_1 \dots \alpha_m}$, für die $\alpha_1 < r_i$ ist; sodann liefern die Gleichungen (4) und ihre Derivierten der Reihe nach alle übrigen Koeffizienten. Die Potenzreihen (3) sind also formal bestimmt[8]); ihre Konvergenz wird nach einem von *Cauchy* stammenden Prinzip („Calcul des limites", vgl. Fussn. 3 und II A 4a, Nr. 9) bewiesen, indem man dem System (1) ein ähnliches, in geschlossener Form integrierbares an die Seite stellt, und für dieses die Existenz eines nach Potenzen der Grössen $x_h - x_h^0$ entwickelbaren Systems von Integralfunktionen darthut, deren Koeffizientenmodulu alle grösser sind, als die entsprechenden der Reihen (3).

---

5) Für $n = 1$ kann diese Form, ev. durch ganzlineare Trf. der x stets hergestellt werden, nicht aber für $n > 1$; s. *C. Bourlet,* Ann. éc. norm. 1891, Suppl. p. 48.

6) Auf solche Systeme hat *Königsberger* (J. f. Math. 111, p. 1, 156; Berl. Ber. 1894, p. 989; Math. Ann. 20, p. 587; 39, p. 285) den Irreducibilitätsbegriff der Algebra übertragen; auf eine (weitergehende) Definition dieses Begriffs für beliebige algebraische Differentialsysteme gründet *J. Drach* (Ann. éc. norm. 1898, p. 243) seine der *Galois*'schen Theorie nachgebildete „intégration logique" eines algebraischen Differentialsystems; vgl. II A 4 b, Nr. **36**, **38**.

7) *Kowalewsky,* a. a. O; *Königsberger,* J. f. Math. 109, p. 263.

8) Dass hierdurch allein die Konvergenz nicht gesichert ist, wenn das System nicht die Form (4) besitzt, zeigt *S. v. Kowalewsky* an einem Beispiel (l. c. p. 22).

2. Fortsetzung; passive Systeme. Die Frage nach der Existenz der Lösungen eines Systems (1) mit beliebig vielen Gleichungen, Unbekannten $z_1 \ldots z_n$ und Independenten $x_1 \ldots x_m$ erledigten zunächst noch unter speciellen Annahmen *C. Méray* und *C. Riquier*[9]), sowie *C. Bourlet*[10]), sodann allgemein *Riquier*[11]) und *A. Tresse*[12]).

Nach *Tresse* kann jedes System (1) durch Auflösung nach gewissen Ableitungen (2) eine *kanonische Form* erhalten, in der nur Gleichungen

$$(5) \qquad z_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \psi_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m}\left(x_1 \ldots x_m,\ z_1 \ldots z_{k,\beta_1 \ldots \beta_m} \ldots\right)$$

von folgender Beschaffenheit auftreten: Keine der rechts vorkommenden Grössen $z_{k,\beta_1 \ldots \beta_m}$ tritt auf einer der linken Seiten auf; für jede in $\psi_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ vorkommende Grösse $z_{k,\beta_1 \ldots \beta_m}$ ist $\sum \beta_i \leqq \sum \alpha_i$; gilt das Gleichheitszeichen, so ist $k \geqq i$, und im Falle $k = i$ die erste nicht verschwindende der Differenzen $\beta_1 - \alpha_1$, $\beta_2 - \alpha_2, \ldots$ positiv. Eine andere Art der Auflösung, die die vorstehende als Spezialfall enthält, hatte *Riquier*[13]) angegeben. Die in den Gleichungen (5) links stehenden Grössen[14]) und ihre unendlich vielen Ableitungen nach den x heissen nach *Riquier principal*, alle übrigen Grössen $z_{k,\beta_1 \ldots \beta_m}$ *parametrisch*. Jede der ersteren lässt sich mittels des Systems (5) und seiner Derivierten als Funktion der parametrischen Grössen und der x ausdrücken, aber möglicherweise auf mehrere verschiedene Arten. Das System (1) oder (5) heisst *passiv* (*Méray-Riquier*), *involutorisch* oder ein *Involutionssystem* (*Lie*), wenn für jede prinzipale Grösse diese verschiedenen Darstellungen identisch sind; dazu ist notwendig und hinreichend, dass dies für eine gewisse endliche Zahl prinzipaler Ableitungen der Fall ist[15]). Die Bedingungen der Passivität finden sonach ihren Ausdruck in einem System partieller Differentialgleichungen, denen die $\psi_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ als Funktionen der x und der parametrischen Grössen zu genügen haben, oder auch, für die unaufgelöste Form (1) des Differentialsystems, in einer Anzahl partieller Differentialgleichungen, die von den Funktionen φ_k vermöge (1) zu erfüllen sind.

Damit ein System (1) mit n Unbekannten und $p \leqq n$ Gleichungen

---

9) Ann. éc. norm. 1890, p. 23.

10) Vgl. Fussn. 5.

11) Ann. éc. norm. 1893, p. 65, 123. 167; Par. sav. [étr.] 32.

12) Acta math. 18, p. 1 (1894).

13) Ann. éc. norm. 1893, p. 66; er nennt seine kanonische Form *harmonisch* oder *orthonom*.

14) Es können sich auch Grössen $z_{k,0 \ldots 0} \equiv z_k$ darunter befinden.

15) *Riquier*, Ann. éc. norm. 1893, p. 77 ff.

passiv sei, ist hinreichend, dass gewisse nach den höchsten Ableitungen $z_{i,\alpha_1 \dots \alpha_m}$ genommene Funktionaldeterminanten (I B 1b, Nr. 20) der φ_k nicht vermöge (1) verschwinden [16]), und $n - p$ seiner Integralfunktionen z_i können dann im allgemeinen willkürlich angenommen werden.

Ist ein Differentialsystem S, das auf die kanonische Form (5) gebracht sei, nicht passiv, so folgt durch je einmalige Derivation der Gleichungen (5) nach $x_1 \dots x_m$ ein System S', das möglicherweise für einige der links stehenden Ableitungen je zwei verschiedene Darstellungen liefert; ihre Vergleichung führt zu neuen Relationen S''. Erteilt man dem Differentialsystem (S, S', S'') die kanonische Form, und verfährt mit dieser wie mit S, etc., so gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten entweder zu Widersprüchen, ev. Relationen zwischen den x allein, und S ist dann nicht integrabel; oder zu einem passiven System, auf dessen Integration die von S zurückgeführt ist.

Ein passives System (5) besitzt ein und nur ein System an der Stelle $x_1^0 \dots x_m^0$ regulärer Integralfunktionen $z_1 \dots z_n$ der Eigenschaft, dass sich die parametrischen Grössen $z_{k,\beta_1 \dots \beta_m}$ für $x_1 = x_1^0, \dots x_m = x_m^0$ bez. auf willkürlich gewählte Konstante $z^0_{k,\beta_1 \dots \beta_m}$ reduzieren; dabei ist vorausgesetzt, dass die ψ in (5) an der Stelle $x_1^0, \dots x_m^0, \dots z^0_{k,\beta_1 \dots \beta_m} \dots$ sich regulär verhalten und die arbiträr gewählten Reihen

$$\sum_{\beta_1, \dots \beta_m} \frac{z^0_{k,\beta_1 \dots \beta_m}}{\beta_1! \dots \beta_m!} (x_1 - x_1^0)^{\beta_1} \dots (x_m - x_m^0)^{\beta_m}$$

einen endlichen Konvergenzbezirk besitzen. In der That sind die Potenzreihen (3) durch die gemachten Annahmen und mit Hilfe der Gleichungen (5) und ihrer Derivierten formal eindeutig bestimmt. *Riquier* [17]) führt den Konvergenzbeweis mittels *Cauchy*'s Calcul des limites, indem er zuvor das gegebene Differentialsystem durch Einführung gewisser Ableitungen der z_i als neuer Unbekannter auf ein Differentialsystem besonderer Form („système franc") reduziert; *É. Delassus* [18]) leistet dasselbe für eine von ihm angegebene Modifikation der *Tresse*'schen Normalform (5) durch Zurückführung des Problems auf eine Reihe *Kowalewsky*'scher Systeme (4). Man kann den Anfangsbedingungen eine Form geben, in die nur eine endliche Zahl von Konstanten und arbiträren Funktionen der x eingeht [19]).

16) Vgl. z. B. die unter Fussn. 4 citierte Arbeit von *Stäckel*.

17) Ann. éc. norm. 1893, p. 123.

18) Ann. éc. norm. 1896, p. 421.

19) *Delassus*, a. a. O.; *Riquier*, Ann. éc. norm. 1897 p. 259.

Das „*Cauchy*'sche *Problem*" (*Darboux*), d. h. die Aufgabe, ein Integral mittels der zu seiner Bestimmung notwendigen und hinreichenden Anfangsbedingungen zu ermitteln, lässt sich nach dem obigen stets durch Reihenentwickelungen lösen. Für die letzteren kann man bisher nur bei einigen speziellen Klassen *linearer*[20]) Differentialsysteme unter gewissen Voraussetzungen eine von der Wahl der Anfangsbedingungen unabhängige Konvergenzgrenze angeben und die analytischen Fortsetzungen verfolgen[21]).

3. Mayer'sche Systeme. Lassen sich mittels des passiven Systems (5) und seiner Derivierten alle Ableitungen der z_i von einer gewissen Ordnung s ab durch die x, z und die Ableitungen bis zur $s-1^{\text{ten}}$ Ordnung ausdrücken, m. a. W. ist die Zahl der parametrischen Grössen endlich ($=\nu$), so hängt die allgemeinste Lösung von einer endlichen Zahl ν willkürlicher Konstanten ab, und (1) oder (5) heisst ein *Mayer*'sches *System* (vgl. Nr. **16**). Umgekehrt ist jedes Funktionensystem z_i, in das eine endliche Parameterzahl eingeht, die allgemeinste Lösung eines und nur eines *Mayer*'schen Systems.

Die allgemeinste Lösung jedes andern passiven Systems enthält nach dem obigen eine unbegrenzte, abzählbare (I A 5, Nr. 2) Menge von arbiträren Konstanten.

4. **Das allgemeine Integral.** Ein Funktionensystem $z_1 \ldots z_n$, welches durch ein irgendwie von Parametern und arbiträren Funktionen abhängendes Gleichungensystem (K) zwischen den Variabeln $x_1 \ldots x_m$, $z_1 \ldots z_n$ definiert ist, heisst nach *A. M. Ampère*[22]) das *allgemeine Integral* eines Differentialsystems (1), wenn es, solange die willkürlichen Elemente keinen Bedingungsgleichungen unterliegen, ausser den Gleichungen (1) und ihren Derivierten keine andern Differentialgleichungen erfüllt, d. h. wenn sich aus (K) durch unbegrenzt wiederholte Derivation nach den x und Elimination der willkürlichen Elemente alle Relationen (1) und ihre Derivierten, und nur diese ergeben. *Darboux*[23]) ersetzt diese Forderung durch die weitergehende, dass jede Lösung des *Cauchy*'schen Problems auch aus (K) durch Spezialisierung der darin enthaltenen Willkürlichkeiten erhältlich sein

20) D. h. solcher, die hinsichtlich der Unbekannten und ihrer Ableitungen linear sind.

21) *J. Horn*, Acta math. 12, p. 113; 14, p. 337; *Königsberger*, J. f. Math. 112, p. 199.

22) J. éc. pol. 10, cah. 17, p. 549 (1815); vgl. *Imschenetzky*, Arch. Math. 54, p. 209, Kap. 1.

23) „Surfaces" 2, p. 98.

soll[24]); ein in diesem Sinne allgemeines Integral ist auch nach *Ampère* allgemein, nicht aber[25]) umgekehrt. Oft bezeichnet man die Relationen (K) selbst als das *allgemeine Integral* (oder auch: die *allgemeinen Integralgleichungen*) des Differentialsystems (1). Jede Lösung $z_1 \dots z_n$, die aus den allgemeinen Integralgleichungen (K) durch Festsetzung von Bedingungsgleichungen für die willkürlichen Elemente erhalten wird, heisst ein *partikuläres Integral*.

Für eine partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer Unbekannten z und zwei unabhängigen Variabeln x, y ist im einfachsten Fall das allgemeine Integral definiert durch $n+1$ Relationen zwischen x, y, z, n Variabeln $\varrho_1, \dots \varrho_n$, n Gruppen von je ν_i Funktionen

$$\varphi_{i1}(\varrho_i),\ \varphi_{i2}(\varrho_i), \cdots \varphi_{i,\nu_i}(\varrho_i) \quad (i = 1 \cdots n)$$

(wobei die Funktionen φ_{ik} jeder Gruppe je einem System von $\nu_i - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen mit der Independenten ϱ_i genügen[26]), sodass je *eine* Funktion jeder Gruppe arbiträr bleibt), sowie einer endlichen Anzahl von Ableitungen der φ. Die Differentialgleichungen mit dieser Integralform (z. B. alle partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer Unbekannten und zwei Independenten) fasst man nach *Ampère*[27]) zu einer „*ersten Klasse*" zusammen.

In den allgemeinen Integralgleichungen eines Differentialsystems (1) können arbiträre Funktionen auch unter „*partiellen Quadraturen*" vorkommen, deren Integrand ausser der Integrationsvariabeln noch andere Veränderliche enthält[28]); die Theorie der linearen Differentialgleichungen bietet hiefür zahlreiche Beispiele[29]). So stellt *É. Borel*, einer Idee von *Delassus* folgend[30]), die Gesamtheit der in einem gewissen Bereich regulären Integrale einer hinsichtlich z und seiner Ableitungen linearen partiellen Differentialgleichung mit m Independenten x durch einen einzigen, von der arbiträren Funktion φ abhängenden Ausdruck $\int_0^{2\pi} f(x_1 \dots x_m \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$ dar.

24) Hierzu können indes für verschiedene Wertgebiete der x verschiedene Formelnsysteme (K) nötig sein.

25) *Delassus*, Darb. Bull. 1895, 1, p. 37; „Goursat B" 2, Art. 178.

26) Nach *M. Lévy* (Par. C. R. 75 [1872], p. 1094) lassen sich die Zahlen ν_i auf 2 oder 1 reduzieren; die Argumente der φ_{ik} können auch zum Teil identisch sein. Vgl. auch „Goursat B" 2, Kap. 8, wo noch etwas allgemeinere Integralformen betrachtet werden (Nr. 51).

27) A. a. O. p. 558; seine Definition ist etwas enger.

28) *Ampère*, a. a. O. p. 557.

29) Vgl. z. B. *B. Brisson*, J. éc. pol. 7, cah. 14, p. 191 (1808); *S. D. Poisson*, ebenda 12, cah. 19, p. 215 (1823); *A. Weiler*, J. f. Math. 51, p. 105 (1856) u. a. m.

30) Darb. Bull. 1895, 1, p. 122; *Delassus*, ebenda p. 37.

5. Singuläre Integrale. Ein Funktionensystem

$$z_i = f_i(x_1 x_2 \ldots x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{6}$$

heisst ein *singuläres Integral* des Differentialsystems S, wenn die Gleichungen (6) lauter solche Wertsysteme $x_1 \ldots x_m$, $z_{1\alpha} \ldots z_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m} \ldots$ definieren, die zwar die Gleichungen (1) erfüllen, für die aber die rechten Seiten keiner möglichen kanonischen Auflösung (5) des Systems S ausnahmslos regulär sind; ein singuläres Integral kann also nicht direkt durch die Methode der Nr. 2 mit Hilfe von Reihenentwickelungen gewonnen werden. Doch giebt es immer ein Gleichungensystem S_1 in den Variabeln (2), das die Relationen S umfasst, aus diesen durch gewisse Differentiationen nach den Variabeln $z_{i,\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ gewonnen wird, und dem alle etwaigen singulären Integrale S und nur diese genügen[31]); S_1 kann selbst wieder singuläre Integrale besitzen etc., und man gelangt so zu der Unterscheidung von einfach, zweifach, ... singulären Integralen[32]).

Ersetzt man in einem Differentialsystem n^{ter} Ordnung S mit *einer* Unbekannten z diese letztere durch $z + \varepsilon z'$, und dementsprechend $z_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ durch $z_{\alpha_1 \ldots} + \varepsilon z'_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, und entwickelt nach Potenzen von ε, so folgt durch Nullsetzen aller Koeffizienten der ersten Potenzen von ε das „*Hilfssystem*“ S' partieller, in z' und seinen Ableitungen linearer Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, das alle zu einer gegebenen Lösung z unendlich benachbarten Lösungen von S definiert[33]); z ist eine singuläre Lösung[34]), wenn die zugehörigen Gleichungen S' entweder ein allgemeines Integral z' besitzen, dem ein geringerer Grad von Allgemeinheit zukommt als bei einer beliebigen Lösung z, oder hinsichtlich z' und seiner Ableitungen nicht unabhängig bleiben, event. identisch[35]) erfüllt sind. Die Bedingungen hierfür liefern mit S zusammen das vorhin definierte Differentialsystem S_1, das für *eine* partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$f(x_1 \cdots x_m, z, \cdots z_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \cdots) = 0 \qquad (\textstyle\sum \alpha_i \leq n) \tag{7}$$

so lautet:

---

31) S. z. B. *Königsberger*, J. f. Math. 109, p. 290.

32) „Delassus“ Art. 22.

33) *Darboux*, Par. C. R. 96, p. 766; Surf. 4, Note XI.

34) Diese Definition der singulären Lösungen giebt *Poisson*, J. éc. pol. 7, cah. 13, p. 114 (1806) in Verallgemeinerung einer Idee *A. M. Legendre's* (Par. mém. 1790, p. 218); vgl. „Boole“, Suppl. Vol. p. 70.

35) Dass dies für jedes Integral z eintritt, lässt sich durch algebraische Umformung von S vermeiden.

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\beta_1 \cdots \beta_m}^{0,1,\cdots n-1} z_{\beta_1 \cdots \beta_{i+1} \cdots \beta_m} \frac{\partial f}{\partial z_{\beta_1 \cdots \beta_m}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}} = 0$$

$$(i = 1, \cdots m; \ \Sigma\beta < n; \ \alpha_1, \alpha_2 \cdots = 0, 1, \ldots n; \ \Sigma\alpha = n).$$

Ein singuläres Integral wird im allgemeinen nicht durch Spezialisierung irgend einer Form des allgemeinen erhalten; doch kann es Lösungen geben, die sowohl singulär als partikulär sind.

6. Intermediäre Integrale. Als *intermediäres Integral* (oder *Zwischenintegral*) eines Differentialsystems S bezeichnet man ein Differentialsystem S' mit denselben Unbekannten und Independenten dann, wenn das allgemeine Integral von S' nicht nur von einer endlichen [36]) Konstantenzahl abhängt und das System S erfüllt, ohne mit dessen allgemeinem Integral identisch zu sein; S ist dann eine algebraische Folge von S' und seinen Derivierten. Oft nennt man „intermediäres Integral" auch nur die nicht aus S folgenden Gleichungen eines Differentialsystems S' der genannten Eigenschaften. Ein Differentialsystem braucht nicht notwendig intermediäre Integrale zu besitzen.

Enthalten die Relationen S' so viele Parameter und arbiträre Funktionen, dass jedes nicht singuläre Integral von S mindestens *eine* partikuläre Form des Systems S' erfüllt, so heisst S' ein *allgemeines intermediäres Integral.*

Eine partielle Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung mit *einer* Unbekannten ist im Falle $\nu < n$ ein intermediäres Integral (oder „$n - \nu^{\text{tes}}$ *Integral*") einer Gleichung der Form (7), wenn diese vermöge der Gleichung ν^{ter} Ordnung und ihrer Derivierten identisch erfüllt ist. Alle etwaigen k^{ten} Integrale einer Gleichung (7) werden durch Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen k^{ter} Ordnung mit *einer* Unbekannten ermittelt [37]); insbesondere erhält man alle etwaigen ersten Integrale von (7) durch Aufsuchung der gemeinsamen Integrale eines Systems partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, worin die Grössen x_i, z, und die Ableitungen von z bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung incl. als Independente figurieren [38]).

---

36) Mitunter ist es nützlich, diese Beschränkung fallen zu lassen, z. B. von intermediären Integralen eines *Mayer*'schen Systems zu sprechen; *Delassus,* Ann. éc. norm. 1897, p. 195.

37) *A. V. Bäcklund,* Math. Ann. 11, p. 240 (1877).

38) Bez. solcher intermediärer Integrale einer Gleichung n^{ter} Ordnung, die von höherer als der n^{ten} Ordnung sind, vgl. z. B. Nr. 50.

7. Vollständige Integrale. Enthält das Differentialsystem (1) die Ableitungen von z_i bis zur r_i^{ten} Ordnung einschliesslich, so versteht man unter einem *vollständigen Integral* des Systems (1) ein von den arbiträren Konstanten $c_1 \dots c_\nu$ abhängendes Funktionensystem:

$$(8) \qquad z_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_m,\ c_1 c_2 \dots c_\nu) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

von der Beschaffenheit, dass die Elimination der c_i aus (8) und aus den Gleichungen:

$$(9) \qquad z_{i,\alpha_1 \dots \alpha_m} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} f_i \quad \left(\sum \alpha \leqq r_i;\ i = 1, \cdots n\right)$$

alle Relationen (1) und nur diese liefert. Die Anzahl ν der arbiträren Konstanten ist also gleich der Zahl der Grössen

$$(10) \quad z_1 \cdots z_n,\ z_{i,\alpha_1 \dots \alpha_m} \quad (\alpha_1, \cdots \alpha_m = 1, \cdots r_i;\ \textstyle\sum \alpha \leqq r_i;\ i = 1, 2, \cdots n),$$

vermindert um die Anzahl der Gleichungen (1)[39]).

Für ein *Mayer*'sches System (Nr. 3) und nur für ein solches koinzidieren die Begriffe „vollständiges" und „allgemeines" Integral. Jedes andere Involutionssystem (Nr. 2) S besitzt unbegrenzt viele verschiedene vollständige Integrale. Fügt man zu S die derivierten Gleichungen bis zu irgend welcher Ordnung hinzu, so entsteht ein Involutionssystem S', dessen vollständige Integrale mehr als ν arbiträre Konstanten enthalten. Ein vollständiges Integral desjenigen Involutionssystems, das aus der Differentialgleichung (7) durch Hinzufügung aller ihrer Derivierten bis zur $n + k^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich entsteht, wird auch als ein *vollständiges Integral vom Range k* der Gleichung (7) bezeichnet[40]). Ein vollständiges Integral vom Range k der Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

enthält darnach $2k + 5$ arbiträre Konstanten[40]).

Ein Differentialsystem, das mindestens *ein* vollständiges Integral besitzt, heisst nach *Lie*[41]) *unbeschränkt integrabel;* ein solches System (1) ist dadurch charakterisiert, dass es in einem Involutionssystem enthalten ist, das ausser (1) keine Gleichung in den Variabeln (2) allein umfasst.

---

39) Wann n Funktionen z_i mit $m \cdot n$ arbiträren Konstanten das vollständige Int. eines Systems von n partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit n Unbekannten z_i und m Independenten bilden, zeigt *Königsberger,* Math. Ann. 44, p. 17.

40) *J. König,* Math. Ann. 24, p. 505; vgl. *Jacobi*'s Integrale mit „überzähligen" Konstanten, Werke 5, p. 404.

41) Leipz. Ber. 1895, p. 71.

8. Verschiedene Formen des allgemeinsten Differentialsystems. Jedes Differentialsystem S lässt sich dadurch, dass man gewisse Ableitungen $z_{i,\alpha_1 \dots \alpha_m}$ als weitere Unbekannte betrachtet, durch ein Differentialsystem S' mit denselben Independenten x_i ersetzen, das nur die *ersten* Ableitungen der Unbekannten enthält. Indem man zu S die Derivierten bis zu einer gewissen Ordnung hinzufügt, sodann gewisse Ableitungen der z_i als weitere Unbekannte einführt, lässt sich S insbesondere durch ein in den ersten Ableitungen *lineares* Differentialsystem:

$$(11) \qquad \sum_1^m{}_k \sum_1^p{}_s a_{iks} \frac{\partial u_s}{\partial x_k} + a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

ersetzen, worin $u_1 \dots u_p$ die Unbekannten, und die a_i, a_{iks} Funktionen von $x_1 \dots x_m$, $u_1 \dots u_p$ bedeuten; *Riquier* hat gezeigt, dass jedes beliebige passive System S durch ein passives System der Form (11) ersetzt werden kann[42]).

Nach *Riquier*[11]) kann man ferner jedes passive System S mit den Unbekannten $z_1 \dots z_n$ ersetzen durch n Differentialsysteme $S_1 S_2 \cdots S_n$ derart, dass S_ν nur die x_i und die Unbekannten $z_1 \dots z_\nu$ und ihre Ableitungen enthält, und sich nach Substitution eines beliebigen Integrals $z_1 \dots z_{\nu-1}$ des Differentialsystems $(S_1, S_2, \dots S_{\nu-1})$ in ein passives System mit der *einen* Unbekannten z_ν verwandelt; die Integration von S ist so auf diejenige einer Reihe von Differentialsystemen mit m Independenten und je *einer* Unbekannten zurückgeführt.

Setzt man $z = z_1 \xi_1 + \cdots + z_n \xi_n$, drückt man ferner mittels der Gleichungen $z_i = \frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ die Ableitungen $z_{i,\alpha_1 \dots \alpha_m}$ durch die Ableitungen von z aus, und fügt man dem System (1) die Relationen $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = 0$ hinzu, so ist die Integration des Differentialsystems (1) zurückgeführt auf diejenige eines Differentialsystems mit den Independenten $x_1 \dots x_m$, $\xi_1 \dots \xi_n$ und *einer* Unbekannten z; insbesondere lässt sich also jedes beliebige Differentialsystem ersetzen durch ein in den zweiten Ableitungen lineares Differentialsystem 2. Ordnung mit *einer* Unbekannten[43]).

Eine andere Formulierung des allgemeinsten Differentialproblems ergiebt sich aus der Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen.

Man sagt: k Relationen zwischen den Variabeln $x_1 x_2 \dots x_\nu$ *befriedigen* das System linear unabhängiger totaler Differentialgleichungen

42) Ann. éc. norm. 1893, p. 359; Systeme dieser Art betrachtet auch *Bourlet;* vgl. Fussn. 5, sowie die von *Bäcklund,* Math. Ann. 17, p. 321 ff. und *v. Weber,* J. f. Math. 118, p. 154 ff. behandelten Spezialfälle.

43) *J. Drach,* Par. C. R. 125, p. 598 (1897).

$$(12) \qquad \sum_1^\nu{}_s \xi_{is}(x_1 x_2 \dots x_\nu)\, dx_s = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots r;\ r < \nu)$$

oder bilden ein *Integraläquivalent* (*Integral*) derselben, wenn die aus ihnen entnommenen Werte von k der Variabeln x in (12) substituiert hinsichtlich der übrigen x und ihrer Differentiale Identitäten liefern. Schreibt man die k Relationen in der Form $x_i = f_i(x_{k+1} \dots x_\nu)$, so erhält man für die k unbekannten Funktionen f_i ein System S von $r(\nu - k)$ partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Unterliegen also die Koeffizienten ξ_{is} keinen Bedingungsgleichungen, so darf k nicht kleiner sein als $\nu r : (r+1)$; von den f_i sind dann $k(r+1) - r\nu$ willkürlich wählbar, die andern als Integrale von S definiert[44]).

Umgekehrt lässt sich die Integration jedes Differentialsystems S auf diejenige eines Systems totaler Differentialgleichungen zurückführen. Es enthalte S z. B. nur *eine* Unbekannte z und deren Ableitungen $z_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ bis zur n^{ten} Ordnung einschliesslich, und es sei N die Anzahl der Grössen

$$(13) \quad x_1 \dots x_m,\ z_{1,0\dots0}, \dots z_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \dots \quad \left(\sum \alpha_i \leqq n;\ \alpha_1, \dots \alpha_m = 0, 1, \dots n\right).$$

Jedes Integral von S ist dann definiert durch ein $N - m$-gliedriges[45]) Gleichungensystem zwischen den Variabeln (13), das die Relationen S umfasst, alle totalen Differentialgleichungen der Form

$$(14) \qquad dz_{\beta_1 \dots \beta_m} = \sum_1^m{}_i z_{\beta_1 \dots \beta_{i-1},\, \beta_i + 1,\, \beta_{i+1}, \dots \beta_m} dx_i$$

$$\left(\sum \beta_i \leqq n - 1;\ \beta_1 \cdots \beta_m = 0, 1, \cdots n - 1\right)$$

erfüllt, *und nach den* $N - m$ *Variabeln* z, $z_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ *auflösbar ist.*

9. Lie's Verallgemeinerung des Integralbegriffs. Von der zuletzt genannten Beschränkung befreit *Lie*[46]) die Definition des Integrals durch Einführung des Begriffs „*Flächenelement* n^{ter} *Ordnung*" des Raumes

44) *Forsyth*, Theory of diff. equ. 1, Kap. 13.

45) D. i. aus $N - m$ unabhängigen Gleichungen bestehendes. Obige Definition des Integrals wurde für den Fall $n = 1$ zuerst von *J. F. Pfaff* (Fussn. 104) gegeben.

46) Für $n = 1$ s. „Tr." 2, Kap. 4; „Goursat A" Kap. 10; „v. Weber" Kap. 7; für $n > 1$ vgl. die Arbeiten von *Bäcklund* (Fussn. 55); *E. v. Weber*, Math. Ann. 44, p. 458; *O. Biermann*, Leipz. Ber. 1896, p. 665; *J. Beudon*, Ann. éc. norm. 1896, Suppl. Die Grundlagen für die geometrische Deutung der partiellen Differentialgleichungen wurden von *G. Monge*, *O. Bonnet* (Fussn. 181, 186, Nr. **32**) und *P. Du Bois-Reymond* („Beiträge") geschaffen; Geschichtliches hierüber s. bei „Lie-Scheffers, Btr." p. 514 f.

R_{m+1} mit den Punktkoordinaten $z, x_1 \ldots x_m$. Man versteht darunter ein beliebiges Wertsystem (13); die N Grössen (13) selbst heissen die *Koordinaten* des Flächenelements. Zwei unendlich benachbarte Elemente $x_i, z, z_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ und $x_i + dx_i,\ z + dz \ldots z_{\alpha_1 \ldots} + dz_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \ldots$ heissen *vereinigt liegend*, wenn sie den Gleichungen (14) genügen. Eine ν-fach ausgedehnte Schar von Flächenelementen n^{ter} Ordnung, die den Gleichungen (14) genügt, so dass also jedes Element der Schar mit allen Nachbarelementen vereinigt liegt, heisst eine *Element-M_ν* (*Elementmannigfaltigkeit, -verein*), insbesondere eine „Element-M_ν^ϱ", wenn die Mannigfaltigkeit der zugehörigen „Punkte" $z, x_1 \ldots x_m$ ϱ-fach ausgedehnt ist; man hat $\varrho \leqq \nu$; $\nu \leqq m$.[46a]) Eine Element-M_ν^ϱ ist darnach definiert durch ein $N - \nu$-gliedriges, den totalen Differentialgleichungen (14) genügendes Relationensystem zwischen den N Variabeln (13), worunter sich $m - \varrho + 1$ Gleichungen in $z, x_1 \ldots x_m$ allein befinden. Das allgemeinste Gleichungensystem dieser Art wird ohne Integration gefunden; die $m - \varrho + 1$ Relationen in $z, x_1 \ldots x_m$ sind willkürlich wählbar. Eine Element-M_1^0 oder -M_1^1, d. h. ein System von einfach unendlich vielen Flächenelementen n^{ter} Ordnung, deren jedes mit dem unendlich benachbarten vereinigt liegt, heisst ein *Streifen* n^{ter} Ordnung, eine Element-M_m^m eine *Fläche* des Raumes R_{m+1}.

Ein Flächenelement *erster* Ordnung[46]) $z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ ist definiert durch einen Punkt $z x_1 \ldots x_m$ des R_{m+1} und eine durch ihn gehende Ebene

$$\zeta - z = p_1(\xi_1 - x_1) + \cdots + p_m(\xi_m - x_m),$$

wobei ζ, ξ_i die laufenden Koordinaten bedeuten. Die allgemeinste, aus Flächenelementen erster Ordnung bestehende Element-M_m^ϱ, d. h. das allgemeinste aus $m+1$ Gleichungen bestehende Integraläquivalent der totalen Differentialgleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

wird erhalten, indem man zu $m - \varrho + 1$ beliebigen, von z nicht freien Relationen:

46a) Diese letztere Ungleichung gilt stets für $n = 1$, für $n > 1$ nur dann, wenn von gewissen trivialen Gleichungensystemen (z. B. Vereinen, deren sämtliche Elemente n^{ter} Ordnung dasselbe Element $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten), abgesehen wird; m-fach ausgedehnte Vereine von Elementen n^{ter} Ordnung, deren zugehörige Elemente 1. Ordnung ebenfalls eine Element-M_m^ϱ bilden, können im Falle $\varrho < m$ in den Koordinaten (13) nicht dargestellt werden; die betr. Modifikation der Elementkoordinaten wurde von *F. Engel* (Fussn. 251) für den Fall $m = n = 2$ angegeben.

$$\Omega_i(z, x_1 \ldots x_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m - \varrho + 1)$$

diejenigen ϱ Gleichungen hinzufügt, die durch Elimination der λ aus dem System

$$1 = \sum \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial z}; \quad - p_k = \sum \lambda_l \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots m)$$

entstehen; es giebt darnach, den Werten $\varrho = 0, 1, \ldots m$ entsprechend, $m + 1$ Kategorien von Element-M_m; durch eine Berührungstransformation (vgl. die nächste Nr.) kann man jede Element-M_m^ϱ in eine M_m^m verwandeln.

Jede aus Flächenelementen n^{ter} Ordnung bestehende Element-M_r, die einem Differentialsystem S der n^{ten} Ordnung mit *einer* Unbekannten genügt, m. a. W. jedes $N - \nu$-gliedrige Gleichungensystem in den N Variabeln (13), das die Relationen S enthält und die totalen Differentialgleichungen (14) befriedigt, heisst eine *Integral*-M_r (auch *Integralgebilde, -mannigfaltigkeit, -verein*), im Falle $\nu = m$ auch kurz ein *Integral* des Differentialsystems S; demgegenüber handelt es sich bei der ältern Definition des Integrals nur um die *Integralflächen*.

Ein Werthsystem (13), das den Relationen S genügt, heisst ein *singuläres* oder ein *nichtsinguläres* Flächenelement des Differentialsystems S, je nachdem es die Gleichungen des in Nr. 5 definierten Systems S_1 alle oder nicht alle erfüllt; eine Integral-M_r von S heisst singulär, wenn sie die Gleichungen S_1 befriedigt.

Eine Gleichung n^{ter} Ordnung mit *einer* Unbekannten und m Independenten besitzt eine und nur eine Integral-M_m, die eine beliebig gewählte nicht singuläre Integral-M_{m-1} enthält[47]); diese letztere Bestimmung lässt sich durch Einführung neuer Veränderlicher auf die Form der Anfangsbedingungen der Nr. 1 zurückführen[48]). Dasselbe gilt für jedes Involutionssystem n^{ter} Ordnung mit einer Unbekannten; während aber die allgemeinste Integral-M_{m-1} *einer* Gleichung n^{ter} Ordnung ohne Integration gefunden wird (indem man den $N - m$ Definitionsgleichungen einer beliebigen M_m die Gleichung n^{ter} Ordnung hinzufügt), verlangt die Ermittelung einer Integral-M_{m-1} für ein *System* von Gleichungen n^{ter} Ordnung im allgemeinen gewisse Integrationen.

Ein Involutionssystem n^{ter} Ordnung mit einer Unbekannten und m Independenten ist nach *Lie*[49]) durch die Eigenschaft charakteri-

47) S. z. B. *Bäcklund*, Math. Ann. 13, p. 414.
48) Z. B. „Goursat B“ 1, p. 26.
49) Leipz. Ber. 1895, p. 71.

siert, dass jede seiner Integral-M_q $(q < m)$ mindestens *einer* Integral-M_m angehört.

Vollständiges Integral eines Gleichungensystems S zwischen den N Variabeln (13) heisst jetzt jede Schar von Integral-M_m, die so viele Parameter enthält, dass jedes nicht singuläre Flächenelement von S einer und nur einer M_m der Schar angehört, m. a. W. jedes $N-m$-gliedrige Gleichungensystem in den N Variabeln (13) und ν arbiträren Konstanten, das die totalen Differentialgleichungen (14) erfüllt, und aus dem sich durch Elimination der Konstanten alle Relationen S und nur diese ergeben. Ein vollständiges Integral besteht im allgemeinen aus *Flächen*, kann also die Form (8), (9) erhalten; die Zahl ν der arbiträren Konstanten ist wie in Nr. 7 definiert.

Versteht man mit *Lie*[50]) unter einem *Flächenelement* ein Wertsystem[51])

$$x_1 \ldots x_m,\ z_1 \ldots z_n,\ p_{11} \ldots p_{mn} \qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right),$$

und nennt man zwei benachbarte Flächenelemente *vereinigt liegend*, wenn sie die Gleichungen

$$dz_i = \sum p_{ik}\, dx_k \qquad (i = 1 \ldots n)$$

erfüllen, so lassen sich die Begriffe „Element-M_ν" $(\nu \leqq m)$, „Streifen", „Integral", „vollständiges Integral", sowie *Lie's* Definition des Involutionssystems[49]) ohne weiteres auf Differentialsysteme 1. Ordnung mit n Unbekannten, mithin, da auf diese Form jedes Differentialsystem zurückgeführt werden kann (Nr. 8), auf beliebige Differentialsysteme übertragen. Eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Ansatzes führt zu der von *Bäcklund*[52]) in den einfachsten Fällen begonnenen Untersuchung von Gleichungensystemen, welche die Koordinaten der Flächenelemente 1. Ordnung $z x_i p_i,\ z' x_i' p_i' \ldots$ *mehrerer* $m+1$-dimensionaler Räume enthalten.

10. Transformationen der Differentialsysteme. Unter einer *Berührungstransformation* der $2m+1$ Variabeln $z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ oder des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \ldots x_m)$ versteht man (III D 7) eine Transformation

(15) $z' = Z(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m);\ x_i' = X_i(z \ldots p_m);\ p_i' = P_i(z \ldots p_m)\ \ (i = 1 \ldots m),$

50) Leipz. Ber. 1895, p. 111.

51) Ein solches wird auch „M_m-*Element*" des Raums $x_1 \ldots x_m\, z_1 \ldots z_n$ (*Bäcklund*, Math. Ann. 17, p. 286), im Falle $m=1$ „*Linienelement*" des Raums $x z_1 \ldots z_n$ genannt; vgl. „Lie-Scheffers, Btr." Abschn. 2.

52) Math. Ann. 17, p. 285, bes. p. 305; 19, p. 387.

deren rechte Seiten für jedes beliebige Wertsystem der $z x_i p_i$ und ihrer Differentiale eine Identität der Form

$$dZ - P_1\,dX_1 - \cdots - P_m\,dX_m \equiv \varrho(z x_1 \ldots p_m)(dz - \sum p_i\,dx_i) \quad (\varrho \not\equiv 0)$$

befriedigen. Durch $n-1$-malige Erweiterung[53]) der Transformation (15) erhält man Formeln der Gestalt:

$$z'_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = P_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(z, x_1 \ldots x_m, \ldots z_{\beta_1 \ldots \beta_m} \ldots)$$

$$(\alpha_1, \ldots \alpha_m = 0, 1, 2, \ldots n;\ \sum \alpha_i \leqq n;\quad \sum \beta_i \leqq \sum \alpha_i),$$

die mit (15) zusammen eine Transformation der N Variabeln (13) darstellen.

Die $n-1$-fach erweiterten Berührungstransformationen sind dadurch charakterisiert, dass sie irgend zwei benachbarte, vereinigt liegende Flächenelemente n^{ter} Ordnung des Raums $R_{m+1}(z x_1 \ldots x_m)$ wieder in zwei benachbarte vereinigt liegende Elemente des $R'_{m+1}(z' x'_1 \ldots x'_m)$ verwandeln; sie sind die einzigen, umkehrbar endlichdeutigen Transformationen der N Variabeln (13), bei denen jede Element-M_r wieder in eine Element-M_r,[54]) und jedes Involutionssystem S wieder in ein Involutionssystem S' übergeht.

Dagegen hat *Bäcklund*[55]) *„Flächentransformationen“*

$$x'_i = X_i(x_1 \ldots x_m,\ z_1 \ldots z_{\beta_1 \ldots \beta_m} \ldots);\quad z' = Z(x_1 \ldots) \quad (\sum \beta_i \leqq n)$$

betrachtet, vermöge deren jeder M_m des Raumes $z x_1, \ldots x_m$ eine M_m von Elementen 1. Ordnung des Raums $z' x'_1 \ldots x'_m$, aber jeder M_m des letzteren eine gewisse Schar von M_m des ersteren entspricht, und die durch sie vermittelten Beziehungen zwischen den Differentialsystemen beider Räume untersucht.

Zwischen den Flächenelementen zweier Involutionssysteme n^{ter} Ordnung mit *einer* Unbekannten können Beziehungen stattfinden, vermöge deren jedem Integral des einen Systems ein und nur ein Integral des andern entspricht[56]); dagegen können, falls $n > 1$, ausser etwaigen erweiterten Berührungstransformationen *umkehrbar endlich-*

---

53) „Tr.“ 2, p. 378—383.

54) *Bäcklund*, Math. Ann. 9, p. 297; *Engel*, Leipz. Ber. 1890, p. 203; s. III D. 7.

55) Math. Ann. 9, p. 297; 11, p. 199; 13, p. 69; 15, p. 39; 17, p. 285; 19, p. 387; den einfachsten Fall betrachtet schon „Du Bois-Reymond“ p. 166.

56) Vgl. Nr. **52**; s. daselbst auch Beispiele für Beziehungen zwischen zwei Differentialsystemen, bei denen jedem Integral des einen eine *Schar* von Integralen des andern entspricht; das allgemeinste Transformationsprinzip dieser Art formuliert *Delassus*, Ann. éc. norm. 1897, p. 238.

deutige Beziehungen dieser Art nur dann stattfinden, wenn jedes der beiden Involutionssysteme aus mehr als einer Gleichung besteht[57]).

II. Die linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer Unbekannten.

11. Die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung. Sind $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ irgend welche Funktionen der Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_m$, und hat man die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (II A 4)

$$(16) \qquad dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_m = \xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_m$$

auf die Form:

$$(17) \qquad f_1(x_1 x_2 \ldots x_m) = c_1 \ldots, \; f_{m-1}(x_1 x_2 \ldots x_m) = c_{m-1}$$

gebracht, so nennt man die f_i „Integrale" des Systems (16); sie sind durch die Eigenschaft charakterisiert, dass ihre totalen Differentiale df_i vermöge (16) verschwinden, sind also partikuläre Integrale der *linearen homogenen partiellen Differentialgleichung*

$$(18) \qquad Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist eine arbiträre Funktion von $f_1 \ldots f_{m-1}$.

Umgekehrt, kennt man $m-1$ unabhängige partikuläre Lösungen f_i von (18), so können die allgemeinen Integralgleichungen des Systems (16) in der Form (17) geschrieben werden. Die beiden Integrationsprobleme (16), (18) sind also äquivalent[58]); das simultane System (16) heisst zu der partiellen Differentialgleichung (18) adjungiert (vgl. Nr. **13**, sowie II A 4 b, Nr. **1**).

Sind die Quotienten $\xi_i : \xi_1$ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ regulär, so besitzt die Gleichung (18) ein und nur ein System von $m-1$ Partikularlösungen[59]) $h_1, h_2, \ldots h_{m-1}$, die an der Stelle x^0 regulär sind und für $x_1 = x_1^0$ bez. in $x_2, x_3 \ldots x_m$ übergehen, also die Form

$$(19) \qquad h_{i-1} = x_i + (x_1 - x_1^0)\, \mathfrak{P}_i(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots x_m - x_m^0) \quad (i = 2 \ldots m)$$

besitzen, worin die $\mathfrak{P}_i$ gewöhnliche Potenzreihen der $x_k - x_k^0$ bedeuten;

---

57) *Bäcklund*, Math. Ann. 9, p. 312; 19 p. 399—406.

58) *Lagrange*, Berl. nouv. mém., 1779, p. 121 = Werke 4, p. 585, 624; ebenda 1785, p. 174 = Werke 5, p. 543; *Jacobi*, „Dilucidationes etc." J. f. Math. 23 = Werke 4, p. 147; Historisches bei „Mansion", § 5 und 6; „Lie-Scheffers, Btr." p. 514 ff.

59) *Jacobi*, Werke 4, p. 196.

die h_i heissen die *Hauptintegrale*[60]) der Gleichung (18) hinsichtlich $x_1 = x_1^0$. Ist die Funktion $\Phi(x_2 \dots x_m)$ an der Stelle $x_2^0 \dots x_m^0$ regulär, so ist $\Phi(h_1 \dots h_{m-1})$ diejenige, an der Stelle x^0 reguläre Integralfunktion von (18), die vermöge $x_1 = x_1^0$ in $\Phi(x_2 \dots x_m)$ übergeht (Nr. 1). Sind die h_i auch an der Stelle $x_1^0 x_2' \dots x_m'$ regulär, so kann man die $m-1$ Gleichungen $h_i = x_{i+1}'$ folgendermassen auflösen:

$$x_i = x_i' + (x_1 - x_1^0)\,\mathfrak{P}_i(x_1 - x_1^0,\, x_2' - x_2^0 \dots x_m' - x_m^0) \quad (i = 2 \dots m);$$

die rechten Seiten sind diejenigen Integralfunktionen des simultanen Systems (16), die sich vermöge $x_1 = x_1^0$ auf die vorgeschriebenen Constanten $x_2' \dots x_m'$ reduzieren.

Eine willkürliche Relation zwischen den f_i (oder h_i) definiert nach *Lagrange*[61]) das allgemeine Integral x_m der *nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichung*[58])

$$\xi_1 \frac{\partial x_m}{\partial x_1} + \dots + \xi_{m-1} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}} = \xi_m \tag{20}$$

mit der Unbekannten x_m und den Independenten $x_1 \dots x_{m-1}$[62]); k derartige Relationen liefern das allgemeine Integral $x_{m-k+1} \dots x_m$ des Differentialsystems[63])

$$\xi_1 \frac{\partial x_s}{\partial x_1} + \dots + \xi_{m-k} \frac{\partial x_s}{\partial x_{m-k}} = \xi_s \quad (s = m-k+1, \dots m) \tag{21}$$

mit den Unbekannten $x_{m-k+1} \dots x_m$ und den Independenten $x_1 \dots x_{m-k}$.

Die durch (16) definierten $m-1$-fach unendlich vielen Kurven des Raums $R_m(x_1 x_2 \dots x_m)$ heissen die *Integralkurven*[64]) des simultanen Systems (16) oder auch die *Charakteristiken*[65]) der partiellen Differentialgleichung (18) oder (20). Die allgemeinste Integralfläche von (20) wird also von irgend ∞^{m-2}, die allgemeinste Integralmannigfaltigkeit des Differentialsystems (21) von irgend ∞^{m-k-1}

---

60) *Natani*, J. f. Math. 58, p. 302.

61) Berl. nouv. mém. 1779, p. 152 = Werke 4, p. 624; ebenda 1785, p. 174 = Werke 5, p. 543.

62) Eine Übertragung dieses Satzes auf eine gewisse Klasse partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit mehreren Unbekannten giebt *M. Hamburger*, J. f. Math. 100, p. 399; vgl. Nr. **58**.

63) *Jacobi*, J. f. Math. 2, p. 317 = Werke 4, p. 1; Werke 4, p. 229; vgl. Nr. **58**. Die Verallgemeinerung für vollständige Systeme (Nr. **13**) giebt *N. Saltykow*, J. de math. (5) 3, p. 423 (1897); *Mayer*, Leipz. Ber. 1899, p. 16.

64) Oder „Bahnkurven" der eingliedrigen Gruppe Xf, „Tr." 1, p. 99; vgl. II A 6.

65) Vgl. Nr. **32**, Fussn. 182.

Charakteristiken erzeugt[66]). Eine Fläche des R_m, in deren Punkten einige oder alle ξ_i algebraische Verzweigungen besitzen, ist im allgemeinen Ort von Singularitäten (Spitzen) der Charakteristiken[67]), in Spezialfällen eine singuläre[68]), nicht von Charakteristiken erzeugte Integralfläche der Gleichung (20).

Lie[69]) nennt die Ermittelung eines partikulären Integrals f_1 der Gleichung (18) eine „*Operation* $m-1$". Führt man k bekannte Lösungen f_i statt ebenso vieler x in (18) ein, so verwandelt sich Xf in einen Ausdruck mit $m-k$ Termen, und die Aufsuchung eines $k+1^{\text{ten}}$ Integrals fordert eine Operation $m-k-1$. Durch Einführung der $m-1$ Integrale f_i als neuer Independenten und eine Quadratur geht Xf über in das Symbol einer infinitesimalen Translation $\frac{\partial f}{\partial x}$ (II A 6) des R_m; umgekehrt ist mit dieser Reduktion die Integration von (18) geleistet[70]). *Lie* hat gezeigt, welchen Nutzen man hierbei aus dem Umstand ziehen kann, dass die infinitesimale Transformation Xf einer Gruppe angehört, die entweder in endlicher[71]) Form vorliegt, oder nur durch ihre Definitionsgleichungen[70]) und infinitesimalen Transformationen gegeben ist.

12. Der Jacobi'sche Multiplikator. Die Funktionaldeterminante von $f, f_1 \dots f_{m-1}$ ist für jedes f mit $\varrho \cdot Xf$ identisch; die von der Wahl der Lösungen f_i abhängende Funktion ϱ heisst ein *Jacobi'scher*[72]) *Multiplikator* der Gleichung (18) oder des simultanen Systems (16), und genügt der nichthomogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial(\varrho\,\xi_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varrho\,\xi_2)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial(\varrho\,\xi_m)}{\partial x_m} = 0. \tag{22}$$

Umgekehrt, erfüllt ϱ diese Gleichung, so giebt es immer $m-1$ Lösungen f_i von (18) derart, dass die Funktionaldeterminante von $f, f_1 \dots f_{m-1}$ mit ϱXf identisch wird. Der Quotient zweier Multiplikatoren ist konstant oder eine Lösung von (18). Geht durch

66) „Lie-Scheffers Btr." p. 516.

67) *Goursat*, Amer. J. of math. 11, p. 329.

68) *Du Bois-Reymond*, „Beitr." p. 31 f.; *Darboux*, „Sol. sing." p. 77; über die Definition der sing. Lösung mittels des Multiplikators (nächste Nr.) vgl. *Jacobi*, Werke 4, p. 358—364; *H. Weber*, J. f. Math. 66, p. 233 f. Vgl. II A 4 a, Nr. 22.

69) Math. Ann. 11, p. 530.

70) S. z. B. Leipz. Ber. 1895, p. 269.

71) Ebenda 1889, p. 287; „Tr." 3, Kap. 26.

72) „Theoria novi multiplicatoris etc.", J. f. Math. 27, p. 199; 29, p. 213, 333 = Werke 4, p. 317; vgl. „Boole" Suppl.-Vol. Kap. 31; *L. Boltzmann*, Math. Ann. 42, p. 374.

Einführung neuer Variablen $y_1 \ldots y_m$, deren Funktionaldeterminante hinsichtlich der x mit ∇ bezeichnet sei, Xf in $X'f$ über, so ist $\varrho : \nabla$, in den Variabeln y_i ausgedrückt, ein Multiplikator von $X'f = 0$. Kennt man einen Multiplikator ϱ und $m - 2$ unabhängige partikuläre Lösungen $f_1 \ldots f_{m-2}$, so erhält man f_{m-1} durch eine Quadratur *(„Prinzip des letzten Multiplikators")*[73]. Dass sich für die Bestimmung von $f_1 \ldots f_{m-2}$ aus der Kenntnis von ϱ allein kein weiterer Vorteil ziehen lässt, folgt nach *Lie*[74] daraus, dass ϱXf wegen (22) die allgemeinste infinitesimale Transformationen derjenigen (unendlichen) Gruppe des R_m ist, die die Volumina nicht ändert.

13. Vollständige Systeme. Ein gemeinsames Integral mehrerer (linear unabhängiger) Gleichungen[75]

$$(23) \qquad X_i f \equiv \sum_1^m{}_k \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

erfüllt auch alle durch *Klammeroperation* (II A 6, Nr. 5) daraus entstehenden:

$$(24) \qquad (X_i X_k) \equiv \sum_s (X_i \xi_{ks} - X_k \xi_{is}) \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,^{76})$$

die durch Elimination der 2. Ableitungen von f aus den ersten Derivierten von (23) folgen. Sind die Ausdrücke $(X_i X_k)$ für jedes f lineare Kombinationen der $X_i f$, dann und nur dann ist das System (23) passiv (Nr. 2) und heisst ein μ-gliedriges *vollständiges System (Clebsch)*. Der allgemeine Fall wird auf diesen durch Hinzufügung der Relationen (24) und erneute Klammerbildung etc. zurückgeführt. Die Eigenschaft des Differentialsystems (23), vollständig zu sein, bleibt erhalten bei beliebigen Transformationen der x_i, sowie wenn man die $X_i f$ durch irgend μ unabhängige Linearkombinationen $Y_i f$ ersetzt; diese lassen sich so wählen, dass sie ein „Jacobi'schés System" *(Clebsch)* bilden, d. h. dass alle $(Y_i Y_k)$ identisch Null sind; z. B. indem man das System (23) wie folgt auflöst:

$$(25) \qquad 0 = Y_k f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^{m-\mu}{}_h a_{kh} \frac{\partial f}{\partial x_{\mu+h}} \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu);$$

---

73) Seine Anwendungen in der Dynamik s. bei *Jacobi*, 10.—18. Vorl. über Dynamik; vgl. auch II A 4 b, Nr. **12**.

74) Leipz. Ber. 1895, p. 293.

75) *Jacobi*, Werke 5, p. 39 ff.; *Boole*, Lond. Trans. 1862, p. 437; „Boole" Suppl.Vol. Kap. 25, 26; *A. Clebsch*, J. f. Math. 65, p. 257 (1865); „Tr." 1. Kap. 5.

76) Das Gleichungensystem (23), (24) ist mit dem System (23) *invariant verknüpft, Engel*, Leipz. Ber. 1889, p. 165; vgl. Nr. **60**.

die Bedingungen der Vollständigkeit sind dann

$$(26) \quad Y_i a_{ks} - Y_k a_{is} = 0 \quad (i, k = 1, \ldots \mu;\ s = 1, 2, \ldots m - \mu).$$

Das allgemeinste, mit dem vollständigen System (23) äquivalente *Jacobi*'sche System $Y_1 f = 0, \ldots Y_\mu f = 0$ wird erhalten[77]), wenn man μ Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_\mu$ beliebig, aber so wählt, dass die Determinante der μ^2 Ausdrücke $X_i \varphi_k$ nicht identisch Null ist, und die Gleichungen

$$X_i f = \sum_1^\mu X_i \varphi_k \cdot Y_k f \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

nach den $Y_k f$ auflöst; es ist dann $Y_k \varphi_i$ gleich 1 oder 0, je nachdem die Indices i, k gleich oder verschieden sind; die Annahme $\varphi_1 = x_1 \ldots, \varphi_\mu = x_\mu$ führt auf (25).

Ist $\mu = m$, so wird das System (23) nur durch konstantes f erfüllt. Führt man im Falle $\mu < m$ die Integrale $x_2 \ldots x_\mu\, u_{\mu+1} \ldots u_m$ der ersten Gleichung des *Jacobi*'schen Systems (25) neben x_1 als neue Independente in die $\mu - 1$ andern Gleichungen (25) ein, so verwandeln sich diese in ein von x_1 freies $\mu - 1$-gliedriges *Jacobi*'sches System; $\mu - 1$-malige Wiederholung dieses Verfahrens führt zu *einer* Gleichung mit $m - \mu + 1$ Independenten, deren Integrale, in den x ausgedrückt, $m - \mu$ hinsichtlich $x_{\mu+1} x_{\mu+2} \ldots x_m$ unabhängige Partikularlösungen $f_1 \ldots f_{m-\mu}$ des vollständigen Systems (23) oder (25) liefern. Umgekehrt, besitzt das System (23) $m - \mu$ unabhängige Lösungen, so ist es vollständig. Das allgemeine Integral von (23) ist eine arbiträre Funktion der f_i. Durch das vollständige System (23) ist somit eine „*Zerlegung*" des Raums $R_m(x_1 \ldots x_m)$[78]) in $\infty^{m-\mu}$ μ-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten

$$(27) \qquad f_1(x_1 x_2 \ldots x_m) = c_1 \ldots f_{m-\mu}(x_1 x_2 \ldots x_m) = c_{m-\mu}$$

definiert, welche die *Charakteristiken* des vollständigen Systems (23) heissen. Umgekehrt gehört zu jeder Raumzerlegung (27) ein ganz bestimmtes vollständiges System (23). Jeder Punkt P des R_m liegt auf einer und nur einer Charakteristik, die auch die durch P gehenden Charakteristiken (Nr. **11**) aller partiellen Differentialgleichungen der Form $\sum \varrho_s X_s f = 0$ enthält. Irgend $\infty^{m-\mu-1}$ Charakteristiken des vollständigen Systems erzeugen die allgemeinste „Integralfläche"

$$\varphi(f_1 f_2 \ldots f_{m-1}) = 0$$

des Systems (23).

---

77) *Clebsch*, J. f. Math. 65, p. 257.

78) *Lie-Engel*, „Tr." 1, Kap. 6 und 7.

Die infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots X_\mu f$ lassen die Funktionen $f_1 \ldots f_{m-\mu}$, also auch alle Charakteristiken und Integralflächen des vollständigen Systems (23) einzeln invariant[78]).

Man sagt, das vollständige System (23) *gestattet die infinitesimale Transformation* Af,[79]) wenn Af jede Lösung, Charakteristik, Integralfläche von (23) bez. wieder in eine solche überführt; dazu ist notwendig und hinreichend, dass alle Klammerausdrücke $(X_i A)$ Linearkombinationen der $X_s f$ seien. Welche Vereinfachungen sich für die Integration vollständiger Systeme ergeben, die bekannte infinitesimale Transformationen bez. Gruppen gestatten, hat *Lie*[80]) gezeigt.

Die $m - \mu$-zeilige Funktionalmatrix der f_i und die μ-zeilige Matrix der Koefficienten ξ_{ik} sind korrespondierend[81]); der Quotient ϱ zweier komplementärer Determinanten derselben heisst ein „*Lie'scher*[82]) *Multiplikator*" des vollständigen Systems (23); für $\mu = 1$ ist er mit dem *Jacobi*'schen, für $\mu = m - 1$ mit dem *Euler*'schen Multiplikator (nächste Nr.) identisch. Ist (23) ein *Jacobi*'sches System, so ist ϱ ein *Jacobi*'scher Multiplikator jeder der Gleichungen (23)[83]); kennt man $m - \mu - 1$ Lösungen und einen *Lie*'schen Multiplikator eines *Jacobi*'schen Systems, so folgt die letzte Lösung durch Quadratur[84]).

14. Systeme totaler Differentialgleichungen. Es giebt $m - \mu$ linear unabhängige Funktionensysteme $\eta_{k1} \ldots \eta_{km}$ derart, dass

$$0 \equiv \sum_s \xi_{is} \eta_{ks} \qquad (i = 1, \ldots \mu;\ k = 1, \ldots m - \mu);$$

das Differentialsystem (23) und das System totaler Differentialgleichungen

$$\nabla_k \equiv \sum_s \eta_{ks}\, dx_s = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m - \mu) \tag{28}$$

bestimmen sich wechselseitig[85]) und heissen *adjungiert*. Ist das *Jacobi*'sche System (25) mit (23) äquivalent, so sind die Gleichungen

---

79) *Lie,* Math. Ann. 11, p. 494; 24, p. 542; „Tr." 1, Kap. 8; *Mayer,* Leipz. Ber. 1893, p. 697.

80) Math. Ann. 11, p. 494 ff.; 25, p. 71; Leipz. Ber. 1893, p. 343; 1895, p. 506; vgl. *Lie - Scheffers,* Vorlesungen über Differentialgleichungen etc., Leipz. 1891.

81) Vgl. z. B. *Gordan-Kerschensteiner,* Invariantentheorie, Leipz. 1885, 1, p. 95.

82) Math. Ann. 11, p. 501 (1877).

83) *Mayer,* Math. Ann. 12, p. 132.

84) Ebenda p. 140; über den Zusammenhang zwischen den Lösungen, Lie'schen Multiplikatoren und den inf. Transf., die ein vollst. System gestattet, vgl. *Lie,* Math. Ann. 11, p. 506; Leipz. Ber. 1895, p. 313.

85) Dieser Zusammenhang wurde zuerst von *Boole* entwickelt, Lond. Trans. 1862, p. 437; „Boole" Suppl. Vol. Kap. 25; vgl. *Mayer,* Math. Ann. 5, p. 448; die begriffliche Deutung desselben s. bei *Engel,* Leipz. Ber. 1889, p. 158.

$$(29) \qquad dx_{\mu+h} = \sum_k a_{kh}\, dx_k \qquad (h = 1, 2, \ldots m - \mu)$$

mit (28) äquivalent. Ist f eine Lösung des Differentialsystems (23), so ist df eine lineare *integrable Kombination* $\sum \varrho_s \nabla_s$ der Differentialausdrücke ∇_s, und umgekehrt; f heisst dann auch ein *Integral der totalen Differentialgleichungen* (28). Ist (23) vollständig, dann und nur dann besitzt das System (28) $m - \mu$ unabhängige Integrale (oder integrable Kombinationen) und wird *unbeschränkt integrabel* genannt; die Relationen (27) definieren für beliebige Werte der c_i ein Integraläquivalent (Nr. 8) des Systems (28) und werden als dessen *allgemeines Integral* bezeichnet. Ist insbesondere $\mu = m - 1$, so besteht das zu (23) adjungierte System aus *einer* totalen Differentialgleichung, die *„exakt"* ist, d. h. deren linke Seite durch Multiplikation mit einer Funktion ϱ, dem *„Euler'schen Multiplikator"*[86]), die Form df_1 annimmt.

Ist $Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine beliebige infinitesimale Transformation (II A 6, Nr. 4) und $\nabla \equiv \sum \eta_i\, dx_i$ irgend ein Differentialausdruck, so ist die *„charakteristische Funktion"* $A \equiv \sum \xi_i \eta_i$ eine simultane Invariante der infinitesimalen Transformation Xf und von ∇,[87]) m. a. W. geht bei beliebiger Variabelntransformation Xf in $X'f = \sum \xi_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'}$ und ∇ in $\sum \eta_i'\, dx_i'$ über, so verwandelt sich gleichzeitig A in $\sum \xi_i' \eta_i'$. Darnach ist das System (28) mit seinem adjungierten System (23) oder, was dasselbe besagt, mit der *„adjungierten Schar infinitesimaler Transformationen"*

$$(30) \qquad \varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_\mu X_\mu f$$

invariant verknüpft.

Hat das Symbol $X\nabla$ die Bedeutung

$$X\nabla = \sum \eta_i\, d\xi_i + \sum X\eta_i\, dx_i = dA + \sum\sum \xi_i \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\right) dx_k,$$

so sagt man, der Differentialausdruck ∇, bezw. die Gleichung $\nabla = 0$, *gestattet die infinitesimale Transformation* Xf,[88]) wenn $X\nabla$ identisch verschwindet, bezw. in der Form $\varrho \cdot \nabla$ darstellbar ist; ebenso sagt man, das System (28) gestattet die infinitesimale Transformation, wenn alle Ausdrücke $X\nabla_s$ in der Form $\sum \varrho_{sk} \nabla_k$ dargestellt werden können. Das System (28) ist dann und nur dann unbeschränkt in-

86) *J. Collet*, Ann. éc. norm. 1870, p. 59; *H. Laurent*, Nouv. Ann. de math. (3) 6, p. 19; „Forsyth A" Kap. 1.

87) *Engel*, Leipz. Ber. 1896, p. 414.

88) *Lie*, Norw. Arch. 2, p. 156 (1877); Leipz. Ber. 1896, p. 405; *Engel*, ebenda p. 413 ff., und 1889, p. 157 ff.

tegrabel, wenn es alle infinitesimalen Transformationen der adjungierten Schar (30) gestattet. Die Bedingungen hierfür finden für die aufgelöste Form (29) ihren Ausdruck in den Identitäten (26)[89], für die unaufgelöste Form darin, dass die $m-\mu$ Bilinearformen

$$\sum_1^m \sum_1^m \mathsf{H}_{ik}^{(s)} u_i v_k \qquad \left(s = 1, \ldots m-\mu;\ \mathsf{H}_{ik}^{(s)} = \frac{\partial \eta_{si}}{\partial x_k} - \frac{\partial \eta_{sk}}{\partial x_i}\right)$$

vermöge der Relationen

$$\sum_i \eta_{si} u_i = 0, \quad \sum \eta_{sk} v_k = 0 \quad (s = 1, \ldots m-\mu)$$

verschwinden[90], m. a. W., dass in den $m-\mu$ schiefsymmetrischen Matrices:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \mathsf{H}_{12}^{(s)} & \mathsf{H}_{13}^{(s)} \cdots & \mathsf{H}_{1m}^{(s)} & \eta_{11} \cdots \eta_{m-\mu,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathsf{H}_{m1}^{(s)} & \mathsf{H}_{m2}^{(s)} & \mathsf{H}_{m3}^{(s)} \cdots & 0 & \eta_{1m} \cdots \eta_{m-\mu,m} \\ -\eta_{11} & & \cdots -\eta_{1m} & 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\eta_{m-\mu,1} & & \cdots -\eta_{m-\mu,m} & 0 & \ldots 0 \end{Vmatrix} \quad (s = 1, 2, \ldots m-\mu)$$

alle $2m-2\mu+2$-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch null sind.

15. Jacobi's Integrationsmethode[91]. Hat man das vollständige System (23) nach Nr. **13** mittels der arbiträren Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\mu$ durch ein äquivalentes *Jacobi*'sches System

$$Y_1 f = 0, \quad Y_2 f = 0, \ldots Y_\mu f = 0 \tag{31}$$

ersetzt, und bedeutet ψ_1 ein Integral von $Y_1 f = 0$, das keine Funktion von $\varphi_2 \ldots \varphi_\mu$ allein ist, so sind auch alle Funktionen

$$\psi_2 \equiv Y_2 \psi_1; \quad \psi_3 \equiv Y_2 \psi_2 \ldots; \quad \psi_\nu \equiv Y_2 \psi_{\nu-1}$$

Integrale von $Y_1 f = 0$; ist ψ_ν die erste dieser Funktionen, derart, dass $Y_2 \psi_\nu$ in der Form $\chi(\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_\mu, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu)$ dargestellt werden kann, so giebt es immer eine Funktion χ_1 der gleichen Grössen, die auch die Gleichung $Y_2 f = 0$ erfüllt; sie ist definiert als ein beliebiges Integral des simultanen Systems

$$d\varphi_2 : d\psi_1 : \cdots : d\psi_\nu = 1 : \psi_2 : \psi_3 : \cdots : \psi_\nu : \chi.$$

Dann sind auch $\chi_2 \equiv Y_3 \chi_1$, $\chi_3 \equiv Y_3 \chi_2$ etc. Integrale der beiden ersten Gleichungen (31). Durch Wiederholung der vorigen Schluss-

89) Sie wurden von *F. Deahna*, J. f. Math. 20, p. 340 (1840), gegeben.

90) *G. Frobenius*, J. f. Math. 82, p. 267 (1876); eine geometrische Interpretation für $m = 3$, $\mu = 2$ giebt *A. Voss*, Math. Ann. 16, p. 556.

91) J. f. Math. 60, p. 26 = Werke 5, p. 29; 33. Vorl. über Dynamik; *Clebsch*, J. f. Math. 65, p. 260.

weise gelangt man zu einem gemeinsamen Integral der drei ersten Gleichungen (31) u. s. w.; schliesslich erhält man, ausgehend von der Funktion ψ_1, durch Integration gewisser simultaner Systeme, mindestens *eine* Lösung des *Jacobi*'schen Systems (31).

Ein ähnliches, im allgemeinen vorteilhafteres Integrationsverfahren giebt *A. Weiler*[92]) unter Zugrundelegung einer besonderen Normalform für das vollständige System (23).

16. Die Hauptintegrale. Benutzt man bei der ersten der Reduktionen, durch die nach Nr. **13** für das *Jacobi*'sche System (25) die Existenz der Lösungen erschlossen wird, die Hauptintegrale[93]) der ersten Gleichung (25) hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ (Nr. **11**), und verfährt man bei den weiteren Reduktionen analog, so gelangt man, falls die a_{ik} an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ regulär sind, zu $m - \mu$ an dieser Stelle regulären Integralen $h_1 h_2 \ldots h_{m-\mu}$, die sich vermöge

$$x_1 = x_1^0 \ldots x_\mu = x_\mu^0 \tag{32}$$

bez. auf $x_{\mu+1} \ldots x_m$ reduzieren und die *Hauptintegrale* des vollständigen Systems (23) (oder des adjungierten Systems (28)) *hinsichtlich* $x_1 = x_1^0 \ldots x_\mu = x_\mu^0$ heissen; dann ist $\Phi(h_1 \ldots h_{m-\mu})$ diejenige Lösung von (23) oder (25), die sich vermöge (32) auf die willkürlich vorgeschriebene Funktion $\Phi(x_{\mu+1} \ldots x_m)$ reduziert[94]). Löst man die Gleichungen

$$f_i(x_1 \ldots x_m) = f_i(x_1^0 \ldots x_m^0) \quad (i = 1, 2, \ldots m - \mu)$$

der durch den Punkt $x_1^0 \ldots x_m^0$ gehenden Charakteristik des vollständigen Systems (23) (Nr. **13**) in der Form

$$h_s(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots x_\mu^0) = x_{\mu+s}^0 \quad (s = 1, 2, \ldots m - \mu) \tag{33}$$

auf, so sind die h_s die Hauptintegrale. Die Funktionen

$$x_{\mu+s} = h_s(x_1^0 \ldots x_m^0 x_1 \ldots x_\mu)$$

der Variabeln $x_1 \ldots x_\mu$ sind an der Stelle $x_1^0 \ldots x_\mu^0$ regulär und reduzieren sich vermöge (32) bezw. auf die Konstanten $x_{\mu+s}^0$; sie erfüllen das System (29) identisch, bilden also, wenn die $x_{\mu+s}^0$ arbiträre

---

92) Zeitschr. Math. Phys. 8, p. 264 (1863); 20, p. 271 (1875); 39, p. 355 (1894); vgl. *Clebsch* a. a. O.; *Mayer*, Math. Ann. 9, p. 347.

93) *H. Grassmann* (Nr. **19**); *L. Natani*, J. f. Math. 58, p. 302; *Lie*, „Tr." 1, Kap. 5.

94) Vgl. auch *Méray*, Ann. éc. norm. 1890, p. 217; über den Zusammenhang der Hauptintegrale mit den endlichen Gleichungen der μ-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \ldots Y_\mu f$ (II A 6) vgl. *F. Schur*, J. f. Math 108, p. 313 (1891).

Konstanten bedeuten, das allgemeine Integral des wegen (26) *passiven* Differentialsystems [95])

$$(34) \qquad \frac{\partial x_{\mu+h}}{\partial x_k} = a_{kh} \qquad (h = 1, 2, \ldots m - \mu;\ k = 1 \ldots \mu).$$

Jedes *Mayer'sche System* (Nr. 3) kann auf die Form (34), also auf die Integration eines vollständigen Systems zurückgeführt werden [96]).

17. Die Lie-Mayer'sche Transformation. Führt man mit *Lie* [97]) und *Mayer* [98]) in das *Jacobi*'sche System (25) mittels der Formeln

$$(35) \qquad x_1 = x_1^0 + y_1;\quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2;\ \ldots\ x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu$$

statt $x_1 \ldots x_\mu$ die y ein, wodurch a_{ik} in $[a_{ik}]$ übergehe, so ist

$$(36) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_1^{m-\mu} h\,([a_{1h}] + y_2[a_{2h}] + \cdots + y_\mu[a_{\mu h}])\,\frac{\partial f}{\partial x_{\mu+h}} = 0$$

eine der transformierten Gleichungen. Deutet man nach *Lie* $y_2 \ldots y_\mu$ als Parameter, $y_1, x_{\mu+1} \ldots x_m$ als Koordinaten eines beliebigen Punktes auf einer der $\infty^{\mu-1}$ ebenen, $m - \mu + 1$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten $M_{m-\mu+1}$, deren Gleichungen aus (35) durch Elimination von y_1 folgen, und die einen „*Büschel*" mit der „*Axe*" (32) bilden; bestimmt man ferner auf jeder $M_{m-\mu+1}$ diejenige Charakteristik der zugehörigen Gleichung (36), die einen festen Punkt P der Axe enthält (Nr. **11**), so erzeugen diese $\infty^{\mu-1}$ Kurven die durch P gehende Charakteristik des *Jacobi*'schen Systems (25) [99]); darauf beruht es, dass die $m - \mu$ Hauptintegrale der Gleichung (36) hinsichtlich $y_1 = 0$ nach Elimination der y mittels (35) direkt in die Hauptintegrale des *Jacobi*'schen Systems (25) hinsichtlich $x_1 = x_1^0 \ldots x_\mu = x_\mu^0$ übergehen. Die Integration des vollständigen Systems (23) oder (25) ist so auf diejenige einer einzigen Gleichung (36), bezw. des adjungierten simultanen Systems von $m - \mu + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt [100]).

95) *Mayer*, Math. Ann. 5, p. 448; *C. Bouquet*, Darb. Bull. 1872, p. 265; *Méray* a. a. O.; *C. Bourlet*, Ann. éc. norm. 1891, Suppl. p. 6 ff.; *Delassus*, ebenda 1897, p. 109, bes. p. 129.

96) *Bourlet* a. a. O. p. 15; *Lie*, „Tr." 1, Kap. 10.

97) Christ. Forh. 1872, p. 28.

98) Math. Ann. 5, p. 458 f. (1872), wo eine etwas allgemeinere Transf. statt auf (25) auf das adjungierte System (29) angewendet wird.

99) Durch eine ähnliche Überlegung hatte schon *Du Bois-Reymond* die Integration einer exakten totalen Differentialgleichung auf diejenige eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt, „Beiträge" § 1; J. f. Math. 70, p. 299 (1869); Math. Ann. 12, p. 123.

100) *F. Schur* reduziert die Integration der *unaufgelösten* Form (23) auf diejenige eines Systems von m gew. Diff.gleichungen, Leipz. Ber. 1892, p. 177.

Aus jeder Lösung von (25) ergiebt sich vermöge (35) eine solche von (36), aus jedem Integral der letzteren durch algebraische Prozesse[101]) mindestens *eine* Lösung von (25). Die Integration eines μ-gliedrigen vollständigen Systems mit q bekannten Integralen erfordert je eine Operation $m - \mu - q$, $m - \mu - q - 1, \ldots 2, 1$.

III. Das Pfaff'sche Problem.

18. Historisches; Pfaff's Reduktionsmethode. Während *L. Euler*[102]) eine totale Differentialgleichung:

$$(37) \qquad 0 = \sum_1^m i a_i(x_1 x_2 \ldots x_m) dx_i = \Delta,$$

die nicht exakt ist, also nicht durch *eine* Relation der Form $f = \text{const.}$ erfüllt werden kann, als unzulässig betrachtet, bemerkt *G. Monge*[103]), dass sich die Gleichung (37) stets durch $m - 1$, ev. weniger Gleichungen in den x befriedigen lässt. Durch den Nachweis, dass wenn $m = 2n$ oder $2n - 1$ ist, Δ auf eine Form $F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$ mit nur n Differentialelementen gebracht, daher schon durch n Gleichungen der Gestalt

$$\psi(f_1 \cdots f_n) = 0,\ F_1 : F_2 : \cdots : F_n = \frac{\partial \psi}{\partial f_1} : \frac{\partial \psi}{\partial f_2} : \cdots : \frac{\partial \psi}{\partial f_n}$$

zum Verschwinden gebracht werden kann, legte *J. F. Pfaff*[104]) den Grund zu der Theorie der Gleichung (37); diese wird daher als *Pfaff'sche Gleichung*, ihre rechte Seite als *Pfaff'scher Ausdruck* bezeichnet; die Aufgabe, die Gleichung (37) durch die *kleinstmögliche* Zahl von Relationen zwischen den x zu integrieren (oder auch, Δ auf eine Form mit der kleinstmöglichen Zahl von Differentialelementen zu bringen), heisst das *Pfaff'sche Problem*.

Im Falle $m = 2n$ führt *Pfaff* statt der x neue Variable $t, y_1 \ldots y_{m-1}$ so ein, dass identisch:

$$(38) \qquad \Delta = M\Delta' = M(t, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}) \sum_1^{m-1} i b_i(y_1, y_2 \ldots y_{m-1}) dy_i.$$

Als Funktionen von $t, y_1 \ldots y_{m-1}$ betrachtet genügen dann die x einem System von Differentialgleichungen[105]) der Form:

---

101) *Mayer*, Math. Ann. 5, p. 463; vgl. „Goursat A" Art. 32; „Delassus" Art. 28.

102) Inst. Calc. Int. 3, p. 7 f.

103) Par. Mém. 1784, p. 502, bes. p. 535.

104) Berl. Abh. 1814—15, p. 76; vgl. *C. F. Gauss*, Gött. Anz. 1815, p. 1025.

105) Vgl. *Jacobi*, J. f. Math. 2, p. 347 (1827) = Werke 4, p. 19; *Mayer*, Math. Ann. 17, p. 523.

$$(39)\qquad \sum_1^m{}_k a_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial t} + \varrho a_i = 0 \quad (i = 1, \cdots m);$$

$$(40)\qquad \sum_1^m{}_k a_k \frac{\partial x_k}{\partial t} \qquad = 0 \quad \left(a_{ik} = -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right).$$

Ist, wie *Pfaff* annimmt, die Determinante $|a_{ik}|$ nicht identisch Null, so sind die y, als Funktionen der x betrachtet, die Integrale der Differentialgleichung:

$$(41)\qquad \eta_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \eta_m\frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

oder des adjungierten simultanen Systems

$$(42)\qquad dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_m = \eta_1 : \eta_2 : \cdots \eta_m,$$

wobei $\varrho, \eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ die Lösungen des Gleichungensystems

$$(43)\qquad \sum_1^m{}_k a_{ik}\eta_k + \varrho a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

bedeuten. Um diese Gleichungen aufzulösen, verstehe man unter $\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu}$ irgendwelche 2ν Indices, unter $\beta_1 \ldots \beta_{2\nu}$ eine Permutation derselben, die durch T Transpositionen entsteht (I A, 2 Nr. 3) und definiere das *Pfaff*'*sche Aggregat* $(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu})$[106]) mittels der Gleichungen:

$$(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}) \equiv (-1)^T(\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_{2\nu}),$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}) \equiv \Sigma(\alpha_1\ \alpha_2)\,(\alpha_3\ \alpha_4 \ldots \alpha_{2\nu}),$$

wo Σ eine Summe von $2\nu - 1$ Gliedern bezeichnet, die aus dem hingeschriebenen durch nullmalige, einmalige, $\ldots\ 2\nu - 2$-malige cyklische Vertauschung der Indices $\alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}$ entstehen. Setzt man dann

$$(ik) \equiv -(ki) \equiv a_{ik},\ (oi) \equiv -(io) \equiv a_i \qquad (i, k, = 1, 2, \ldots m),$$
$$P \equiv (1, 2, \ldots 2n);\ \ H_k \equiv (1, 2 \ldots k - 1, 0, k + 1 \ldots 2n),$$

so sind die Funktionen η_k, ϱ bezw. den Ausdrücken H_k, $-P$ proportional. Wählt man für die y_i die Hauptintegrale[107]) der Gleichung (41) hinsichtlich $x_m = 0$, so sind die b_i auf der rechten Seite von (38) den Funktionen $a_i\,(y_1\ y_2 \ldots y_{m-1}\ 0)$ proportional.

Im Falle $m = 2n - 1$ wendet man die vorige Reduktion auf

106) Diese Ausdrücke (in England „Pfaffians" genannt) finden sich schon bei *Pfaff*; das Symbol $(\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu})$ rührt von *Jacobi* her, a. a. O.; vgl. *A. Cayley*, J. f. Math. 38, p. 93 (1849) = Papers 1, p. 410; J. f. Math. 57, p. 273 (1860) = Papers 4, p. 359; Quart. J. 26, p. 195 (1893) = Pap. 13, p. 405.

107) *Jacobi*, J. f. Math. 17, p. 156 = Werke 4, p. 120 ff.; *J. Binet*, Par. C. R. 15, p. 74 (1842).

die ersten $m-1$ Terme von Δ an, worin x_m als Konstante gilt, und modifiziert hinterher[108]) den Koeffizienten von dx_m. Wiederholte Anwendung beider Reduktionen liefert für Δ in allen Fällen eine Form mit n Differentialelementen.

19. Grassmann's Methode; das Fundamentaltheorem. *H. Grassmann*[109]) hat *Pfaff*'s Reduktion (38) auf den Fall übertragen, dass die linearen Gleichungen (43) nicht unabhängig sind. Bedeuten $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2$ bezw. die Rangzahlen[110]) der drei Matrices

$$(A)\quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \\ a_1 & \dots & a_m \end{matrix} \right\|; \qquad (B)\quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_m \\ a_1 & \dots & a_m & 0 \end{matrix} \right\|; \qquad (C)\quad \| a_{rk} \|$$

und ist $\varkappa$ eine gerade Zahl 2λ, so ist auch $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2\lambda$; ist $\varkappa = 2\lambda - 1$, so ist $\varkappa_1 = 2\lambda$ und $\varkappa_2 = 2\lambda - 2$;[111]) $\varkappa$ ist $\leq m$ und heisst nach *Frobenius*[112]) die *Klasse des Pfaff'schen Ausdrucks* Δ. Der Fall $\varkappa = 2\lambda$ kann durch die Bedingungen

$$(44)\quad \begin{aligned} &(1, 2 \dots 2\lambda) \equiv 0; \qquad (1, 2 \dots 2\lambda - 1, 0) \equiv 0, \\ &(1, 2, \dots 2\lambda, \varrho, \sigma) \equiv 0 \qquad (\varrho, \sigma = 0, 2\lambda + 1, \dots m), \end{aligned}$$

der Fall $\varkappa = 2\lambda - 1$ durch die Bedingungen

$$(45)\quad \begin{aligned} &(1, 2, \dots 2\lambda - 2) \equiv 0; \qquad (0, 1, 2, \dots 2\lambda - 1) \equiv 0, \\ &(1, 2, \dots 2\lambda - 2, \varrho, \sigma) \equiv 0 \qquad (\varrho, \sigma = 2\lambda - 1, 2\lambda, \dots m) \end{aligned}$$

charakterisiert werden. Ein Ausdruck Δ mit m Variabeln und $\varkappa = m$ heisst *bedingungslos*. Ist $\varkappa = 1$, so ist Δ ein exaktes Differential, im Falle $\varkappa = 2$ ist die Gleichung $\Delta = 0$ exakt.

Es giebt $m - \varkappa + 1$ linear unabhängige Lösungensysteme $\eta_{i1} \dots \eta_{im} \varrho$ der Gleichungen (43), also ebensoviele Gleichungen der Form

$$(46)\qquad X_0 f = 0,\ X_1 f = 0, \dots X_{m-\varkappa} f = 0;$$

$m - \varkappa$ derselben, etwa die folgenden

$$(47)\qquad X_1 f = 0,\ X_2 f = 0, \dots X_{m-\varkappa} f = 0$$

---

108) *Gauss* a. a. O. p. 1028 (ges. Werke 3, p. 233).

109) Ausdehnungslehre 1862 = Werke 1^2, p. 345—379; vgl. *Engel*'s Note, ebenda p. 482 ff.; s. auch *Gauss* a. a. O.; *Darboux*, Darb. Bull. 1882, 1; p. 14, 49; „Forsyth A", Kap. 4.

110) d. i. die Ordnungen der höchsten nicht identisch verschwindenden Minoren; I A 2, Nr. 24.

111) *Frobenius*, J. f. Math. 82, p. 230 (1877); diese Sätze finden sich implicite schon bei *Grassmann*.

112) a. a. O. p. 291.

entsprechen den $m - \varkappa$ Lösungensystemen der Gleichungen

$$(48) \qquad \sum a_k \eta_k = 0, \qquad \sum a_{ik} \eta_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Nach *Grassmann* müssen zum Bestehen der Identität (38) die y als Funktionen der x bei geradem $\varkappa$ einer in dem System (46), nicht aber in (47) enthaltenen part. Differentialgleichung, bei ungeradem $\varkappa$ einer Gleichung des Systems (47) genügen. Der Gebrauch der *Hauptintegrale* erlaubt auch hier die Verhältnisse der b_i in (38) ihrer Form nach von vornherein anzugeben (s. die vor. Nr.). Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens, das nur für $\varkappa = 2\lambda - 1 = m$ nicht anwendbar ist, liefert für Δ eine Form $\sigma\Delta_1$, wo Δ_1 einen bedingungslosen Ausdruck in $2\lambda - 1$ Variabeln bedeutet, also nach der vor. Nr. auf eine Form mit λ Differentialelementen reduziert werden kann. Ist also $\varkappa = 2\lambda$ oder $2\lambda - 1$, so besitzt Δ eine reduzierte Form

$$(49) \qquad M(df_\lambda - \varphi_1 df_1 - \varphi_2 df_2 - \cdots - \varphi_{\lambda-1} df_{\lambda-1}),$$

worin die f_i, $\varphi_\varkappa$ unabhängig sind, und umgekehrt[113]); M ist als Funktion der φ, f darstellbar oder nicht, je nachdem $\varkappa$ ungerade oder gerade ist.

Versteht man unter $y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$ die Integrale einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, die eine Linearkombination der Gleichungen (46), nicht aber der Gleichungen (47) ist, so erhält Δ bei ungeradem $\varkappa$ nach Einführung neuer Variabler $t, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$ die Form[114]):

$$d\psi(t, y_1 \ldots y_{m-1}) + \sum_1^{m-1} \psi_i(y_1, y_2 \ldots y_{m-1}) dy_i .$$

Dieser Satz liefert in Verbindung mit *Grassmann*'s Verfahren das *Fundamentaltheorem*[115]): Je nachdem der Rang $\varkappa$ der Matrix (A) gleich 2λ oder $2\lambda - 1$ ist, kann der *Pfaff*'sche Ausdruck Δ die eine oder die andere *Normalform*

$$(50) \qquad \pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2 + \cdots + \pi_\lambda d\xi_\lambda,$$

$$(51) \qquad d\xi_\lambda - \pi_1 d\xi_1 - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1}$$

---

113) *Grassmann*, Werke 1^2, p. 355 ff., p. 483; vgl. *Jacobi*, J. f. Math. 29, p. 242 = Werke 4, p. 426 ff.; *Natani*, J. f. Math. 58, p. 314 (1860).

114) Für $m = \varkappa = 2\lambda - 1$ vgl. *Jacobi*, a. a. O. = Werke 4, p. 424; *Darboux* (Fussn. 109); diese Reduktion von Δ habe ich in meinem Buch (Kap. IV, § 3) als „Jacobi'sche Reduktion" bezeichnet.

115) Es wurde von *Clebsch* (J. f. Math. 60, p. 193, 1862) nur *postuliert*, i. J. 1876 gleichzeitig von *Lie* (Norw. Arch. 2, p. 338) mittels zweier aus *Clebsch*'s Theorie entnommener Hilfssätze, und direkt von *Frobenius* (Fussn. 111; vgl. Nr. 23), später von *Darboux* (Fussn. 109) und von *Engel* (Fussn. 155) bewiesen.

erhalten, wo die π, ξ beidemale $\varkappa$ *unabhängige* Funktionen der x bedeuten[116]).

Drückt man durch Identifizierung des Ausdrucks Δ mit der einen oder andern dieser Normalformen die a_i, a_{ik} mit Hilfe der π_i, ξ_i aus[117]), so folgt die Umkehrung dieses Theorems, sowie der Satz: Bei geradem $\varkappa$ sind $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\lambda \frac{\pi_2}{\pi_1} \cdots \frac{\pi_\lambda}{\pi_1}$[118]), bei ungeradem $\varkappa$ die Funktionen $\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1} \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}$[119]) Integrale des Systems (46); in beiden Fällen sind die $\varkappa$ Funktionen π, ξ und ebenso die Funktionen M, f, φ der reduzierten Form (49) Integrale von (47); die beiden Gleichungensysteme (46) und (47) sind also vollständig (Nr. **13**).

Führt man $\varkappa$ beliebige Lösungen $y_1 \ldots y_\varkappa$ des vollst. Systems (47) statt ebenso vieler x als neue Variabeln in Δ ein, so entsteht ein bedingungsloser Ausdruck in den Variabeln $y_1 \ldots y_\varkappa$; führt man $\varkappa - 1$ Integrale $y_1 \ldots y_{\varkappa-1}$ von (46) ein, so erhält Δ bei geradem $\varkappa$ die Form $\varrho \Delta_1$, bei ungeradem $\varkappa$ die Form $d\varphi + \Delta_1$, wo Δ_1 einen bedingungslosen Ausdruck in $y_1 \ldots y_{\varkappa-1}$ bedeutet, und φ durch Quadratur gefunden wird[120]).

20. Integraläquivalente; die allgemeinste Normalform. Ist $\varkappa = 2\lambda$ oder $2\lambda - 1$, so wird die *Pfaff*'sche Gleichung $\Delta = 0$ durch λ und nicht weniger Relationen zwischen den $\varkappa$ Funktionen π, ξ der Normalform erfüllt[121]); das allgemeinste Integraläquivalent dieser Art folgt durch Elimination der ϱ_i aus:

$$\varphi_s(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\lambda) = 0; \sum_1^q \varrho_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i} = \pi_i \quad (s = 1, \ldots q;\ i = 1, \ldots \lambda);$$

q ist eine bel. Zahl $\leqq \lambda$; die φ_s sind arbiträr; bei ungeradem $\varkappa$ ist $\pi_\lambda = -1$ zu setzen. Bei geradem $\varkappa$ wird $\Delta = 0$ möglicherweise auch durch die Relationen $\pi_1 = 0, \cdots \pi_\lambda = 0$ erfüllt. Ausserdem können ev. auch noch *singuläre Integraläquivalente* existieren, vermöge deren entweder alle a_i oder alle $\varkappa$-reihigen Determinanten der Matrix (A) verschwinden[122]).

---

116) Eine funktionentheoretisch schärfere Formulierung siehe in meinem Buch, Kap. 6, § 3.

117) *Clebsch*, a. a. O. p. 205, 222.

118) *Jacobi*, J. f. Math. 17, p. 155; 29 p. 252 = Werke 4, p. 120, 137

119) Für $m = \varkappa = 3$ vgl. *Jacobi*, J. f. Math. 29, p. 241 = Werke 4, p. 425; „Lie-Scheffers Btr." p. 198 ff.

120) *Frobenius*, a. a. O. p. 314.

121) *Lie*, „Tr." II, Kap. 4.

122) *Engel* in Bd. 1^2 von *Grassmann*'s Werken p. 472 f.; vgl. mein Buch, Kap. 7, § 2; *E. Cartan*, Ann. éc. norm. 1899, p. 239. Über die notwendigen und

Aus einer speziellen Normalform (50) bez. (51) erhält man die allgemeinste[123])

(52) $$\pi_1' d\xi_1' + \pi_2' d\xi_2' + \cdots + \pi_\lambda' d\xi_\lambda',$$

bezw. (53) $$d\xi_\lambda' - \pi_1' d\xi_1' - \pi_2' d\xi_2' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}'$$

durch eine homogene Berührungstransformation[124]) der 2λ Variabeln π_i, ξ_i, bezw. durch eine Berührungstransformation der Form[124])

(54) $$\xi_\lambda' = \xi_\lambda + \Omega, \pi_i' = \Pi_i : \xi_i' = \Xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda - 1),$$

wo die Ω, Π_i, Ξ_i Funktionen von $\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1} \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}$ bedeuten. Ebenso folgt aus einer speziellen reduzierten Form (49) die allgemeinste

$$M(df_\lambda' - \varphi_1' df_1' - \cdots - \varphi_{\lambda-1}' df_{\lambda-1}')$$

durch eine gewöhnliche Berührungstransformation der $2\lambda - 1$ Variabeln $f_\lambda, f_1 \ldots f_{\lambda-1} \varphi_1 \ldots \varphi_{\lambda-1}$. Für ξ_1' (ebenso für f_1' im Falle eines geraden $\varkappa$) kann dabei ein beliebiges Integral des Systems (46), bei ungeradem $\varkappa$ für f_1' irgend eine Lösung von (47), also, wenn $\varkappa = 2\lambda - 1 = m$, eine arbiträre Funktion der x genommen werden.

21. Transformationen eines Pfaff'schen Ausdrucks[125]). Die Klasse $\varkappa$ ist *die einzige Invariante* des *Pfaff*'schen Ausdrucks Δ bei beliebiger Transformation der x, m. a. W.: nennt man einen Ausdruck Δ' in den Variabeln $x_1' \ldots x_m'$ *mit* Δ *äquivalent*, wenn Δ durch eine Variabelntransformation in Δ' verwandelt werden kann, so bestehen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Äquivalenz von Δ und Δ' darin, dass Δ' ebenfalls die Klasse $\varkappa$ besitzt. Ist unter dieser Annahme der Ausdruck (52) bez. (53) (worin die π', ξ' Funktionen der x_i' bedeuten) die allgemeinste Normalform von Δ', ferner (50) bezw. (51) eine spezielle von Δ, so erhält man die allgemeinste Transformation von Δ' in Δ, wenn man die $\varkappa$ Relationen $\xi' = \xi, \pi' = \pi$ und $m - \varkappa$ beliebige Gleichungen in x, x' nach den x' auflöst. Die einzige Invariante der *Pfaff*'schen *Gleichung* $\Delta = 0$ ist der Rang 2λ

---

hinreichenden Bedingungen dafür, dass r gegebene Relationen in den x den Ausdruck Δ annullieren, bez. auf einen Ausdruck mit $m - r$ Variabeln und vorgeschriebener Klasse reduzieren, und über die damit zusammenhängende Aufgabe, r gegebene Relationen durch die kleinstmögliche Zahl von Gleichungen zu einem Integraläquivalent von $\Delta = 0$ zu ergänzen, s. mein Buch, Kap. IX, § 4 und *Cartan* a. a. O. (vgl. auch Nr. 26). Auch das letztere Problem gestattet eventuell singuläre Lösungen (*Cartan* p. 285).

123) *Clebsch*, J. f. Math. 60, p. 196, 220; dass man nicht zwei Normalformen verschiedener Klassen identisch setzen kann, zeigt *Lie* (Arch. 2, p. 343 ff.) unabhängig vom Fundamentaltheorem.

124) *Lie*, „Tr." 2, p. 135; ebenda p. 125 ff.

125) *Frobenius*, a. a. O. § 25—27.

der Matrix (B) (Nr. **19**); d. h. ist für Δ und Δ' diese Zahl dieselbe und $\sum F_i df_i$ eine reduzierte Form von Δ mit λ Termen (Nr. **19**), $\sum F_i' df_i'$ die allgemeinste derartige Form von Δ', so ist $\Delta' = \varrho\Delta$ vermöge jeder Variabelntransformation, die die Gleichungen $f_i' = f_i$; $F_1' : \ldots : F_\lambda' = F_1 : \ldots : F_\lambda$ umfasst. Bedeutet Δ' das in den x' geschriebene Δ, so erhält man aus dem vorigen die allgemeinste Transformation des *Pfaff*'schen Ausdrucks Δ, bezw. der *Pfaff*'schen Gleichung $\Delta = 0$ *in sich*.

22. Reduktionsmethoden von Clebsch und Lie. Ordnung und Zahl der zur Herstellung der Normalform von Δ nötigen Operationen lassen sich bedeutend verringern. *L. Natani*[126]) und *A. Clebsch*[115]) wählen, einer *Jacobi*'schen Idee[127]) folgend, für das ξ_1 in dem Ausdruck (50) bezw. (51) ein beliebiges Integral des vollst. Systems (46), und schaffen mittelst der Relation $\xi_1 = c_1$ eines der x aus Δ weg, wodurch ξ_i, π_i, Δ bez. in $\xi_i^{(1)}, \pi_i^{(1)}, \Delta^{(1)}$ übergehen. Dann ist $\Delta^{(1)}$ ein Ausdruck $\varkappa - 2^{\text{ter}}$ Klasse mit $m - 1$ Variabeln[128]) und besitzt die Normalform:

$$\sum_2^{\lambda} \pi_i^{(1)} d\xi_i^{(1)} \quad \text{bezw.} \quad d\xi_\lambda^{(1)} - \sum_2^{\lambda-1} \pi_i^{(1)} d\xi_i^{(1)};$$

$\xi_2^{(1)}$ ist ein beliebiges Integral des zu $\Delta^{(1)}$ gehörigen, dem System (46) analogen $m - \varkappa + 2$-gliedrigen vollst. Systems in $m - 1$ Independenten, und geht in ξ_2 über, wenn man die Konstante c_1 durch ξ_1 ersetzt. Die Wegschaffung eines der x aus $\Delta^{(1)}$ mittels der Gleichung $\xi_1^{(1)} = c_2$ führt ebenso zu einem Ausdruck $\Delta^{(2)}$ $\varkappa - 4^{\text{ter}}$ Klasse in $m - 2$ Variabeln etc. Man erhält bei geradem $\varkappa$ durch $\lambda = \frac{1}{2}\varkappa$ solcher Reduktionen die $\xi_1 \ldots \xi_\lambda$, worauf $\pi_1 \ldots \pi_\lambda$ sich aus der Vergleichung von Δ mit (50) ergeben. Bei ungeradem $\varkappa$ liefern $\lambda - 1$ Reduktionen die Funktionen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\lambda-1}$ und einen Ausdruck $\Delta^{(\lambda-1)}$ der Klasse 1, d. h. ein exaktes Differential, worauf ξ_λ durch Quadratur, die π_i wie vorhin folgen.

Clebsch ermittelt je ein Integral $\xi_1, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(2)} \ldots$ der successiven vollst. Systeme mit Hilfe der *Jacobi*'schen Methode (Nr. **15**). Nach der Methode der Nr. **17** erfordert diese Bestimmung für $\varkappa = 2\lambda$ je eine Operation $\varkappa - 1, \varkappa - 3, \ldots 3, 1$, für $\varkappa = 2\lambda - 1$ je eine Ope-

126) J. f. Math. 58, p. 318.

127) Ebenda 27, p. 253 = Werke 4, p. 438; vgl. *Cayley*, J. f. Math. 57, p. 273 = Papers 4, p. 359.

128) Einen direkten Beweis dieses Satzes siehe in meinem Buche, Kap. 6, § 1; vgl. auch *Engel* (Fussn. 155).

ration $\varkappa - 1, \varkappa - 3, \ldots 4, 2$ und eine Quadratur[129]). Ist $x_1^0 \ldots x_m^0$ eine Stelle, an der alle Koeffizienten a_i von Δ regulär sind, und bei geradem $\varkappa$ die *Pfaff*'schen Aggregate (44), bei ungeradem $\varkappa$ die Aggregate (45) nicht verschwinden, so lässt sich das vollst. System (46) nach den Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}$ auflösen, und die Koeffizienten der aufgelösten Form sind an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ regulär; die Trf. von Nr. 17 lautet dann:

$$(55) \qquad x_{\varkappa+s} = x_{\varkappa+s}^0 + (x_\varkappa - x_\varkappa^0) y_{\varkappa+s} \qquad (s = 1, 2, \ldots m - \varkappa).$$

Lie[130]) übt diese Trf., statt auf das vollst. System (46), direkt auf Δ aus, wobei die $y_{\varkappa+s}$ als Konstante gelten, verwandelt so Δ in einen bedingungslosen Ausdruck Δ' mit den $\varkappa$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_\varkappa$, aus dessen Normalform die von Δ durch blosse Eliminationen (bei ungeradem $\varkappa$ ausserdem noch mittels einer Quadratur) erhalten wird, und wendet das analoge Verfahren immer von neuem auf die *Pfaff*'schen Ausdrücke an, die aus Δ' durch die successiven Reduktionen der *Clebsch*'schen Methode hervorgehen.

23. Methode von Frobenius[131]). Der Differentialausdruck $\sum\sum a_{ik} dx_i \delta x_k$ heisst *die bilineare Covariante* des *Pfaff*'schen Ausdrucks Δ; unterwirft man nämlich die x_i irgend einer Transformation $x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_m)$, und dementsprechend die beiden Systeme von Differentialen dx_i und δx_i den Transformationen:

$$dx_i' = \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k; \quad \delta x_i' = \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \delta x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

so verwandeln sich die drei Differentialausdrücke

$$(56) \qquad \sum a_i dx_i; \quad \sum a_i \delta x_i; \quad \sum\sum a_{ik} dx_i \delta x_k$$

gleichzeitig in die folgenden

$$\sum a_i' dx_i'; \quad \sum a_i' \delta x_i'; \quad \sum\sum a_{ik}' dx_i' \delta x_k' \qquad \left(a_{ik}' = \frac{\partial a_i'}{\partial x_k'} - \frac{\partial a_k'}{\partial x_i'}\right).$$

---

129) Wählt man bei ungeraden $\varkappa$ für ξ_1 eine Funktion, die das System (47), nicht aber (46) erfüllt, also im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1 = m$ eine arb. Funktion, so hat $\Delta^{(1)}$ die Klasse $\varkappa - 1$, und obige Methode führt durch je eine Operation $\varkappa, \varkappa - 2 \ldots 3, 1$ auf *Grassmann*'s Form mit $\frac{1}{2}(\varkappa + 1)$ Termen; vgl. *Clebsch*, J. f. Math. 60, p. 224 ff.

130) *Lie*, Christ. Forh. 1873, p. 320; Norw. Arch. 2, p. 368 ff.

131) J. f. Math. 82, p. 230, vgl. auch *G. Morera*, Tor. Mem. 18, p. 521 (1882); über die Einführung zweier verschiedener Systeme von Differentialen vgl. *Binet* (Fussn. 107); *Natani*, J. f. Math. 58, p. 307; eine Darstellung der Frobenius'schen Theorie mittels symbolischer Methoden giebt *É. Cartan* (Fussn. 122).

Ist ferner Δ in der Form

$$\sum_1^r i\, F_i(x_1 x_2 \ldots x_m)\, df_i(x_1 \ldots x_m) \tag{57}$$

darstellbar, so verschwinden die drei Ausdrücke (56) identisch vermöge der Relationen

$$\sum f_{ik}\, dx_k = 0;\ \sum f_{ik}\, \delta x_k = 0 \qquad \left(i = 1 \ldots r;\ f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$$

und umgekehrt. Die Aufgabe, alle bei beliebiger Transformation der x invarianten Eigenschaften von Δ zu finden, bezw. den Ausdruck Δ auf eine Form (57) mit der kleinstmöglichen Zahl r von Differentialtermen zu bringen, führt also zunächst zu dem *rein algebraischen Problem* (I B 2, Nr. 3), die Invarianten des Formensystems

$$\sum a_i u_i;\ \sum a_i v_i;\ \sum\sum a_{ik} u_i v_k \qquad (a_{ik} = -a_{ki}), \tag{58}$$

bei beliebigen kongruenten linearen Transformationen der beiden Variabelngruppen u und v anzugeben[131a]), bezw. die 3 Formen (58) durch die kleinstmögliche Zahl r von Relationenpaaren

$$\sum f_{ik} u_k = 0;\ \sum f_{ik} v_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

zum Verschwinden zu bringen, wobei die a_i, a_{ik}, f_{ik} Konstante bedeuten. Der Rang $\varkappa$ der Matrix (A) (Nr. 19) erweist sich als die einzige Invariante des Formensystems (58). Bezeichnet man ferner mit 2λ den Rang der Matrix (B) (Nr. 19), und mit (B_μ) die Matrix

$$(B_\mu) \qquad \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1m} & a_1 & f_{11} & \ldots & f_{\mu 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & 0 & a_m & f_{1m} & \ldots & f_{\mu m} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\mu 1} & f_{\mu 2} & \ldots & f_{\mu m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|,$$

so ist $r = \lambda$, und die Konstanten f_{ik} müssen so bestimmt werden, dass auch (B_λ) den Rang 2λ besitzt. Hat man die f_{hi} $(h < \mu)$ so bestimmt, dass die Matrices (B_1), $(B_2) \ldots (B_{\mu-1})$ alle den Rang 2λ besitzen, so erhält man durch Nullsetzen aller $2\lambda + 1$-reihigen Determinanten von (B_μ) für die Unbekannten $f_{\mu 1} f_{\mu 2} \ldots f_{\mu m}$ ein System von $m - 2\lambda + \mu$ linearen homogenen Gleichungen; diese verwandeln sich, wenn die a_i, a_{ik}, f_{ik} ihre frühere Bedeutung erhalten, in ein

131a) Vgl. auch *G. Morera*, Tor. Atti 18, p. 383 (1882).

$m - 2\lambda + \mu$-gliedriges vollständiges[132]) System mit der Unbekannten f_μ und den Independenten $x_1 \ldots x_m$, das ausser $f_1 \ldots f_{\mu-1}$ noch $2\lambda - 2\mu + 1$ Integrale besitzt, solange $\mu \leq \lambda$. Es folgt so aufs neue *Grassmann*'s Theorem, dass Δ auf λ und nicht weniger Differentialelemente reduziert werden kann. Das vollständige System für f_λ ergiebt sich auch durch Nullsetzen aller $\lambda + 1$-reihigen Determinanten des Schemas:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\lambda 1} & f_{\lambda 2} & \ldots & f_{\lambda m} \end{matrix} \right\|;$$

umgekehrt, drückt man mit *J. Zantschewsky*[133]) aus, dass solcherweise für f_λ ein $m - \lambda$-gliedriges *vollständiges* System erhalten wird, so kommt man auf das obige Verfahren zur Bestimmung von $f_1 \ldots f_{\lambda-1}$ zurück; noch einfacher ergiebt sich dies Verfahren, wenn man nach Nr. **14** die Bedingungen dafür aufschreibt, dass das System $\Delta = 0$, $df_1 = 0, \ldots df_{\lambda-1} = 0$ unbeschränkt integrabel ist[134]).

Ist P das *Pfaff*'sche Aggregat $(1, 2, \ldots 2\lambda)$ (Nr. **19**) und definiert man das Symbol P_{ik} durch die Gleichungen:

$$(-1)^{i+k+1} P_{ik} \equiv (1, 2, \ldots i-1, i+1 \ldots k-1, k+1 \ldots 2\lambda) \quad (i<k)$$
$$P_{ik} \equiv -P_{ik}; \; P_{ii} \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots 2\lambda),$$

setzt man ferner:

$$(59) \quad (\varphi f) = \sum_1^{2\lambda} \sum_1^{2\lambda} \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}; \; (f) = \sum_1^{2\lambda} \sum_1^{2\lambda} a_i \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

so kann man das vollständige System, dem f_μ zu genügen hat, im Falle $k = 2\lambda$ so schreiben:

$$(60) \quad \begin{cases} 0 = (f) = X_0 f; \; X_1 f = 0, \ldots X_{m-\varkappa} f = 0 \quad \text{(vgl. Nr. 19)}, \\ (f_1 f) = 0, \; (f_2 f) = 0, \ldots (f_{\mu-1} f) = 0.^{135}) \end{cases}$$

Hat man $f_1 \ldots f_\lambda$ bestimmt, so erhält man für Δ eine Normalform

$$(61) \qquad F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_\lambda df_\lambda,$$

worin die F_i durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit Δ bestimmt werden. Das vollständige System für f_1 ist mit (46) identisch; man

132) *Frobenius*, a. a. O. § 19 und 22; vgl. *M. Hamburger*, Arch. Math. 60, p. 203 (1877).

133) Ann. éc. norm. 1896, p. 267.

134) S. mein Buch, Kap. 9, § 1.

135) Für $\varkappa = 2\lambda = m$ vgl. *Natani*, J. f. Math. 58, p. 321; *Clebsch*, ebenda 60, p. 243; 61, p. 146 (1862).

erhält zur successiven Bestimmung der f_i die Methode der Nr. 22, wenn man $\mu - 1$ der x_i mittels:

$$f_1 = c_1 \cdots f_{\mu-1} = c_{\mu-1}$$

aus dem vollständigen System (60) wegschafft [136]).

Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ lautet das vollständige System, dem f_μ zu genügen hat, so:

$$X_1 f = 0,\ X_2 f = 0, \cdots X_{m-\varkappa} f = 0,$$
$$[f_1 f] = 0,\ [f_2 f] = 0, \cdots [f_{\mu-1} f] = 0,$$ [137])

wenn gesetzt wird:

$$[\varphi f] = -\sum_1^{\varkappa}{}_i \sum_1^{\varkappa}{}_k \frac{Q_{ik}}{Q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{62}$$

und Q das Aggregat $(0, 1, \ldots 2\lambda - 1)$ bedeutet, während die Q_{ik} ähnlich wie die P_{ik} definiert sind. Man erhält durch je eine Operation $\varkappa, \varkappa - 2, \ldots 3, 1$ (vgl. Fussn. 128) eine reduzierte Form (61).

Um auch im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ eine *Normalform* zu erhalten [138]), kann man entweder f_λ so bestimmen, dass der Ausdruck $\Delta' = \Delta - df_\lambda$ die Klasse $2\lambda - 2$ besitzt [139]), und Δ' nach dem obigen auf eine Normalform bringen; oder man ermittelt $\lambda - 1$ Funktionen $f_1 \ldots f_{\lambda-1}$ derart, dass die Matrix $(C_{\lambda-1})$, die aus $(B_{\lambda-1})$ durch Streichung der $m + 1^{\text{ten}}$ Zeile und Spalte entsteht, den Rang $2\lambda - 2$ besitzt; f_1 ist dann ein beliebiges Integral von (46), und das vollständige System, dem f_μ zu genügen hat, entsteht aus (46) durch Hinzufügung der Relationen:

$$\sum_1^{\varkappa-1}{}_i \sum_1^{\varkappa-1}{}_k \frac{P'_{ik}}{P'} \frac{\partial f_h}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (h = 1 \cdots \mu - 1),$$

worin P' das Aggregat $(1, 2 \ldots 2\lambda - 2)$ bedeutet und die P'_{ik} ähnlich wie die P_{ik} definiert sind. Sind $f_1 \ldots f_{\lambda-1}$ bestimmt, so findet man für Δ eine Normalform

$$df_\lambda + F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1},$$

worin f_λ durch eine Quadratur, die F_i sodann durch Vergleichung

---

136) Den umgekehrten Weg zeigt *Clebsch*, J. f. Math. 60, p. 232—242 für den Fall $m = \varkappa$.

137) *Natani*, a. a. O. p. 312 f.; *Hamburger*, a. a. O. p. 203 ff.

138) *Frobenius*, a. a. O. § 26.

139) Über die Änderung der Klasse bei Subtraktion eines Differentials oder Multiplikation mit einer Funktion der x (bes. für homogene a_i) vgl. *Frobenius*, J. f. Math. 86, p. 1 (1879) und mein Buch, Kap. 3, § 2; Kap. 5, § 3.

dieses Ausdrucks mit Δ ermittelt werden. Die Methode kann auf die der Nr. 22 zurückgeführt werden.

24. Die Theorie der Berührungstransformationen als Spezialfall der Theorie des Pfaff'schen Problems. Führt man die $\varkappa$ Funktionen π, ξ der Normalform (50) bez. (51) statt ebensovieler x als neue Independente ein[140]), so erhält man für (f), (φf), $[\varphi f]$ bezw. die Ausdrücke:

$$\sum_1^{\lambda} \pi_s \frac{\partial f}{\partial \pi_s}; \quad \sum_1^{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s} \frac{\partial f}{\partial \xi_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_s} \frac{\partial f}{\partial \pi_s};$$

$$\sum_1^{\lambda-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_s} + \pi_s \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda} \right) - \frac{\partial f}{\partial \pi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_s} + \pi_s \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\lambda} \right).$$

Für den *Pfaff*'schen Ausdruck $p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$ mit den $2m$ Variabeln $x_i p_i$ haben also die Symbole (59) folgende Bedeutung:

$$(63) \qquad (f) = \sum_1^m p_s \frac{\partial f}{\partial p_s}; \quad (\varphi f) = \sum_1^m \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s}\ ^{141}).$$

Für den *Pfaff*'schen Ausdruck $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m$ hat man:

$$(64) \qquad [\varphi f] = \sum_1^m \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Aus der vorigen Nr. erhält man jetzt leicht folgende, von *Lie* herrührende Sätze[142]):

Damit $2m$ unabhängige Funktionen $X_i P_i$ der Variabeln x, p die Identität

$$(65) \quad P_1 dX_1 + P_2 dX_2 + \cdots + P_m dX_m = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m$$

erfüllen, also die rechten Seiten einer *homogenen Berührungstransformation*

$$x_i' = X_i; \quad p_i' = P_i \qquad (i = 1 \cdots m)$$

bilden, ist notwendig und hinreichend, dass sie den Identitäten

$$(66) \quad (X_i X_k) = (P_i P_k) \equiv (P_i X_k) = 0; \quad (P_i X_i) \equiv 1 \quad (i, k = 1 \cdots m;\ i \neq k)$$

genügen, und dass die X_i in den p homogen nullter Ordnung, die P_i homogen erster Ordnung seien. Ist X_1 eine beliebige Funktion der

---

140) Vgl. mein Buch, Kap. 10, § 3; für $\varkappa = 2\lambda = m$ *Clebsch* (Fussn. 135).

141) In dieser Bedeutung findet sich das Symbol (φf) schon bei *S. D. Poisson*, J. éc. polyt. 8, cah. 15, p. 266 (1809).

142) Vgl. III D 7 und *Lie* „Tr." 2, Kap. 5; *A. Mayer*, Math. Ann. 8, p. 304 (1875); mein Buch, Kap. 11.

x, p und in den p_i homogen nullter Ordnung, so kann man $m-1$ weitere Funktionen $X_2 \dots X_m$ so bestimmen, dass eine Identität der Form (65) stattfindet, und zwar ist für jeden Index μ der Reihe $1 \cdots m-1$ die Funktion $X_{\mu+1}$ ein Integral des $\mu+1$-gliedrigen vollständigen Systems

$$\sum p_s \frac{\partial f}{\partial p_s} = 0, \quad (X_1, f) = 0 \cdots (X_\mu, f) = 0 \tag{67}$$

mit den bekannten Lösungen $X_1 \dots X_\mu$, wird also durch eine Operation $2m-2\mu-1$ gefunden.

Damit $2m+2$ Funktionen ϱ, Z, X_i, P_i der Variabeln z, x_i, p_i die Identität:

$$dZ - \sum_1^m P_i dX_i \equiv \varrho \left(dz - \sum_1^m p_i dx_i \right) \quad (\varrho \not\equiv 0) \tag{68}$$

erfüllen, damit also die Gleichungen

$$z' = Z; \; x_i' = X_i, \; p_i' = P_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

eine Berührungstransformation darstellen, ist notwendig und hinreichend, dass die Identitäten:

$$\begin{cases} [X_i X_k] \equiv [X_i Z] \equiv [P_i X_k] \equiv [P_i P_k] \equiv 0 \; (i,k = 1,2 \cdots m; i \neq k), \\ [P_i X_i] \equiv \varrho; \; [P_i Z] \equiv \varrho P_i, \end{cases} \tag{69}$$

$$[\varrho X_i] + \varrho \frac{\partial X_i}{\partial z} \equiv [\varrho P_i] + \varrho \frac{\partial P_i}{\partial z} \equiv [\varrho Z] + \varrho \frac{\partial Z}{\partial z} - \varrho^2 \equiv 0 \; ^{143}) \tag{70}$$

stattfinden. Ist X_1 beliebig gegeben, so kann man die Funktionen $X_2 \cdots X_m Z$ so bestimmen, dass eine Identität (68) besteht, und zwar ist $X_{\mu+1}$ eine Lösung des vollständigen Systems

$$[X_1, f] = 0 \cdots [X_\mu, f] = 0, \tag{71}$$

von dem die Lösungen $X_1 \dots X_\mu$ bereits bekannt sind; hat man so die X_i durch je eine Operation $2m-1$, $2m-3, \cdots 3$ gefunden, so erhält man Z durch eine Operation 1, und die Funktionen P_i und ϱ durch Auflösung linearer Gleichungen.

Damit $2m$ unabhängige Funktionen X_i P_i der $2m$ Variabeln $x_1 \dots x_m$, $p_1 \dots p_m$ eine Identität der Form

$$d\Omega(x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m) + \sum_1^m P_i dX_i \equiv \sum_1^m p_i dx_i \tag{72}$$

erfüllen, ist notwendig und hinreichend, dass sie die Bedingungen (66) erfüllen; ist X_1 beliebig vorgegeben, so kann man $X_2 \dots X_m$ so

143) Diese drei letzten Identitäten folgen mittels der *Mayer*'schen Identität (nächste Nr. 25) aus (69).

bestimmen, dass eine Identität (72) stattfindet und zwar ist $X_{\mu+1}$ eine Lösung des *Jacobi*'schen Systems

$$(X_1 f) = 0 \cdots (X_\mu f) = 0, \tag{73}$$

welches die Integrale $X_1 \ldots X_\mu$ besitzt, wird also durch eine Operation $2m - 2\mu$ gefunden. Ω erhält man dann durch eine Quadratur, die P_i aus (72) durch Auflösung linearer Gleichungen.

25. Die Jacobi'sche und die Mayer'sche Identität. Die Klammersymbole (63) genügen den Identitäten:

$$(f(\varphi\psi)) + (\varphi(\psi f)) + (\psi(f\varphi)) \equiv 0; \tag{74}$$

$$(f)\varphi) + (f(\varphi)) + (\varphi f) = (f\varphi)). \tag{75}$$

Erstere heisst die *Jacobi*'sche[144]) *Identität*; letztere ist ein Spezialfall der *Mayer*'schen[145]) *Identität*:

$$\big[f[\varphi\psi]\big] + \big[\varphi[\psi f]\big] + \big[\psi[f\varphi]\big] \equiv \frac{\partial f}{\partial z}[\varphi\psi] + \frac{\partial \varphi}{\partial z}[\psi f] + \frac{\partial \psi}{\partial z}[f\varphi].$$

Aus (74) folgt das *Poisson*'sche[146]) *Theorem*, wonach aus zwei bekannten Lösungen ψ und χ der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung $(\varphi f) = 0$ eine dritte in der Form $(\psi\chi)$ erhalten wird[147]). Die Identitäten (74), (75) gelten auch, wenn die Klammersymbole die Bedeutung (59) haben; sie dienen dann im Falle $\varkappa = 2\lambda = m$ nach *Clebsch*[148]) dazu, aus bekannten Integralen der partiellen Differentialgleichung $(f)=0$ neue abzuleiten, auch *Jacobi*'s[149]) Sätze über den Multiplikator dieser Gleichung zu beweisen.

26. Verallgemeinerung der Frobenius'schen Theorie[150]). Sind die Funktionen $f_1 \ldots f_\mu$ beliebig gegeben und eliminiert man aus Δ mittels der Relationen

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2 \cdots f_\mu = c_\mu$$

μ von den Variabeln x, so verwandelt sich Δ in einen *Pfaff*'schen Ausdruck mit $m - \mu$ Variabeln und der Klasse $\sigma + \sigma' - 2\mu$, wenn

144) J. f. Math. 60, p. 42 = Werke 5, pag. 46; eine begriffliche Deutung s. bei *Lie*, „Tr." 2, p. 278—280.

145) Math. Ann. 9, p. 370; vgl. auch „Goursat A" Art. 142.

146) J. éc. polyt. 8, cah. 15, p. 281, Art. 7 (1809); *Jacobi*'s Werke 5, p. 47, vgl. Nr. **41** (Fussn. 234a).

147) Über die Tragweite dieses Theorems, bes. für die Dynamik, vgl. *J. Bertrand*, J. de math. (1) 17, p. 393 (1852).

148) J. f. Math. 60, p. 246; 61, p. 160.

149) J. f. Math. 29, p. 236 = Werke 4, p. 420; vgl. II A 4 b, Nr. **12**.

150) Mein Buch, Kap. 9, § 4; *É. Cartan*, Fussn. 122.

2σ, $2\sigma'$ bez. die Rangzahlen der Matrices (B_μ) (C_μ)[151]) bezeichnen, und es ist σ die kleinste Zahl derart, dass Δ in der Form

$$F_1 df_1 + \cdots + F_\mu df_\mu + F_{\mu+1} df_{\mu+1} + \cdots + F_\sigma df_\sigma$$

dargestellt werden kann; σ' ist gleich σ oder $\sigma - 1$; im letztern Falle kann man erreichen, dass $F_\sigma = 1$ wird. Mittels eines Determinantensatzes von *J. J. Sylvester*[152]) lassen sich die Schemata (B_μ) (C_μ) ersetzen durch Matrices, deren Elemente gewisse aus $f_1 \ldots f_\mu$ gebildete Klammersymbole sind. So erhält man z. B. den Satz:

Der *Pfaff*'sche Ausdruck $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m$ reduziert sich vermöge der Relationen

$$f_i(z, x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \tag{76}$$

auf einen Ausdruck in $2m + 1 - \mu$ Variabeln und mit der Klasse

$$2(\varrho + m - \mu) + 1 \quad \text{oder} \quad 2(\varrho + m - \mu) + 2,$$

wenn die Matrix

$$\| [f_i f_k] \| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots \mu) \tag{77}$$

vermöge (76) den Rang 2ϱ besitzt, und das Symbol [ ] die Bedeutung (64) hat. Damit also die Gleichungen (76) eine Element-$M_{2m+1-\mu}$ definieren (Nr. 9), ist notwendig und hinreichend, dass $2\mu - 2m - 2$ der Rang der Matrix (77) sei[153]); damit $\mu = m + 1$ Relationen (76) eine Element-M_m darstellen, ist notwendig und hinreichend, dass alle Ausdrücke $[f_i f_k]$ vermöge (76) verschwinden, m. a. W.: enthalten die $m + 1$ Definitionsgleichungen einer Element-M_m die Relation $\varphi(z, x_1 \ldots p_m) = 0$, so gestatten sie die infinitesimale Transformation $[\varphi f]$.[154])

27. Beziehungen zwischen Pfaff'schen Ausdrücken und infinitesimalen Transformationen[155]). Die allgemeinste infinitesimale Transformation $Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, die den Bedingungen

$$0 = \sum a_i \xi_i = A; \quad X\Delta = 0 \qquad \text{(vgl. Nr. 14)}$$

genügt, hat die Form

$$\varrho_1 X_1 f + \varrho_2 X_2 f + \cdots + \varrho_{m-\varkappa} X_{m-\varkappa} f \qquad \text{(vgl. Nr. 19)}, \tag{78}$$

151) (C_μ) entsteht aus (B_μ) durch Streichung der $m+1^{\text{ten}}$ Zeile und Spalte.

152) Phil. Mag. 1851, p. 279; vgl. *Frobenius*, J. f. Math. 86, p. 54.

153) *A. V. Bäcklund*, Math. Ann. 11, p. 412 (1877).

154) *Lie*, „Tr." 2, Kap. 4; für den *Pfaff*'schen Ausdruck $p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$ gelten analoge Sätze, vgl. *Lie* ebenda und mein Buch a. a. O.

155) *Lie*, Norw. Arch. 2, p. 156 (1877); Leipz. Ber. 1896, p. 405; *Engel*, ebenda p. 413; vgl. mein Buch Kap. 10.

wo die ϱ_i arbiträre Funktionen bedeuten; die allgemeinste infinitesimale Transformation, die bei geradem $\varkappa$ den Bedingungen

$$0 \equiv A; \quad X\Delta \equiv \varrho\Delta^{156})$$

und bei ungeradem $\varkappa$ der Bedingung

$$X\Delta \equiv dA^{157})$$

genügt, hat die Gestalt:

$$\varrho_0 X_0 f + \varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_{m-\varkappa} X_{m-\varkappa} f; \tag{79}$$

man erhält so den Satz, dass die beiden Differentialsysteme (46) und (47) vollständig und mit Δ invariant verknüpft sind, und hieraus eine einfache invariantentheoretische Begründung der Theorie des *Pfaff*'schen Problems[158]). So ergiebt sich z. B. die *Pfaff-Grassmann*'sche Reduktionsmethode (Nr. **18**, **19**) unmittelbar aus der That sache[159]), dass die *Pfaff*'sche Gleichung $\Delta = 0$ in den Fällen $\varkappa = 2\lambda$ bezw. $2\lambda - 1$ durch alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe (II A 6), die von einer infinitesimalen Transformation der Form (79) bezw. (78) erzeugt ist, in sich übergeführt wird (Nr. **21**).

IV. Die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten.

28. Methoden von Lagrange und Pfaff. Nachdem *L. Euler*[160]) verschiedene spezielle Kategorien von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen der Form

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{80}$$

integriert hatte, gelang es zuerst *J. L. Lagrange*[161]), die allgemeine Gleichung (80) auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück-

156) Die Gesamtheit der inf. Transf., die der Gleichung $X\Delta \equiv \varrho\Delta$ genügen, wurde in Spezialfällen von *G. Vivanti* (Pal. Rend. 12, p. 1, 1898), allgemein von mir (ebenda p. 133) angegeben; vgl. mein Buch a. a. O.; *F. Engel*, Leipz. Ber. 1899, p. 296; über infinitesimale *Berührungstransformationen* vgl. III D 7 und *Lie*, „Tr." 2, Abt. 3.

157) Über die allgemeinste infinitesimale Transformation, die einer Gleichung der Form $X\Delta \equiv d\Omega$ genügt, vgl. mein Buch a. a. O.

158) *Engel*, a. a. O.; mein Buch, Kap. 10, § 2; vgl. auch die analogen Formulierungen von *G. Darboux* (Fussn. 109).

159) *W. de Tannenberg*, Par. C. R. 120, p. 674 (1895).

160) Institutiones calculi integralis, 3, Petersb. 1770. Untersuchungen über die von z freien, in p, q quadratischen Gleichungen (80) giebt *G. Elliot*, Ann. éc. norm. 1892, p. 329.

161) Berl. Nouv. Mém. 1772 = Oeuvres 3, p. 546; Historisches bei *Jacobi*, J. f. Math. 23, p. 3 = Werke 4, p. 151; „Lie-Scheffers Btr." p. 514, 516 ff.

zuführen. Er sucht zu diesem Zweck eine zweite Relation $\varphi(xyzpq)=c$ derart, dass nach Elimination von p und q die totale Differentialgleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ exakt wird (Nr. **14**); die Integration der letzteren ergiebt sodann ein vollständiges Integral $V(xyzc) = c'$ der Gleichung (80). Die Funktion φ ist ein von f unabhängiges Integral des simultanen Systems:

$$(81)\qquad dx : dy : dz : -dp : -dq$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} : \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit m Independenten:

$$(82)\qquad F(z, x_1, \ldots x_m, p_1, \ldots p_m) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

wurde zuerst von *Pfaff*[104]) auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt. Um die allgemeinste Integralfunktion z von (82) zu finden, hat man diese Gleichung auf die Form

$$(83)\qquad 0 = p_m + \psi(z, x_1, x_2, \ldots x_m, p_1, p_2, \ldots p_{m-1})$$

zu bringen, sodann die totale Differentialgleichung

$$(84)\quad 0 = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \cdots - p_{m-1}\,dx_{m-1} + \psi\,dx_m \left(= \nabla\right)$$

auf eine Form mit m Differentialelementen zu reduzieren (Nr. **18**) und in allgemeinster Weise durch m Relationen zu erfüllen (Nr. **20**), aus denen $z, p_1, \ldots p_{m-1}$ als Funktionen der x berechnet werden. Das erste *Pfaff*'sche Hülfssystem (Nr. **18**) schreibt sich hier so:

$$(85)\qquad \frac{dx_i}{dx_m} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dx_m} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - p_i\frac{\partial \psi}{\partial z};\ \frac{dz}{dx_m} = \sum_1^{m-1} p_h\frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \psi$$
$$(i = 1, \cdots m-1);$$

seine Integration ist äquivalent mit derjenigen des Systems:

$$(86)\qquad \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k};\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} - p_k\frac{\partial F}{\partial z};\ \frac{dz}{dt} = \sum_1^m p_h\frac{\partial F}{\partial p_h}$$
$$(k = 1 \cdots m);$$

dies System besitzt nämlich das Integral F, und die Elimination von p_m mittels (83) und von dt führt auf die Gleichungen (85).

Jacobi[162]) gelangt zu dem System (86) u. a. durch die Bemerkung, dass jedes Integral z von (82) und seine Ableitungen p_i dem Differentialsystem

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_h}\frac{\partial z}{\partial x_h} = \sum p_h\frac{\partial F}{\partial p_h};\ \sum \frac{\partial F}{\partial p_h}\frac{\partial p_i}{\partial x_h} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i\frac{\partial F}{\partial z} \quad (i = 1 \cdots m)$$

162) J. f. Math. 2, p. 317 (1827) = Werke 4, p. 1.

genügen, also (Nr. 11, Fussn. 63) durch (82) und m andere Relationen[163]) zwischen den Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_h} = 0$$

definiert werden.

29. Methode von Cauchy. *A. Cauchy*[164]) hat gezeigt, dass es zur Integration von (82) ausreicht, das simultane System (85) oder (86) zu integrieren. Ist durch die Gleichungen

$$(87) \qquad z = f(x_1 x_2 \ldots x_m),\ p_i = f_i(x_1 \ldots x_m) \qquad \left(f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

ein Integral von (82) definiert, und führt man statt der x neue Variable[165]) $t, u_2, u_3, \ldots u_m$ so ein, dass die x bei konstanten u den ersten m der Gleichungen (86) genügen, so erfüllen die durch (87) definierten Funktionen z, p_i der Variabeln t von selbst die übrigen Gleichungen (86); sind also x_i^0, z^0, p_i^0 diejenigen Funktionen der Parameter u, auf die sich x_i, f, f_i bezw. für $t = 0$ reduzieren, ferner:

$$(88) \qquad x_i = \xi_i(t, x_1^0 \cdots x_m^0,\ z^0, p_1^0 \cdots p_m^0), \quad z = \zeta(t, x_1^0 \cdots),$$
$$p_i = \pi_i(t, x_1^0 \cdots)$$

diejenigen Integralfunktionen des Systems (86), die für $t = 0$ bez. in in x_i^0, z^0, p_i^0 übergehen, so ergiebt die Elimination der t, u aus (88) wieder die Relationen (87).

Für beliebige Inkremente der t, u besteht eine Identität der Form[166])

$$(89) \quad \delta\zeta - \sum \pi_i \delta\xi_i = \varrho\left(\delta z^0 - \sum p_i^0 \delta x_i^0\right) + \sigma\,\delta F(z^0 x_1^0 \cdots p_m^0).$$

Erfüllen demnach die $x^0 z^0 p^0$ als Funktionen der u die Gleichungen

$$(90) \qquad F(z^0 x_1^0 \cdots x_m^0,\ p_1^0 \cdots p_m^0) = 0,$$

$$(91) \qquad \delta z^0 - p_1^0 \delta x_1^0 - \cdots - p_m^0 \delta x_m^0 = 0,$$

---

163) Wie diese zu bestimmen sind, damit die p_i die Ableitungen von z werden, zeigt *L. Boltzmann*, Wien. Ber. 72, 2. Abt., p. 471 (1875).

164) Bull. soc. philomath. 1819, p. 10; Par. C. R. 14, p. 740, 769, 881, 952, 1026 (1842) = Oeuvres (1) 6, p. 423, 431, 444, 459, 467.

165) Vgl. auch *Ampère*, J. éc. polyt. 10, cah. 17 und bes. 11, cah. 18, p. 1—34 u. 43 f. (1820); seine Darstellung der Theorie (für $m = 2$) beruht auf der Betrachtung der in das allgemeine Integral eingehenden willkürlichen Funktionen (s. Nr. 4 und 48); sie wurde von *E. Padova* (Collectanea matematica, Mailand 1881, p. 105) auf den Fall eines beliebigen m übertragen.

166) Vgl. auch *Binet*, Par. C. R. 14, p. 654 (1842).

so genügen die durch (88) definierten Funktionen der m Variabeln t, u_i identisch der Bedingung (82) und:

$$(92) \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0.$$

Führt also die Elimination der t, u aus (88) auf $m+1$ Gleichungen der Form (87), so sind die f_i die Ableitungen von f, und f ist ein Integral von (82).

Die Integration von (82) ist so darauf zurückgeführt, die Grössen $x_i^0\ z^0\ p_i^0$ als Funktionen von $m-1$ Parametern u derart zu bestimmen, dass die Relationen (90), (91) erfüllt sind, m. a. W. die *Pfaff*'sche Gleichuug (91) in allgemeinster Weise durch die Gleichung (90) und $m+1$ weitere Relationen zwischen den $x_i^0 z^0 p_i^0$ zu befriedigen, was ohne Integration möglich ist (Nr. 9). Solche $m+1$ Relationen sind z. B. die folgenden:

$$(93) \quad x_m^0 = \text{const.}; \ z^0 = \varphi(x_1^0 \cdots x_{m-1}^0), \ p_i^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^0} \quad (i = 1 \cdots m-1);$$

die Elimination von t, $x_i^0 z^0 p_i^0$ aus (88), (90), (93) giebt dasjenige Integral z, das vermöge $x_m = x_m^0$ in $\varphi(x_1 \ldots x_{m-1})$ übergeht (Nr. 1).

Dies Integral erhält man auch, wenn man von dem simultanen System (85) die hinsichtlich $x_m = x_m^0$ genommenen Hauptintegrale

$$(94) \quad \xi_k(z, x_1 \ldots x_m\ p_1 \ldots p_{m-1}), \ \zeta(z, x_1 \ldots); \ \mathfrak{p}_k(z, \ldots) \quad (k = 1 \ldots m-1)$$

bestimmt, und die $x_i^0 z^0 p_i^0$ aus (90), (93) und den Gleichungen

$$(95) \qquad \xi_k = x_k^0; \quad \zeta = z^0; \quad \mathfrak{p}_k = p_k^0 \qquad (k = 1, 2, \cdots m-1)$$

eliminiert.

30. Jacobi's erste Methode[167]) ist ein Spezialfall der *Cauchy*schen[168]) und beruht darauf, dass der *Pfaff*'sche Ausdruck ∇ auf der rechten Seite von (84) schon durch die erste *Pfaff*'sche Reduktion in der Normalform

$$(96) \qquad \nabla \equiv \varrho \left(d\zeta - \sum_1^{m-1} \mathfrak{p}_h d\xi_h \right)$$

erhalten wird, wenn man die Hauptintegrale (94) des *Pfaff*'schen Hülfssystems (85) gebraucht (Nr. 18, Fussn. 107). Dabei sind die drei Fälle zu unterscheiden:

α) Die Funktion ψ ist von z nicht unabhängig;

167) J. f. Math. 17, p. 97 (1837) = Werke 4, p. 57, bes. p. 104.

168) Vgl. die Bemerkungen *Cauchy*'s, Par. C. R. 14, p. 881 (1842) = Werke (1) 6, p. 444, und Exercices d'anal. et de phys. 2, p. 239 (Paris 1841).

β) ψ ist von z frei[169]) und in den p_i nicht homogen erster Ordnung;
γ) ψ ist von z frei und in den p_i homogen erster Ordnung.
Im Falle β) ist in (96) der Faktor $\varrho \equiv 1$, die $\mathfrak{x}, \mathfrak{p}$ sind die Hauptintegrale hinsichtlich $x_m = x_m^0$ des „kanonischen“[170]) Systems

$$(97) \quad dx_k = \frac{\partial \psi}{\partial p_k}\, dx_m; \quad dp_k = -\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\, dx_m \qquad (k = 1, 2, \cdots m-1)$$

und $\mathfrak{z}$ hat die Form $z - U$,[171]) wo U aus dem Integral[172])

$$(98) \qquad \int_{x_m^0}^{x_m} \left(p_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \cdots + p_{m-1} \frac{\partial \psi}{\partial p_{m-1}} - \psi \right) dx_m$$

hervorgeht, wenn man vor der Integration die x_k und p_k mittels der Gleichungen

$$\mathfrak{x}_k = a_k; \quad \mathfrak{p}_k = b_k \qquad (k = 1 \cdots m-1)$$

durch x_m und die arbiträren Konstanten a_i, b_i ausdrückt, nachher die a_i, b_i durch die $\mathfrak{x}_k$, $\mathfrak{p}_k$ ersetzt. Im Falle γ) ist $\mathfrak{z} \equiv z$, die $\mathfrak{p}_k$ und $\mathfrak{x}_k$ sind in den p homogen erster bez. nullter Ordnung und der *Pfaff*sche Ausdruck

$$\nabla_1 = p_1\, dx_1 + \cdots + p_{m-1}\, dx_{m-1} - \psi\, dx_m$$

besitzt die Normalform $\mathfrak{p}_1\, d\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{p}_{m-1}\, d\mathfrak{x}_{m-1}$. Diese Sätze stimmen mit der Thatsache[173]) überein, dass der Ausdruck ∇ im

---

169) *Jacobi* giebt zwei Methoden, um jede Gleichung (82) durch eine solche zu ersetzen, die die Unbekannte nicht explicite enthält; die erste besteht darin, z durch eine Relation $V(z\, x_1 \ldots x_m) = 0$ zu definieren, wodurch (82) in eine Gleichung mit der Unbekannten V und den Independenten z, x_i übergeht (*Jacobi*, J. f. Math. 23, p. 18 = Werke 4, p. 166; vgl. „Goursat A“ Art. 16, „Delassus“ Art. 23. Eine Verallgemeinerung für höhere Differentialprobleme giebt *L. Königsberger*, J. f. Math. 109, p. 338 ff.); über die zweite Methode (J. f. Math. 60, p. 1 = Werke 5, p. 1; 31. Vorlesung über Dynamik = Werke Suppl. p. 237) vgl. *A. Mayer*, Math. Ann. 9, p. 366; „Mansion“ § 1.

170) *W. R. Hamilton*, Lond. Trans. 1834, p. 247; 1835, p. 95; vgl. *Imschenetzky*, Arch. Math. 50, p. 428 und die nächste Nr.

171) $\sum_1^m p_i dx_i$ wird also ein exaktes Differential, wenn man für die p_i ihre aus (82) und aus $\mathfrak{x}_k = a_k$ folgenden Werte einsetzt; vgl. *A. Cayley*, Math. Ann. 11, p. 194 = Papers 10, p. 134.

172) Diese Quadratur lässt sich unmittelbar ausführen, wenn ein vollständiges Integral von (82) bereits bekannt ist (*Mayer*, Math. Ann. 6, p. 166; „Goursat A“ Art. 56, Remarque).

173) S. *G. Morera*, Lomb. Rend. (2) 16, p. 637, 691 (1883) und mein Buch, Kap. 12, § 2.

Falle α) die Klasse $2m$, in den Fällen β), γ) die Klasse $2m-1$ besitzt, während die Klasse von ∇_1 im Falle β) gleich $2m-1$, im Falle γ) gleich $2m-2$ ist (Nr. 19).

Die m Relationen $\mathfrak{x}_k = a_k$, $\mathfrak{z} = a_m$ liefern durch Elimination von $p_1 \dots p_{m-1}$ i. a. ein vollständiges Integral (Nr. 7)

$$z = \Phi(x_1 x_2 \dots x_m,\ a_1 a_2 \dots a_m) \tag{99}$$

der gegebenen Gleichung (83), das im Falle β) die Form

$$z = \Psi(x_1 x_2 \dots x_m,\ a_1 \dots a_{m-1}) + a_m \tag{100}$$

hat. Doch kann diese Elimination auch mehrere[174]) Relationen in $z, x_1 \dots x_m$ ergeben, z. B. stets im Falle γ). Da aber wegen (96):

$$\nabla = \varrho\,[d(\mathfrak{z} - \sum \mathfrak{p}_k \mathfrak{x}_k) + \sum \mathfrak{x}_k\, d\mathfrak{p}_k],$$

so erhält man stets ein vollständiges Integral der Form (99), wenn man aus der Gleichung

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{p}_1 \mathfrak{x}_1 - \dots - \mathfrak{p}_{m-1} \mathfrak{x}_{m-1} = a_m$$

die p_i, was stets möglich, mittelst der Gleichungen $\mathfrak{p}_k = a_k$ eliminiert[175]).

Im Falle γ) kann jedes vollständige Integral in der Form

$$z = a_{m-1} \cdot V(x_1 x_2 \dots x_m,\ a_1 a_2 \dots a_{m-2}) + a_m \tag{101}$$

geschrieben werden.

Damit die Gleichung (99) ein vollständiges Integral von (83) darstellt, ist notwendig und hinreichend, dass sich die Gleichungen

$$z = \Phi, \quad p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots p_{m-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m-1}} \tag{102}$$

nach $a_1 \dots a_m$ auflösen lassen und durch Substitution der erhaltenen Ausdrücke in $p_m = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_m}$ die Relation (83) entsteht. Durch diese Substitution verwandelt sich dann der Ausdruck

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} da_m \tag{103}$$

in eine Normalform des *Pfaff*'schen Ausdrucks ∇, woraus nach einer Bemerkung der Nr. 19 (Fussn. 119) folgt, dass die Relationen:

$$z = \Phi,\ p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i};\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0 \quad (i = 1, \dots m-1) \tag{104}$$

174) *J. A. Serret,* Ann. éc. norm. 1866, p. 153 ff.

175) *A. Mayer,* Math. Ann. 3, p. 435 (1871); das Verfahren ist mit dem der vor. Nr. identisch, wenn φ in (93) durch $a_m + a_1 x_1^0 + \dots + a_{m-1} x_{m-1}^0$ ersetzt wird. Andere Methoden geben *G. Darboux,* Par. C. R. 79, p. 1488; 80, p. 160 (1875) = Darb. Bull. (1) 8, p. 249; *J. Bertrand,* Par. C. R. 82, p. 641 (1876); *J. Farkas,* ib. 98, p. 352.

nach den arbiträren Konstanten a, b aufgelöst, die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (85) liefern; insbesondere erhält man im Falle β) aus einem vollständigen Integral (100) die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems (97) in der Form[176]):

$$p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}; \quad b_i = \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} \quad (i = 1, \cdots m-1).$$

31. Die Hamilton-Jacobi'sche Theorie[176]). Der Fall der dynamischen Differentialgleichungen ist in den Resultaten der vor. Nr. als Spezialfall enthalten und bildete für *Jacobi*'s Untersuchungen den Ausgangspunkt.

Es seien $q_1 \ldots q_m$ Funktionen der Variabeln t, und $q_1' \ldots q_m'$ ihre Ableitungen; damit dann die Variation des Integrals

$$S = \int_\tau^t V(t, q_1 \ldots q_m, q_1' \ldots q_m')\, dt$$

unter der Voraussetzung verschwinde, dass die Variationen von t, q_i, q_i' an den Integrationsgrenzen Null seien, ist notwendig und hinreichend, dass die q_i dem System simultaner Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial q_s'} - \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots m) \tag{105}$$

genügen. Ist $H(t, q_1 \ldots q_m, p_1 \ldots p_m)$ die Funktion, die aus

$$p_1 q_1' + \cdots + p_m q_m' - V$$

entsteht, wenn man daraus die q_i' mittels der Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i'} \quad (i = 1, 2, \cdots m) \tag{106}$$

eliminiert, so besteht zwischen dem *kanonischen* System

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots m), \tag{107}$$

dem System (105) und der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\left(t, q_1 \cdots q_m, \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial q_m}\right) = 0 \tag{108}$$

folgender Zusammenhang:

---

176) *Hamilton,* Lond. Trans. 1834, p. 247; 1835, p. 95; *Jacobi,* 19. und 20. Vorlesung über Dynamik, und die nachgelassene Abh., Werke 5, p. 217—395; vgl. *A. Cayley*'s Report on Theoretical Dynamics, Rep. Brit. Ass. 1857, p. 1—42 und die Lehrbücher der Mechanik, z. B. *F. Tisserand,* Mécanique céleste, I. Introduction (Paris 1889); *P. Painlevé,* Leçons sur l'intégration dés équ. diff. de la mécanique (Paris 1895).

Aus den allgemeinen Integralgleichungen von (107) erhält man diejenigen von (105), indem man die p_i mittelst (106) eliminiert, und umgekehrt aus den Integralgleichungen von (105) die von (107) durch Elimination der q_i'. Hat man das System (107) in der Form

$$(109)_1 \qquad q_i = \varkappa_i(t, \tau, q_1^0 \cdots q_m^0, p_1^0 \cdots p_m^0) \qquad (i = 1, \cdots m)$$

$$(109)_2 \qquad p_i = \pi_i(t, \tau, q_1^0 \cdots q_m^0, p_1^0 \cdots p_m^0)$$

integriert, wo die Funktionen $\varkappa_i$, π_i sich für $t = \tau$ bez. auf q_i^0, p_i^0 reduzieren, so gewinnt man für die partielle Differentialgleichung (108) folgendermassen ein vollständiges Integral

$$z = \Omega(t, q_1 \cdots q_m \; q_1^0 \cdots q_m^0) + c$$

mit den arbiträren Konstanten q_i^0, c. Man eliminiere die q_i' mittelst (106) aus V, wodurch das Integral S die Form:

$$S = \int_\tau^t \left(p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H \right)$$

annimmt, ersetze unter dem Zeichen $\int$ die q_i, p_i durch ihre Ausdrücke (109), eliminiere nach ausgeführter Quadratur die p_i, p_i^0 mittelst (109)[177] und bezeichne die so aus S entstehende Funktion mit Ω.

Die Gleichungen $(109)_1$, $(109)_2$ lassen sich dann in der äquivalenten Form[178]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_i^0} = -p_i^0 \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

schreiben. Allgemeiner ergeben sich aus einem beliebigen vollständigen Integral

$$z = \Phi(t, q_1 \ldots q_m, \; c_1 \ldots c_m) + c$$

der Gleichung (108) die allgemeinen Integralgleichungen des Systems (107) in der Form:

$$(110) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m).$$

---

177) Über den funktionentheoretischen Sinn dieser Eliminationen vgl. mein Buch, Art. 381, 382. Hinsichtlich der Independenten τ, q_i^0 genügt Ω einer der Gleichung (108) ganz ähnlichen partiellen Differentialgleichung; vgl. *Hamilton* u. *Jacobi*, a. a. O.

178) *Hamilton* beweist diese (z. T. aus der vor. Nr. folgenden) Sätze mittelst des Ausdrucks für die Variation δS; vgl. auch *Jacobi* a. a. O. und *E. J. Routh*, Dynamik der Systeme starrer Körper (dtsch. Ausg., Leipz. 1898, 2, Kap. 10).

Die drei Integrationsprobleme (105), (107), (108) sind also völlig äquivalent[179]).

Ist t die Zeit, und sind $q_1 \ldots q_m$ die *Lagrange*'schen Koordinaten eines dynamischen Problems mit m Freiheitsgraden, ferner

$$T(t, q_1 \ldots q_m \; q_1' \ldots q_m')$$

die lebendige Kraft des Systems, $U(t, q_1 \ldots q_m)$ die Kräftefunktion, endlich $V \equiv T + U$, so sind die Gleichungen (105) mit den *Lagrange*schen Differentialgleichungen der Bewegung identisch, und die Lösung des dynamischen Problems ist darauf zurückgeführt, ein vollständiges Integral der *„Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung"* (108) zu finden; H wird unter der Annahme, dass die Bedingungsgleichungen des Problems von t nicht abhängen, also T in den q_i' homogen ist, vermöge (106) mit $T - U$ identisch und heisst die *„Hamilton*'sche Funktion" (*Jacobi*), Ω die „Principalfunktion" (*Hamilton*) des dynamischen Problems.

Betrachtet man gleichzeitig zwei dynamische Probleme, das *„ungestörte"* Problem mit der *Hamilton*'schen Funktion H, dessen allgemeine Integralgleichungen durch (110) gegeben seien, und das *„gestörte"* Problem mit der *Hamilton*'schen Funktion $H + H_1$, und führt man statt der p_i, q_i mittels (110) die neuen Variabeln c_i, γ_i ein, wodurch H_1 in $H_1'(t, c_1 \ldots c_m \; \gamma_1 \ldots \gamma_m)$ übergeht, so verwandeln sich die Differentialgleichungen des gestörten Problems

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_s}; \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_s}$$

wiederum in ein kanonisches System:

$$(111) \qquad \frac{dc_s}{dt} = -\frac{\partial H_1'}{\partial \gamma_s}; \quad \frac{d\gamma_s}{dt} = \frac{\partial H_1'}{\partial c_s} \qquad (s = 1 \cdots m);$$

durch diese Gleichungen sind die Änderungen definiert, welche die (im ungestörten Problem konstanten) Grössen c_i, γ_i im Laufe der Zeit durch den Zutritt der *„Störungsfunktion"* H_1 erleiden. Die c_i, γ_i werden *kanonische Elemente* des ungestörten Problems genannt[179a]); solche kanonische Elemente sind z. B. die Hauptintegrale des simultanen Systems (107) hinsichtlich $t = 0$.[179b]) Die durch (110) vermittelte

179) Über die Anwendung dieser Theorie auf die isoperimetrischen Probleme s. *Jacobi*, Werke 5, p. 465.

179a) *Hamilton, Jacobi* (Fussn. 176); über die älteren Störungstheorieen (Lagrange, Laplace, Poisson etc.) vgl. *Cayley*'s Report.

179b) Diese Elemente und die zugehörigen Störungsgleichungen (111) betrachtet schon *Lagrange*, Mécan. anal. 1, 2de partie, sect. 5, § 2.

Beziehung zwischen den c, γ und den p, q ist eine *Berührungstransformation*[179e]), und die partiellen Ableitungen der c, γ nach den p, q genügen den für die rechten Seiten einer solchen charakteristischen Relationen[179d]); denkt man sich die p, q als Funktionen der c, γ ausgedrückt, so bestehen zwischen den Ableitungen der c, γ und denen der p, q einfache Beziehungen[179e]).

Die allgemeinste *„kanonische Substitution“*[179f]), d. h. Variabelntransformation:

$$\bar{q}_i = Q_i(t, q_1 \dots q_m\ p_1 \dots p_m), \quad \bar{p}_i = P_i(t \dots p_m),$$

die jedes kanonische System (107) wieder in ein solches verwandelt, ist von *Lie*[179g]) angegeben worden; sie ist, falls die Q, P von t frei sein sollen, eine Berührungstransformation, genügt also einer Identität:

$$dW(x_1 \dots x_m\, p_1 \dots p_m) + \sum P_i\, dQ_i - \sum p_i\, dq_i .$$

32. Variation der Konstanten; die charakteristischen Kurven. Nach Nr. **30** erhält man aus einem beliebigen vollständigen Integral (99) der Gleichung (83) das allgemeinste Integral, indem man den Ausdruck (103) in allgemeinster Weise durch m Relationen zwischen den a_i, x_i, z annulliert, d. h. aus $r\ (< m)$ beliebigen Gleichungen

$$\varphi_s(a_1\, a_2 \dots a_m) = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots r) \tag{112}$$

sowie aus (99) und aus den Relationen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_i} + \dots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \dots m) \tag{113}$$

die a, λ eliminiert (*J. L. Lagrange*'s „Variation der Konstanten“[180]). Die so erhaltene Integralfläche erscheint sonach als Umhüllungsgebilde der ∞^{m-r} Flächen, die aus der Schar (99) durch die r Gleichungen (112) ausgeschieden werden, und es giebt den Werten $r = 1, 2, \dots m$ entsprechend m (nicht wesentlich verschiedene) Kategorien von Integralflächen. Ist:

179e) *Lie*, Norw. Arch. 2. p. 129 (1877).

179d) *Hamilton, Jacobi* a. a. O.; *Donkin, Liouville, Bour* (Fussn. 212); *E. Schering*, Gött. Abh. 18 (1873); 19 (1874); s. auch Nr. **36**.

179e) *Jacobi*, J. f. Math. 30, p. 117 = Werke 4, p. 137; Werke 5, p. 317.

179f) *Jacobi*, Werke 4, p. 136; 5, p. 369 ff.; *Schering* a. a. O.

179g) a. a. O.; daselbst wird auch die allgemeinste Transformation aufgestellt, die ein *bestimmtes* kanonisches System (107) wieder in ein solches verwandelt.

180) S. Fussn. 161 und Berl. Hist. 1774 = Werke 4, p. 5, bes. p. 62 ff.; Leçons sur le calcul des fonctions (Paris 1806) p. 353. Ausnahmefälle, wo die Elimination der a, λ mehr als eine Relation in den z, x liefert, s. bei *Darboux*, „Sol. sing.“ p. 98.

$$\Phi(x\,y\,z\,a\,b) = 0$$

ein vollständiges Integral der Gleichung (80), Nr. 28, so ist nach dem Vorhergehenden die allgemeinste Integralfläche V die Enveloppe[181]) von irgend ∞^1 durch eine Relation $b = \varphi(a)$ aus obiger Schar ausgeschiedenen Flächen, von denen dann jede die benachbarte nach einer *„charakteristischen Kurve“*[182]) schneidet, wird also von ∞^1 charakteristischen Kurven erzeugt, die ihrerseits eine Kurve, die *„Rückkehrkante“* der Fläche V[183]) umhüllen; durch jeden Punkt von V geht eine und nur eine charakteristische Kurve. Es giebt ∞^3 (nur bei einer linearen Gleichung (80) blos ∞^2) charakteristische Kurven; sie sind durch die Gleichungen

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + c\,\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \tag{114}$$

definiert. Die Bedingung dafür, dass zwei benachbarte dieser Kurven sich schneiden, ist $db - c\,da = 0$.[184]) Eine beliebige ∞^1-Schar von charakteristischen Kurven, deren jede die benachbarte schneidet, erzeugt eine Integralfläche, insbesondere bilden alle ∞^1 Kurven, die denselben Punkt $P(x\,y\,z)$ enthalten, das *„Integralkonoid“*[185]) mit der Spitze P; die Tangenten dieser ∞^1 Kurven im Punkte P sind die Erzeugenden des *„Elementarkegels“* mit der Spitze P.[186]) Dieser Kegel wird durch eine gewisse „Monge'sche Gleichung“[187])

$$\varphi(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0 \tag{115}$$

definiert und ist die Enveloppe der ∞^1 Ebenen mit der Gleichungsform:

$$\xi - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \tag{116}$$

deren Koeffizienten p, q die Gleichung (80) erfüllen; nur bei einer

---

181) Diese geometrische Deutung der Variation der Konstanten rührt von *G. Monge* her, Application de l'analyse à la géométrie, 5me éd., Paris 1850, p. 421, 432; vgl. *Du Bois-Reymond*, „Beiträge“, 1. u. 3. Abschn.; „Lie-Scheffers Btr.“ Kap. 11.

182) *Monge* sagt: „Charakteristik“ a. a. O. p. 432; vgl. Nr. 34 des Textes.

183) *Monge*, a. a. O.; vgl. *Darboux*, „Sol. sing.“.

184) Über die Beziehungen zwischen dieser Gleichung und der *Monge*'schen Gleichung (115), und überhaupt zwischen einer beliebigen nicht integrabeln *Pfaff*'schen und einer *Monge*'schen Gleichung vgl. *Lie*, Leipz. Ber. 1897, p. 704 ff.

185) *Du Bois-Reymond*, „Beiträge“ p. 62; die Integralkonoide wurden schon von *O. Bonnet*, Par. C. R. 45, p. 581 (1857) betrachtet.

186) *O. Bonnet*, a. a. O.; *Lie-Scheffers*, „Btr.“ Abschn. III; Geschichtliches ebenda p. 518 f.

187) S. Fussn. 103; *Lie-Scheffers*, „Btr.“ Kap. 7; *Du Bois-Reymond*, „Beiträge“ p. 22; *Lie*, Leipz. Ber. 1897, p. 687.

linearen Gleichung artet der Elementarkegel in ein Ebenenbüschel aus. Die Rückkehrkanten der Integralflächen erfüllen die *Monge*'sche Gleichung (115); umgekehrt geht durch jede Kurve, die keine charakteristische Kurve ist und (115) erfüllt, eine und nur eine Integralfläche, deren Rückkehrkante sie ist[188]); jede solche Kurve heisst eine „Integralkurve" (*Lie*[189]) der partiellen Differentialgleichung (80).

Eine Integralfläche ist dadurch charakterisiert, dass sie in jedem ihrer Punkte P von dem zugehörigen Elementarkegel berührt wird, und zwar nach der Tangentenrichtung der durch P gehenden, auf V gelegenen charakteristischen Kurve.

Berührt eine Integralkurve eine Integralfläche von (80), so berührt sie dieselbe wenigstens zweipunktig; befinden sich also unter den Integralkurven die ∞^3 Geraden eines Komplexes, so sind auf jeder Integralfläche die ∞^1 charakteristischen Kurven zugleich Haupttangentenkurven[190]).

Die Begriffe charakteristische Kurve, Elementarkegel, Integralkonoid übertragen sich ohne weiteres auf eine Gleichung (82) mit m Independenten.

33. Singuläre Integrale. Der Ausdruck (103) wird auch durch die Annahme:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0 \tag{117}$$

zum Verschwinden gebracht. Ist die Flächenschar (99) beliebig gegeben und (82) die zugehörige Differentialgleichung, die durch Elimination der a aus (99) und den Gleichungen $p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}$ folgt, so erfüllt die durch Elimination der a aus (99), (117) sich ergebende Enveloppe W der Schar (99) die partiellen Differentialgleichungen

$$(118)_1 \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0; \qquad (118)_2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m),$$

ist also ein singuläres Integral[191]) (Nr. 5) von (82). Die Fläche W

188) Es giebt i. a. ∞^3 Integralflächen mit je einer Bicuspidalkante, *Darboux*, „Sol. sing." p. 47.

189) Math. Ann. 5, p. 151 ff.; vgl. *Du Bois-Reymond*, „Beiträge", Kap. 7, 8, 11; *Darboux*, „Sol. sing." p. 36–58.

190) *Lie*, Math. Ann. 5, p. 154, 189; ebenda p. 192, 196 werden solche partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, auf deren Integralflächen die char. Kurven Krümmungs- oder geodätische Linien sind; vgl. *Lie-Scheffers*, „Btr." Kap. 9 und 14; *Du Bois-R.*, „Beiträge" p. 127 f.

191) *J. L. Lagrange*, Berl. nouv. mém. 1774 = Werke 4, p. 5; vgl. *Darboux*, Sol. sing.; *F. Casorati*, Lomb. Rend. (2) 9, p. 522 (1876).

ist nicht von charakteristischen Kurven erzeugt[192]); sie wird in jedem Punkt P von ∞^{m-1} charakteristischen Kurven berührt, und diese erzeugen eine in P berührende Fläche der Schar (99). Die Integralfläche, deren Gleichung durch Elimination der a und λ aus (99), (112), (113) entsteht, berührt W längs einer $m-r$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit und ist durch Angabe der letzteren bestimmt[193]).

Eine *beliebig* vorgegebene Gleichung (82) besitzt kein singuläres Integral[194]); die Elimination der p aus (82) und $(118)_1$, bezw. aus (82) und $(118)_2$ liefert im allgemeinen zwei verschiedene Flächen, die Örter von Punkt- bezw. Tangentensingularitäten der ∞^m Flächen (99) sind, und die erstere dieser Flächen ist Spitzenort der charakteristischen Kurven[195]). Fallen beide in *eine* Fläche W zusammen, so ist diese, falls sie nicht der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ genügt, ein singuläres Integral[196]) von (82) und Enveloppe der ∞^m Flächen eines vollständigen Integrals, die aber in ihren Berührpunkten mit W auch Singularitäten besitzen können. Singuläre Integrale, für die $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, kann es unendlich viele geben[197]); in allen Fällen erledigt sich die Frage nach den etwaigen singulären Integralen durch die Aufsuchung aller gemeinsamen Integrale des Differentialsystems (82), (118) (vgl. Nr. 38).

34. Charakteristische Streifen; Abbildung und Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Versteht man mit *Lie* (Nr. 9) unter einem Integral oder einer Integral-M_m der Gleichung (82) jedes $m+1$-gliedrige Relationensystem in z, x_i, p_i, das (82) umfasst und die *Pfaff*'sche Gleichung (92) erfüllt, und nennt man ein Wertsystem zx_ip_i, das (82) befriedigt, ein *singuläres* bezw. *nichtsinguläres* Flächenelement, je nachdem es allen oder nicht allen Relationen $(118)_1$, $(118)_2$ genügt, so ergiebt sich für die *Cauchy*'sche Theorie (Nr. 29) folgende Deutung und Verallgemeinerung[198]):

Die ∞^{2m} nichtsingulären Flächenelemente von (82) ordnen sich

192) Dass es nur *ein* solches Integral geben kann, zeigt *Lie*, Math. Ann. 9, p. 264.

193) Vgl. *H. Weber*, J. f. Math. 66, p. 227 f.

194) *Darboux* „Sol. sing.", p. 113.

195) *Darboux* a. a. O., p. 146 ff.; 172 ff.

196) *H. Weber* a. a. O., p. 216 ff.; *Darboux* a. a. O., p. 177, 185.

197) *Darboux* a. a. O., p. 193 ff.

198) Von *Lie* seit 1871 entwickelt; vgl. „Tr." 2, Abt. 1; *Lie-Scheffers*, „Btr.", Kap. 12; Historisches ebenda, p. 518 und 564 Anm.

zu ∞^{2m-1} *„charakteristischen Streifen“* 1. Ordnung (Nr. 9) oder *„Charakteristiken“* zusammen, welche durch das simultane System (86) oder dessen Integralgleichungen (88) definiert sind; durch jedes nichtsinguläre Flächenelement mit den Koordinaten $z^0 x_i^0 p_i^0$ geht ein und nur ein solcher Streifen (88) hindurch. Die zu einer Charakteristik gehörige Punktmannigfaltigkeit ist eine charakteristische *Kurve*. Enthält eine Integral-M_m das nichtsinguläre Element E, so umfasst sie die ganze durch E gehende Charakteristik; jede nichtsinguläre Integral-M_m ist sonach von ∞^{m-1} Charakteristiken erzeugt, m. a. W. ihre $m+1$ Definitionsgleichungen gestatten die infinitesimale Transformation:

$$(119) \qquad [Ff] = \sum_1^m{}_h \frac{\partial F}{\partial p_h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_h}$$

(vgl. den Schluss von Nr. 26, Fussn. 154), oder was dasselbe besagt, die infinitesimale Berührungstransformation: $[Ff] - F\frac{\partial f}{\partial z}$ (s. III D 7). Liegen zwei benachbarte Flächenelemente von (82) vereinigt, so befinden sich die von ihnen ausgehenden Charakteristiken wegen (89) ihrer ganzen Ausdehnung nach in vereinigter Lage. Die $\infty^{\nu-1}$ Charakteristiken, die bezw. von den Elementen einer Integral-$M_{\nu-1}$ auslaufen, bilden also eine Integral-M_ν, die für $\nu < m$ eine *„ν-dimensionale Charakteristik“* oder *„charakteristische M_ν“* genannt wird. Die Integration von (82) ist sonach geleistet, wenn man die Charakteristiken, oder auch die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Berührungstransformationsgruppe $[Ff] - F\frac{\partial f}{\partial z}$ kennt; die allgemeinste Integral-M_m ergiebt sich durch Ausübung der ∞^1 Transformationen dieser Gruppe auf eine beliebige nichtsinguläre Integral-M_{m-1}. Während so durch eine nichtsinguläre und nichtcharakteristische Integral-M_{m-1} eine Integral-M_m eindeutig festgelegt ist, giebt es ∞^∞ Integral-M_m, die dieselbe charakteristische M_{m-1} enthalten. So führt z. B. im Falle der Gleichung (80) die Bedingung dafür, dass die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy; \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

rst unbestimmt lassen, auf die Definitionsgleichungen (81) der Charakteristiken zurück[199]). Durch die Gleichung (80) werden nicht nur jedem Punkt xyz ∞^1 durch ihn gehende Ebenen, sondern auch jeder

199) S. auch *Goursat*, Acta math. 19, p. 285.

Ebene (116) ∞^1 auf ihr gelegene Punkte xyz zugewiesen[200]), die eine Kurve $\varkappa$ bilden; die Definitionsgleichungen (81) der Charakteristiken drücken dann aus, dass in jedem Element E einer Integralfläche von (80) die Tangentenrichtungen der charakteristischen Kurve und der auf der Ebene von E gelegenen Kurve $\varkappa$ konjugirt sind[201]).

Die Relationen (95) der Nr. **29** stellen mit (83) zusammen ebenfalls die von dem Flächenelement $z^0 x_i^0 p_i^0$ ausgehende Charakteristik dar; ebenso werden die ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen mit Hülfe eines vollständigen Integrals (99) durch die Gleichungen (83), (104) definiert[202]).

Als *vollständiges Integral* der Gleichung (83) hat man nach Nr. **9** jedes $m+1$-gliedrige Gleichungensystem der Form

$$(120)\quad p_m + \psi = 0, \quad \Xi_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_{m-1}) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

zu betrachten, das für beliebige konstante c_i eine Element-M_m definiert; dazu ist notwendig und hinreichend, dass die *Pfaff*'sche Gleichung (84) sich auf die Form:

$$(121)\quad d\Xi_m - \Pi_1 d\Xi_1 - \Pi_2 d\Xi_2 - \cdots - \Pi_{m-1} d\Xi_{m-1} = 0$$

bringen lasse; die Π_i ergeben sich, wenn man die Ξ kennt, durch Auflösung linearer Gleichungen, und die ∞^{2m-1} Charakteristiken sind durch die Relationen:

$$p_m + \psi = 0, \quad \Xi_i = c_i, \quad \Pi_k = \gamma_k \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots m-1)$$

definiert. Nach Nr. **30** lässt sich also aus einem *beliebigen* vollständigen Integral ein solches von der Form (99) durch gewisse Eliminationen herstellen. Die $m+1$ Definitionsgleichungen der allgemeinsten nichtsingulären Integral-M_m erhält man, wenn man die *Pfaff*'sche Gleichung (121) nach Nr. **9** durch m Relationen in den Ξ. Π erfüllt und (83) hinzufügt; *Lagrange*'s Variation der Konstanten ist ein Spezialfall dieser Methode.

---

200) Dieser dualistische Charakter (*Darboux*, „Sol. sing.“, p 17) tritt besonders hervor, wenn man *Clebsch'sche Koonexkoordinaten*, d. h. homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten $x_1 x_2 x_3 x_4$, $u_1 u_2 u_3 u_4$, die durch die Relation $\sum u_i x_i = 0$ verknüpft sind, als Elementkoordinaten gebraucht und die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung demgemäss als *„Hauptkoincidenz“* eines Raumkonnexes auffasst; überdies erscheinen dann alle im Endlichen und Unendlichen gelegenen Flächenelemente gleichberechtigt; vgl. *Clebsch-Lindemann*, Geometrie I 2, Abt. 7; „Sol. sing.“ p. 238.

201) *Monge*, „Applications“ p. 430; *Darboux*, „Sol. sing.“ p. 23.

202) Die Lösnng des *Cauchy*'schen Problems (Nr. **2**) mittelst eines vollständigen Integrals giebt *A. Mayer*, Math. Ann. 3, p. 452.

Das in Nr. **30** gefundene vollständige Integral $\mathfrak{z} = z^0, \mathfrak{x}_1 = x_1^0, \ldots \mathfrak{x}_{m-1} = x_{m-1}^0$ besteht aus allen Integralkonoiden, deren Spitzen in der Ebene $x_m - x_m^0 = 0$ liegen. Die Integralkonoide brauchen nach Nr. **30** (vgl. Fussn. 174) keine Flächen zu sein, können vielmehr in Element-M_m^ϱ ($\varrho < m$, vgl. Nr. **9**) ausarten, z. B. bei jeder Gleichung (83) vom Typus γ) (Nr. **30**), sowie bei der in den *p linearen* Gleichung; in dem letzteren Falle (und nur in diesem) giebt es nicht ∞^{m+1}, sondern blos ∞^m Integralkonoide, bestehend aus den Element-M_m^1, die sich bezw. an die ∞^m charakteristischen Kurven (Nr. **11**) anschliessen.

Jede Darstellung (121) der *Pfaff*'schen Gleichung (84) liefert eine *Abbildung der partiellen Differentialgleichung* (83)[203]), die darauf beruht, die $2m-1$ Grössen Ξ, Π als Koordinaten der Flächenelemente eines Raums R_m mit den Punktkoordinaten $\Xi_m, \Xi_1 \ldots \Xi_{m-1}$ zu deuten; jedem Flächenelement und jeder Element-M_{r-1} des Raums R_m entspricht dann eine Charakteristik, bezw. eine Integral-M_r der Gleichung (83) und umgekehrt. Insbesondere lassen sich die Grössen $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{p}_i$ der Nr. **30** als Elementkoordinaten desjenigen Raums $R_m(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{m-1})$ deuten, der aus dem $R_{m+1}(z, x_1, \ldots x_m)$ durch die Gleichung $x_m = x_m^0$ ausgeschieden wird; dann entspricht jeder Charakteristik von (83) dasjenige Flächenelement des R_m, das sie aus dem R_m ausschneidet, und jeder Integral-M_r diejenige Element-M_{r-1} des R_m, die sie aus diesem ausschneidet[204]).

Der Übergang von einem bestimmten vollständigen Integral (120) zu einem andern[205]) (also auch von einer bestimmten Abbildungsart der Gleichung (83) zu einer andern[206])) vollzieht sich durch eine beliebige Berührungstransformation der $2m-1$ Variabeln Ξ, Π.[207])

Nach *Lie*[208]) lassen sich die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung hinsichtlich ihrer vollständigen Integrale folgendermassen *klassifizieren:* Eine Gleichung 1. Ordnung gehört zur ν^{ten} Klasse, wenn eines ihrer vollständigen Integrale aus lauter Element-$M_m^{m-\nu+1}$ besteht und ν die grösste derartige Zahl ist. Einen Spezialfall hier-

203) *Lie-Scheffers*, „Btr." p. 535 ff.; *A. V. Bäcklund*, Math. Ann. 9, p. 313.

204) *Lie-Scheffers*, „Btr." p. 544 ff.

205) *Jacobi*, Werke 5, p. 420, 431; *H. Weber*, J. f. Math. 66, p. 201. Vgl. auch *Jacobi*, Werke 5, p. 369—377, wo aus einem bestimmten System kanonischer Elemente eines dynamischen Problems das allgemeinste derartige System abgeleitet wird (Nr. **31**).

206) *Lie-Scheffers*, „Btr." p. 548.

207) Über das Verhalten des etwa vorhandenen sing. Integrals bei dieser Transform. vgl. *H. Weber* a. a. O., p. 231; *Darboux*, „Sol. sing." p. 102—108.

208) Gött. Nachr. 1872, p. 473.

von bilden die Gleichungen, deren sämtliche Integralkonoide in Element-$M_m^{m-\nu+1}$ degenerieren[209]; in diesem Fall (und nur in diesem) enthalten je $\infty^{\nu-1}$ charakteristische Streifen dieselbe charakteristische Kurve. Die Zahl ν ist eine Invariante der partiellen Differentialgleichung gegenüber allen (erweiterten) Punkttransformationen des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \ldots x_m)$. Die m^{te} Klasse besteht aus den in den p linearen Gleichungen (s. oben), die $m+1^{\text{te}}$ aus den Gleichungen der Form $F(z, x_1 \ldots x_m) = 0$, deren Integral-M_m ohne Integration gefunden werden. Die Gleichungen der 2ten, $3^{\text{ten}} \ldots m-1^{\text{ten}}$ Klasse heissen *semilinear*[210]; die in den p_i homogenen Gleichungen gehören im allgemeinen zur 2ten Klasse.

35. Homogene Elementkoordinaten. Im Falle einer Gleichung vom Typus γ):

$$(122)\quad F\left(x_1, x_2 \cdots x_m, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \cdots \frac{p_m}{p_1}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad p_m + \psi = 0$$

kann man die x, p als homogene Elementkoordinaten[211] des Raums $x_1 \ldots x_m$ deuten. Ein *Flächenelement* ist dann der Inbegriff eines Punktes $x_1 \ldots x_m$ und einer durch ihn gehenden Ebene $\sum p_i(\xi_i - x_i) = 0$. Zwei Nachbarelemente *liegen vereinigt*, wenn sie die Gleichung

$$(123)\qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_m\,dx_m = 0$$

erfüllen, und eine *Element-M_ν* ist definiert durch $2m - \nu - 1$ Relationen in den x, p, die die Gleichung (123) erfüllen und in den p homogen sind. Die Gleichung (122) *integrieren* heisst, alle ihre *Integral-M_{m-1}*, d. h. alle Element-M_{m-1} finden, deren m Definitionsgleichungen die Relation (122) enthalten. Jedes *vollständige Integral*

$$(124)\quad p_m + \psi = 0,\ \Xi_i\left(x_1 \cdots x_m, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \cdots \frac{p_{m-1}}{p_1}\right) = e_i \quad (i = 1, \cdots m-1)$$

liefert eine Normalform $\sum \Pi_i d\Xi_i$ des Ausdrucks ∇_1 in Nr. **30**, und umgekehrt. Die ∞^{2m-3} *Charakteristiken* sind jetzt durch die Relationen

$$\Xi_1 = e_1 \cdots \Xi_{m-1} = e_{m-1}; \quad \Pi_1 : \Pi_2 : \cdots : \Pi_{m-1} = \gamma_1 : \cdots : \gamma_{m-1}$$

dargestellt; bezüglich der Erzeugung der Integrale durch die Charakteristiken gilt analoges wie früher. Der Übergang von einem bestimmten vollständigen Integral (124) zu einem andern geschieht durch eine *homogene Berührungstransformation* der Π, Ξ.

209) Vgl. *S. Lie*, Leipz. Ber. 1895, p. 85.

210) Die Fälle $m = 3$, $\nu = 2$ und $m = 4$, $\nu = 2, 3$ hat *A. V. Bäcklund* studiert, Math. Ann. 17, p. 285 (1880).

211) *Lie*, „Tr." 2, p. 108 f.

Das vollständige Integral (124) liefert nach Hinzufügung von $z = c$ ein vollständiges Integral im früheren Sinne. Ist (101) ein vollständiges Integral im Sinne von Nr. **30**, so ist $V(x_1 \dots x_m a_1 \dots a_{m-2}) = a_{m-1}$ ein vollständiges, aus ∞^{m-1} *Flächen* bestehendes Integral in der gegenwärtigen Bedeutung und umgekehrt.

Durch die Substitution $p_i = \frac{-q_i}{q_{m+1}}$, $z = x_{m+1}$ wird die Gleichung (82) vom Typus α) oder β) auf den hier betrachteten Fall reduziert; diese Umformung bietet den Vorteil, dass nunmehr auch solche Integral-M_m von (82) in Betracht kommen, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeiten durch Relationen in $x_1 \dots x_m$ allein bestimmt sind, deren $m+1$ Definitionsgleichungen also, in den $x_i q_i$ geschrieben, die Gleichung $q_{m+1} = 0$ umfassen.

36. Jacobi's zweite Methode[212]) zur Integration einer partiellen Differentialgleichung:

$$X_1(x_1 x_2 \dots x_m p_1 p_2 \dots p_m) = a_1 \tag{125}$$

gründet sich auf den Satz (vgl. Nr. **24**): Genügen m Funktionen $X_1 \dots X_m$ der Variabeln $x_i p_i$ den Identitäten

$$0 \equiv (X_i X_k)^{213}) \quad (i, k = 1 \dots m), \tag{126}$$

so verwandeln die aus den Gleichungen $X_i = a_i$ entnommenen Werte der p den Ausdruck $\sum p_k dx_k$ in ein exaktes Differential $dV(x_1 \dots x_m a_1 \dots a_m)$, und es ist $z = V + a$ ein vollständiges Integral von (125) mit den arbiträren Konstanten $a_1, a_2, \dots a_m$. Sind μ $(< m)$ hinsichtlich $p_1 \dots p_\mu$ unabhängige Funktionen $X_1 \dots X_\mu$, die den Bedingungen (126) genügen, bereits bestimmt und löst man die Gleichungen

$$X_i(x_1 x_2 \dots x_m p_1 p_2 \dots p_m) = a_i \quad (i = 1, 2, \dots \mu) \tag{127}$$

in der Form $p_1 = h_1, \dots p_\mu = h_\mu$[214]) auf, so hat man $(p_i - h_i, p_k - h_k) = 0$,

212) Die Methode wurde von *Jacobi* schon 1836 angegeben (Brief an *Encke*, J. f. Math. 17, p. 68 = Werke 4, p. 41, bes. p. 52 ff.; (vgl. 30.—34. Vorl über Dynamik und J. f. Math. 60, p. 1 [nachgelassene Arbeit] = Werke 5, p. 1; für $m = 3$ vgl. Werke 5, p. 439), später unabhängig von *W. F. Donkin* (Lond. Trans. 1854, p. 71; 1855, p. 299); *J. Liouville* (J. de math. 20, p. 137, 1855) und *É. Bour* (ebenda p. 185 = Par. sav. [étr.] 14, p. 792; J. éc. polyt. 22, cah. 39, p. 149, 1862) gefunden; vgl. *P. Gilbert*, Brux. Ann. 5^2, p. 1 (1881); *G. Boole*, Lond. Trans. 1863, p. 485; *J. Collet*, Ann. éc. norm. 1870, p. 7; 1876, p. 49; *H. Laurent*, J. de math. (3) 5, p. 249 (1879).

213) Im folgenden haben die Symbole $(\varphi\psi)$ und $[\varphi\psi]$ immer die in Nr. **24** angegebene Bedeutung.

214) *A. Mayer* (Math. Ann. 6, p. 165) bezeichnet ein solches System als ein „Jacobi'sches".

und das μ-gliedrige *Jacobi*'sche System $(p_i - h_i, f) = 0$ ist mit dem System (73) der Nr. **24** gleichbedeutend; es besitzt $2m - 2\mu$ von $p_1 \ldots p_\mu$ nicht abhängende Integrale, die das *Jacobi*'sche System

$$(128)\quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu+1}^{m}{}_k \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial h_i}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

erfüllen. Aus einem beliebigen, von $p_{\mu+1}$ nicht unabhängigen Integral

$$\varphi(x_1 \ldots x_m, p_{\mu+1} \ldots p_m a_1 \ldots a_\mu)$$

dieses Systems erhält man $X_{\mu+1}$,[215]) indem man die a_i durch die X_i ersetzt. Hat man so die Funktionen $X_1 \ldots X_m$ bestimmt, so genügen sie einer Identität der Form (72), und zwar entsteht Ω aus der oben definierten Funktion V, indem man die X für die a einsetzt.

Darnach erfordert die Integration des kanonischen Systems (107), oder, was nach Nr. **31** dasselbe besagt, der *Hamilton*'schen partiellen Differentialgleichung (108) eines dynamischen Problems je eine Operation $2m, 2m-2, \ldots 4, 2$ und eine Quadratur; man gelangt durch diese Methode direkt zu einem System kanonischer Elemente (Nr. **31**). Sind die lebendige Kraft T und die Kräftefunktion U, also auch die *Hamilton*'sche Funktion H von t frei, so reduziert sich die Integration von (108) auf diejenige der Gleichung[216]):

$$H(q_1 \ldots q_m, p_1 \ldots p_m) = h \quad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial q_i};\ h = \text{arb. Const.}\right),$$

da aus jedem vollständigen Integral $z = \Psi(q_1 \ldots q_m c_1 \ldots c_{m-1}, h) + c$ dieser Gleichung ein vollständiges Integral $z = \Psi - ht + c$ der Gleichung (108) erhalten wird, verlangt also je eine Operation $2m-2, 2m-4, \ldots 2$ und eine Quadratur.

Um die partielle Differentialgleichung

$$(129)\qquad X_1(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) = a_1$$

zu integrieren, hat man m Funktionen $X_2 \ldots X_m, Z$ der Variabeln $z x_i p_i$ derart zu bestimmen, dass die Identitäten $[ZX_i] \equiv [X_i X_k] \equiv 0$ stattfinden und die Gleichungen

$$(130)\qquad X_1 = a_1, X_2 = a_2 \ldots X_m = a_m, \quad Z = a_{m+1}$$

---

215) Vgl. die Darstellung von *J. König*, Math. Ann. 23, p. 504, wo statt der Systeme (128) die adjungierten Systeme totaler Differentialgleichungen (Nr. **14**) gebraucht werden. *Jacobi* benutzt zur Bestimmung je einer Lösung der successiven *Jacobi*'schen Systeme (128) oder (73) das Verfahren der Nr. **15**; andere Methoden sind von *A. Weiler* (Fussn. 92) und *A. Clebsch* (J. f. Math. 65, p. 263) gegeben worden.

216) *Jacobi*, 21. Vorl. üb. Dynamik.

nach $p_1 \ldots p_m, z$ auflösbar sind[217]). Der hieraus folgende Ausdruck für z ist dann ein vollständiges Integral von (129). Man kann die Integration so einrichten, dass die m ersten Gleichungen (130) nach $p_1 \ldots p_m$ aufgelöst werden können; dann wird die *Pfaff*'sche Gleichung (92) nach Ersetzung der p_i exakt, und ihre Integration liefert ein vollständiges Integral von (129); für $m = 2$ ist dies *Lagrange*'s Methode (Nr. 28).

37. Lie's Verallgemeinerung von Jacobi's zweiter Methode[218]). Bei Zugrundelegung von *Lie*'s allgemeinerer Definition des Begriffs: „vollständiges Integral" kann man, wenn eine Differentialgleichung (129) gegeben ist, bei der Herstellung eines Funktionensystems X_i, Z, P_i, das der Identität (68) genügt, von der Bedingung absehen, dass die Gleichungen (130) nach $p_1 \ldots p_m z$ auflösbar seien; diese Gleichungen bilden dann ein vollständiges Integral im allgemeineren Sinne. Die Methode erfordert wie die der vor. Nr. je eine Operation $2m - 1$, $2m - 3, \ldots 3, 1$. Im Falle der partiellen Differentialgleichung (125) verlangt die Herstellung der Identität (72) je eine Operation $2m - 2, 2m - 4, \ldots 2$ und eine Quadratur; ist X_1 in den p_i homogen nullter Ordnung, so kann man den Funktionen $X_2 \ldots X_m$ dieselbe Bedingung auferlegen; ihre Ermittelung geschieht dann durch je eine Operation $2m - 3$, $2m - 5, \ldots 1$, sie genügen der Identität (65) und die Gleichungen

$$X_1 = a_1, X_2 = a_2 \ldots X_m = a_m \tag{131}$$

bilden ein vollständiges Integral im Sinne von Nr. 35.

Aus dem Umstand, dass der Ausdruck (X_1, f), wenn X_1 eine *beliebige* Funktion der $2m$ Variabeln $x_i p_i$ bedeutet, die allgemeinste infinitesimale Transformation der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen der $2m$ Variabeln $x_i p_i$ darstellt, schliesst *Lie*[219]), dass eine weitere Vereinfachung des Integrationsgeschäfts unmöglich ist.

38. Involutionssysteme. Eine gemeinsame Integral-M_m mehrerer Gleichungen:

$$F_i(z x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{132}$$

erfüllt auch alle Relationen $[F_i F_k] = 0$;[220]) wiederholte Anwendung

217) Vgl. *V. G. Imschenetzky*, Arch. Math. 50, p. 304.

218) Math. Ann. 8, p. 240.

219) Math. Ann. 11, p. 529 ff.; Leipz. Ber. 1895, p. 265; vgl. den Schluss von Nr. 11.

220) Sie entstehen durch Elimination der 2. Ableitungen von z aus den ersten Derivierten des Systems (132); eine Verallgemeinerung der Klammer-

dieses Satzes führt entweder zu mehr als $m+1$ unabhängigen Relationen, und es giebt dann keine gemeinsame Integral-M_m des Differentialsystems (132), oder zu einem *Involutionssystem*, d. h. zu $\mu\,(\leq m+1)$ Gleichungen $F_i = 0$, vermöge deren alle $[F_i F_k]$ verschwinden[221]). Es lässt sich stets erreichen, dass diese Ausdrücke *identisch* verschwinden; man sagt dann: die Funktionen F_i sind *„involutorisch"* (*„in Involution"*). Im Falle $\mu = m+1$ giebt es nur *eine*, eben durch die Gleichungen $F_i = 0$ dargestellte gemeinsame Integral-M_m. Ist $\mu < m$, so kann man das Involutionssystem in der Form (127) schreiben, worin die a_i *arbiträre* Konstanten bedeuten. Die Integrale von (127) werden erhalten, indem man $m-\mu+1$ Funktionen

$$X_{\mu+1},\ X_{\mu+2},\ \ldots X_m,\ Z \tag{133}$$

nach Nr. 24 derart bestimmt, dass eine Identität (68) stattfindet (bezw. eine Identität (72), wenn die $X_1 \ldots X_\mu$ von z nicht abhängen), und sodann zu den Gleichungen (127) irgend $m-\mu+1$ Relationen hinzufügt, die der *Pfaff*'schen Gleichung

$$dZ - P_{\mu+1}\,dX_{\mu+1} - \cdots - P_m\,dX_m = 0 \tag{134}$$

genügen; insbesondere findet man so ein von $m-\mu+1$ arbiträren Konstanten $a_{\mu+1} \ldots a_{m+1}$ abhängendes *„vollständiges Integral"* (130) des Involutionssystems (127).

Unter den *Charakteristiken* des Involutionssystems (127)[222]) versteht man jede durch Gleichungen der Form:

$$X_1 = a_1,\ \ldots X_m = a_m,\ Z = a_{m+1};\ P_{\mu+1} = b_{\mu+1},\ \ldots P = b_m$$

definierte Element-M_μ, wobei die $a_{\mu+i}$, $b_{\mu+i}$ arbiträre Konstanten bedeuten. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind die Integrale des μ-gliedrigen vollständigen Systems (71); daher werden die Charakteristiken von (127) auch durch die Gleichungen

$$X_1 = a_1,\ \ldots X_\mu = a_\mu;\ \Phi_i = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots 2m-2\mu+1)$$

dargestellt, wenn die Φ_i irgendwelche von einander und von $X_1 \ldots X_\mu$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems (71) bedeuten. Die Charakteristiken sind charakteristische M_ν jeder einzelnen der partiellen Differentialgleichungen (127) (s. Nr. 34).

Ein Flächenelement $z,\ x_i p_i$, das für ein bestimmtes Konstantensystem $a_1 \ldots a_\mu$ den Gleichungen (127) genügt, möge singulär oder

---

operation für zwei Differentialgleichungen beliebiger Ordnung giebt *É. Combescure*, Par. C. R. 78, p. 1212 (1874).

221) *É. Bour*, J. éc. polyt. 22, cah. 39, p. 171 f.; *A. Mayer*, Math. Ann. 4, p. 88 (1871).

222) *Lie*, Gött. Nachr. 1872, p. 321; Math. Ann. 9, p. 245 (1876).

nichtsingulär heissen, je nachdem es alle oder nicht alle Gleichungen befriedigt, die durch Nullsetzen der μ-reihigen Unterdeterminanten des Schemas

$$(135)\quad \left\| \begin{array}{cccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial p_1} \cdots \dfrac{\partial X_i}{\partial p_m}, & \dfrac{\partial X_i}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial X_i}{\partial z}, & \cdots & \dfrac{\partial X_i}{\partial x_m} + p_m \dfrac{\partial X_i}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right| \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

entstehen. Durch jedes nichtsinguläre Flächenelement geht eine und nur eine Charakteristik des Involutionssystems (127); eine Integral-M_m, die ein nichtsinguläres Flächenelement E enthält, umfasst die ganze, von E ausgehende Charakteristik. Liegen zwei benachbarte Flächenelemente von (127) vereinigt, so gilt dies auch von den durch sie gehenden Charakteristiken. Die $\infty^{r-\mu}$ Charakteristiken, die bez. durch die Elemente einer gemeinsamen Integral-$M_{r-\mu}$ der Gleichungen (127) hindurchgehen, erzeugen eine Integral-M_r; da die gemeinsamen Integral-$M_{m-\mu}$ ohne Integration gefunden werden, so ist die Integration des Involutionssystems (127) geleistet, wenn man alle Lösungen des vollständigen Systems (71) kennt *(Lie's verallgemeinerte Cauchy'sche Methode)*.

Die *Pfaff*'sche Gleichung (134) vermittelt eine *Abbildung*[203]) (vgl. Nr. **34**) des Involutionssystems (127) im Raume $R_{m-\mu+1}$ mit den Punktkoordinaten (133), wobei jeder Charakteristik bezw. Integral-M_m des Involutionssystems ein Flächenelement bezw. eine Element-$M_{m-\mu}$ des Raums $R_{m-\mu+1}$ entspricht und umgekehrt. Der Übergang von einer bestimmten Abbildungsart zu einer beliebigen andern, oder, was dasselbe ist, von einem vollständigen Integral (130) zu einem andern, geschieht durch eine Berührungstransformation der $2m - 2\mu + 1$ Variabeln Z, $X_{\mu+k}$, $P_{\mu+k}$.

Eine etwas andere Auffassungsweise desselben Sachverhalts fliesst aus der Bemerkung, dass bei einer beliebigen Berührungstransformation der Variabeln $z, x_i p_i$ jedem Involutionssystem J ein Involutionssystem J' (Nr. **10**), jeder Charakteristik oder Integral-M_r von J eine ebensolche von J' entspricht[223]), mithin die Charakteristiken bezw. Integral-M_m des Involutionssystems (127) durch die Berührungstransformation

223) Die Berührungstransformationen sind die einzigen Transf. dieser Art; doch giebt es ausser Berührungstransformationen stets noch andere, die zwei *bestimmte* μ-gliedrige Involutionssysteme ineinander (oder ein bestimmtes Involutionssystem in sich) derart überführen, dass jeder Charakteristik oder Integral-M_m bezw. wieder eine solche entspricht; *Lie*, Christ. Forh. 1873, p. 242; *Lie-Scheffers*, „Bir." p. 581 ff.; *A. V. Bäcklund*, Math. Ann. 9, p. 313.

(136) $$z' = Z, x_i' = X_i; \quad p_i' = P \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

aus den Charakteristiken bezw. Integral-M_m des besondern Involutionssystems:

(137) $$x_1' = a_1, \quad x_2' = a_2 \ldots x_\mu' = a_\mu$$

hervorgehen. Aus demselben Grunde kann man, wenn irgend eine Berührungstransformation (136) bekannt ist, die Integrale aller partiellen Differentialgleichungen der Form $\varphi(Z, X_1 \ldots X_m) = 0$ [224]) und aller aus mehreren solchen Gleichungen bestehenden Involutionssysteme ohne Integration finden.

Da jedes μ-gliedrige Involutionssystem auf die Form (137) gebracht werden kann [225]), so besitzt ein Involutionssystem gegenüber allen Berührungstransformationen der Variabeln $z, x_i p_i$ ausser der Zahl μ keine Invariante; dasselbe gilt für die von z unabhängigen Involutionssysteme hinsichtlich aller Berührungstransformationen der Form:

$$z' = z + U(x, p); \quad x_i' = X_i(x, p); \quad p_i' = P_i(x, p).$$

Die erste Gleichung des Systems (127) lässt sich, wenn irgend eines ihrer vollständigen Integrale bekannt ist, durch eine Berührungstransformation auf die Form $x_1' = a_1$ bringen, wobei sich die übrigen Gleichungen (127) in ein $\mu - 1$-gliedriges Involutionssystem mit den Variabeln $z, x_2' \ldots x_m' p_2' \ldots p_m'$ verwandeln; durch Wiederholung dieses Prozesses ergiebt sich *A. Korkin*'s [226]) Methode zur Integration eines Involutionssystems.

Die etwaigen *singulären* [227]) Integrale des Involutionssystems (127) sind die gemeinsamen Integral-M_m der Gleichungen (127) und der Relationen, die aus dem Schema (135) durch Nullsetzen aller μ-reihigen Determinanten hervorgehen.

Ist ein Involutionssystem (127) gegeben, dessen linke Seiten von z frei und in den p_i homogen nullter Ordnung sind, so kann man wie in Nr. **37** $m - \mu$ weitere Funktionen $X_{\mu+1} \ldots X_m$ von derselben Beschaffenheit derart bestimmen, dass die Identität (65) besteht; unter Zugrundelegung des Integralbegriffs der Nr. **35** ergiebt sich dann eine ganz analoge Theorie wie vorhin, wenn die Begriffe „Charakteristik" und „vollständiges Integral" entsprechend modifiziert

224) Diesen Satz giebt für $m = 2$ schon *G. Monge*, Par. Hist. 1784, p. 174 ff.; vgl. *A. de Morgan*, Cambr. Trans. 9, p. [136] (1854); einen Spezialfall dieser Theorie bildet die „*verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung*": *Lie-Scheffers*, „Btr." p. 265 f., 518 Anm.; *Darboux*, „Sol. sing." p. 205 ff.

225) *Lie*, Math. Ann. 8, p. 215.

226) Par. C. R. 68, p. 1460 (1869); s. *A. Mayer*, Math. Ann. 6, p. 173 (1873).

227) „Goursat A" Art. 117; „Delassus" Art. 22.

werden. Gegenüber allen homogenen Berührungstransformationen der $2m$ Variabeln x, p besitzt ein Involutionssystem (127) dieser Art nur die Invariante μ.

39. Spezielle Involutionssysteme. Die verallgemeinerte *Cauchy*sche Methode (s. die vor. Nr.) nimmt für ein Involutionssystem der Form

$$(138) \qquad p_i = \psi_i(z, x_1 \ldots x_m, p_{\mu+1} \ldots p_m) \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

folgende Gestalt an: Sind die ψ_i an der Stelle $z^0, x_1^0 \ldots p_m^0$ regulär, so besitzt das vollständige System

$$(p_i - \psi_i, f) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

$2m - 2\mu + 1$ von $p_1 \ldots p_\mu$ unabhängige Lösungen ζ, $\xi_{\mu+k}$, $\pi_{\mu+k}$, die sich vermöge:

$$(139) \qquad x_1 = x_1^0 \ldots x_\mu = x_\mu^0$$

bezw. auf z, $x_{\mu+h}$, $p_{\mu+k}$ reduzieren, und es besteht die Identität:

$$dz - \psi_1 dx_1 - \cdots - \psi_\mu dx_\mu - \sum_{\mu+1}^{m} p_h dx_h \text{ [228]} \equiv \varrho(d\zeta - \sum_{\mu+1}^{m} \pi_h d\xi_h).$$

Ist die Funktion $\varphi(x_{\mu+1} \ldots x_m)$ an der Stelle $x_{\mu+1}^0 \ldots x_m^0$ regulär, und hat man

$$z^0 = \varphi(x_{\mu+1}^0 \ldots x_m^0), \; p_{\mu+k}^0 = \frac{\partial \varphi(x_{\mu+1}^0 \cdots x_m^0)}{\partial x_{\mu+k}^0},$$

so erhält man durch Elimination von $p_{\mu+1} \ldots p_m$ aus den Gleichungen

$$\zeta = \varphi(\xi_{\mu+1} \cdots \xi_m); \quad \pi_{\mu+k} = \frac{\partial \varphi(\xi_{\mu+1} \cdots \xi_m)}{\partial \xi_{\mu+k}} \quad (k = 1 \cdots m - \mu)$$

dasjenige, an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ reguläre Integral z des Differentialsystems (138), das vermöge (139) in $\varphi(x_{\mu+1} \ldots x_m)$ übergeht [229]).

Die Integration *jedes* Involutionssystems partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung kann auf die eines Involutionssystems der Form

$$(140) \qquad p_i = h_i(x_1 x_2 \ldots x_m p_{\mu+1} \ldots p_m) \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

---

228) Über die Klasse dieses *Pfaff*'schen Ausdrucks vgl. *G. Morera* (Fussn. 173) und mein Buch Kap. 13, Art. 363; die Betrachtung obiger Identität führt zu einer leicht ersichtlichen Verallgemeinerung der in Nr. 30 gegebenen Sätze (*N. Saltykow*, J. de math. (5) 3, p. 423 (1897); Par. C. R. 128, p. 166, 225, 274, 1550 (1899)).

229) Seine Existenz folgt aus der Passivität des Systems (138); es kann nach *É. Delassus* (Ann. éc. norm. 1897, p. 117) auch durch successive Integration von μ partiellen Diff.-Gl. 1. Ordn. mit $m - \mu + 1$ Independenten erhalten werden; für $m = 2$, $\mu = 2$ vgl. *Darboux*, „Surfaces" 2, p. 258.

zurückgeführt werden[230]). Führt man hierin statt der $x_1 \dots x_\mu$ mittels der Formeln (35) Nr. 17 die neuen Variabeln y_i ein, wodurch h_i in h_i' übergehe, so ist eine der transformierten Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = h_1' + y_2 h_2' + \cdots + y_\mu h_\mu', \tag{141}$$

und dasjenige Integral z derselben, das sich vermöge $y_1 = 0$ in $\varphi(x_{\mu+1} \dots x_m)$ verwandelt, giebt nach Elimination der y_i mittels (35) das Integral der Gleichungen (140), welches sich vermöge (139) auf φ reduziert (*Lie*'s[231]) „*Fundamentaltheorem*"). Dadurch ist die Integration des μ-gliedrigen Involutionssystems (140) auf diejenige einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung (141) mit $m - \mu + 1$ Independenten zurückgeführt[232]); das Verfahren beruht auf derselben geometrischen Thatsache, wie die Methode der Nr. 17 und geht in letztere über, wenn die h_i in den p homogen und linear sind. Um darnach z. B. die Gleichung $p_1 = \varphi(x_1 \dots x_m p_2 \dots p_m)$ zu integrieren, bestimme man eine zu ihr involutorische Gleichung $f(x, p) = a$ und führe dies Involutionssystem auf *eine* partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit $m - 1$ Independenten zurück; durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einer Gleichung 1. Ordnung mit einer Unabhängigen, deren vollständiges Integral durch Quadratur erhalten wird und mit Hilfe blosser Eliminationen je ein vollständiges Integral aller vorhergehenden Gleichungen liefert. Die Methode verlangt dieselben Operationen wie die zweite *Jacobi*'sche; ist φ in den p homogen 1. Ordnung, so kann man für f eine homogene Funktion nullter Ordnung in den p wählen, und analog bei den folgenden Reduktionen, wodurch die nötigen Operationen um je *eine* Einheit erniedrigt werden. Man kann auch das Verfahren nach dem k^{ten} Schritte abbrechen und die erhaltene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit $m - k$ Independenten nach *Cauchy*'s Methode integrieren.

40. Funktionengruppen[233]). Haben s unabhängige Funktionen $f_1, f_2, \dots f_s$ der $2m$ Variabeln $x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m$ die Eigenschaft, dass

230) *A. Mayer,* Math. Ann. 8, p 313 (1875); *Lie,* Math. Ann. 9 p. 275 f.

231) Christ. Forh. 1872, p. 28; Gött. Nachr. 1872, p. 321; *Mayer,* Math. Ann. 6, p. 162 (1873).

232) Diese Methode ist natürlich auch auf ein System der Form (138) anwendbar (*Delassus,* Ann. éc. norm. 1897, p. 118; dessen Buch p. 38); *F. Schur* führt die Integration der *unaufgelösten* Form des Involutionssystems (127) auf ein System gewöhnlicher Diff.-Gl. zurück, Leipz. Ber. 1892, p. 182; 1894, p. 38.

233) *S. Lie,* Christ. Forh. 1873, p. 16; Math. Ann. 8, p. 215, ebenda 11, p. 464; „Tr." 2, Abt. 2; vgl. „Goursat A" Kap. 12; mein Buch Kap. 14.

alle Klammerausdrücke $(f_i f_k)$ als Funktionen von $f_1 \dots f_s$ dargestellt werden können, so nennt man den Inbegriff aller Funktionen $\varphi(f_1 \dots f_s)$ eine s-gliedrige *Funktionengruppe* G; das System der linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(142) \qquad (f_1 f) = 0,\ (f_2 f) = 0 \dots (f_s f) = 0$$

ist dann (und nur dann) *vollständig*, und die Lösungen desselben bilden eine $2m - s$-gliedrige Funktionengruppe G', die *Polargruppe* von G; die Polargruppe von G' ist wieder G. Jede Funktion von G, die auch in G' enthalten ist, also mit allen Funktionen von G in Involution liegt (Nr. 38), heisst eine *ausgezeichnete Funktion* von G. Ist 2ν der Rang der schiefsymmetrischen Matrix

$$(143) \qquad \| (f_i f_k) \| \quad (i, k = 1, 2, \dots s),$$

so sind $s - 2\nu$ unabhängige ausgezeichnete Funktionen $u_1 \dots u_{s-2\nu}$ in G enthalten; die linearen Relationen

$$\lambda_1 (f_1 f_i) + \lambda_2 (f_2 f_i) + \dots + \lambda_s (f_s f_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots s)$$

besitzen $s - 2\nu$ unabhängige Lösungensysteme $\lambda_1^{(k)} \dots \lambda_s^{(k)}$, und die Gleichungen

$$(144) \quad \lambda_1^{(k)} (f_1 f) + \lambda_2^{(k)} (f_2 f) + \dots + \lambda_s^{(k)} (f_s f) = 0 \quad (k = 1, \dots s - 2\nu)$$

bilden ein $s - 2\nu$-gliedriges vollständiges System, das mit dem System $(u_i f) = 0$ äquivalent ist, und u. a. die Lösungen $f_1 \dots f_s$ besitzt.

Für $s > m$ ist $\nu > s - m$; ist $\nu = s - m$, dann und nur dann besteht eine Identität[234])

$$(145) \quad p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m = dV(x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m) + \sum_1^s {}_k \Phi_k df_k,$$

worin V durch eine Quadratur, die Φ_k durch Auflösung linearer Gleichungen gefunden werden. In allen Fällen giebt es $2m$ unabhängige Funktionen P_i, X_i derart, dass die Identitäten (66) Nr. 24 stattfinden, und die Gruppen G, G' bezw. in den *kanonischen Formen*

$$(G) \qquad P_1, X_1;\ P_2, X_2, \dots P_\nu, X_\nu;\ X_{\nu+1}, X_{\nu+2}, \dots X_{s-\nu};$$

$$(G') \qquad P_{s-\nu+1}, X_{s-\nu+1} \dots P_m, X_m;\ X_{\nu+1}, X_{\nu+2}, \dots X_{s-\nu}$$

erscheinen; $X_{\nu+1} \dots X_{s-\nu}$ sind die ausgezeichneten Funktionen. Gegenüber beliebigen Berührungstransformationen der Variabeln x, p besitzt also G nur die beiden Invarianten s und 2ν.

Im Falle $\nu = s - m$, und nur in diesem enthält G m-gliedrige Involutionssysteme, z. B. das folgende: $X_1, X_2 \dots X_{s-\nu}$.

---

234) Dieser Satz ist in der verallgemeinerten *Frobenius*'schen Theorie (Nr. 26) als Spezialfall enthalten; vgl. mein Buch Kap. 14.

Die Gruppe G heisst *homogen*, wenn die s Ausdrücke

$$\sum p_h \frac{\partial f_1}{\partial p_h}, \sum p_h \frac{\partial f_2}{\partial p_h}, \cdots \sum p_h \frac{\partial f_s}{\partial p_h} \tag{146}$$

in G enthalten sind. Sind dann alle f_i in den p homogen nullter Ordnung, so bilden sie ein s-gliedriges Involutionssystem. Andernfalls kann G in der Form $N_1, N_2, \ldots N_{s-1}, H$ geschrieben werden, wo die N_i in den p homogen nullter, und H homogen 1. Ordnung ist. Die $s - 2\nu$ ausgezeichneten Funktionen von G sind alle oder nicht alle homogen nullter Ordnung, je nachdem der Rang $2\nu'$ der mit den Elementen (146) geränderten Matrix (143) gleich 2ν oder $2\nu + 2$ ist. Ist $2\nu' = 2\nu$, so besitzen die linearen Gleichungen

$$\lambda_1(f_1 f_i) + \cdots + \lambda_s(f_s f_i) + \lambda_{s+1} \cdot \sum p_h \frac{\partial f_i}{\partial p_h} = 0 \quad (i = 1 \cdots s)$$

$s - 2\nu + 1$ unabhängige Lösungen $\lambda_1^{(k)} \ldots \lambda_{s+1}^{(k)}$, und die partiellen Differentialgleichungen:

$$\lambda_1^{(k)}(f_1 f) + \cdots + \lambda_s^{(k)}(f_s f) + \lambda_{s+1}^{(k)} \cdot \sum p_k \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0 \tag{147}$$
$$(k = 1, \cdots s - 2\nu + 1)$$

bilden ein $s - 2\nu + 1$-gliedriges vollständiges System, dem u. a. auch die Funktionen $f_1 \ldots f_s$ genügen. Ist G homogen, so giebt es immer $2m$ unabhängige Funktionen $P_i X_i$ derart, dass die Beziehungen (66) stattfinden, die P_i in den p homogen erster, die X_i homogen nullter Ordnung sind, und dass G in der einen oder der andern *kanonischen Form*:

$$P_1, X_1; \ldots P_\nu, X_\nu; \; X_{\nu+1}, \ldots X_{s-\nu};$$
$$\text{bezw.} \quad P_1, X_1; \ldots P_\nu, X_\nu; \; P_{\nu+1}, \ldots P_{s-\nu}$$

erscheint, je nachdem $2\nu'$ gleich 2ν oder $2\nu + 2$ ist; gegenüber allen *homogenen* Berührungstransformationen der x, p besitzt also eine homogene Gruppe G nur die Invarianten s, 2ν, $2\nu'$.

Ist $s \geqq m$ und $\nu = \nu' = s - m$, dann und nur dann besteht eine Identität[234]):

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m \equiv \varPsi_1 df_1 + \varPsi_2 df_2 + \cdots + \varPsi_s df_s. \tag{148}$$

In diesem Fall (und nur in diesem) enthält G m-gliedrige Involutionssysteme nullter Ordnung, z. B. das folgende: $X_1, X_2, \ldots X_{s-\nu}$.

41. Fortsetzung. Ist ein q-gliedriges Involutionssystem der Form

$$f_i(x_1 x_2 \ldots x_m p_1 p_2 \ldots p_m) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots q) \tag{149}$$

zur Integration vorgelegt, und sind φ, ψ Lösungen des *Jacobi*'schen Systems:

$$(150) \qquad (f_1 f) = 0,\ (f_2 f) = 0,\ \ldots (f_q f) = 0,$$

so ist nach dem *Poisson*'schen Theorem (Nr. **25**) auch $(\varphi\psi)$ eine Lösung[234a]; sind also $f_{q+1}, f_{q+2}, \ldots f_r$ bekannte Integrale von (150), so gilt dasselbe von allen Funktionen $f_1 \ldots f_r \ldots f_s$ der kleinsten Gruppe G, in der $f_1 \ldots f_r$ enthalten sind. Umfasst G m-gliedrige Involutionssysteme, d. h. ist $s > m$ und $2\nu = 2s - 2m$ der Rang der Matrix (143), so besteht die Identität (145) und die Funktionen $f_1 \ldots f_s, \Phi_{q+1} \ldots \Phi_s, z - V$ geben zusammen alle Lösungen des vollständigen Systems $[f_1 f] = 0, \ldots [f_q f] = 0$, womit die Integration des Involutionssystems (149) nach der verallgemeinerten *Cauchy*'schen Methode erledigt ist (Nr. **38**). Enthält G kein m-gliedriges Involutionssystem, so besitzt das vollständige System (144) ausser $f_1 \ldots f_s$ noch andere davon unabhängige Lösungen; die Ermittelung einer solchen Lösung f_{s+1} fordert eine Operation $2\varrho = 2m - 2s + 2\nu$. Die Anwendung des analogen Verfahrens auf die von $f_1 \ldots f_{s+1}$ erzeugte Gruppe fordert eine Operation $2\varrho - 2l$ $(l \geq 1)$ etc. Hat man solcherweise so viele Funktionen $f_{s+1} \ldots f_{s'}$ gefunden, dass das vollständige System, das zu der von $f_1 \ldots f_{s'}$ erzeugten Gruppe G' in derselben Beziehung steht wie (144) zu G, ausser $f_1 \ldots f_{s'}$ keine Integrale besitzt, so enthält G' m-gliedrige Involutionssysteme, und die Integration[235] von (149) fordert noch eine Quadratur[236].

Sind $f_1 \ldots f_q$ in den p homogen nullter Ordnung, so ist mit φ zugleich auch $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$ eine Lösung von (150); sind also $f_{q+1} \ldots f_r$ bekannte Lösungen, so gilt dasselbe von allen Funktionen $f_1 \ldots f_s$ der kleinsten *homogenen* Gruppe G, welche die Funktionen $f_1 \ldots f_r$ umfasst. Hat man $s \geq m$ und $\nu = \nu' = s - m$, d. h. enthält G m-gliedrige Involutionssysteme nullter Ordnung, so besteht eine Identität (148), und die Funktionen $f_1 \ldots f_s, \Psi_{q+1} \ldots \Psi_s$ liefern alle Lösungen von (150), womit die Integration von (149) geleistet ist. Andernfalls sei zunächst $2\nu' = 2\nu + 2$; dann lässt sich aus dem Umstand, dass G *homogen* ist, kein Vorteil ziehen, und es ist das vorige Verfahren

---

234a) Eine Verallgemeinerung bei *H. Laurent*, J. de math. (2) 17, p. 422 (1872); vgl. „Goursat A", Note II.

235) In dieser Theorie sind *Jacobi*'s Sätze über die Multiplikatoren von Gleichungen der Form $[Ff] = 0$ oder $(f_1 f) = 0$ (J. f. Math. 29, § 19 = Werke 4, p. 413; 18. Vorl. über Dyn.) als Korollare enthalten, s. *Lie*, Math. Ann. 11, p. 519; andere Spezialfälle behandeln *Jacobi*, J. f. Math. 60, p. 143 = Werke 5, p. 151 und *G. Boole*, Lond. Trans. 1863, p. 495—501.

236) *Lie's* ursprüngliche Methode (Math. Ann. 8) erfordert die Bestimmung der ausgezeichneten Funktionen von G.

anzuwenden. Ist aber $2\nu' = 2\nu$, sind also alle ausgezeichneten Funktionen von G nullter Ordnung, so bestimme man durch eine Operation $2m - 2s + 2\nu - 1$ ein von $f_1 \ldots f_s$ unabhängiges Integral f_{s+1} des vollständigen Systems (147); dann sind alle ausgezeichneten Funktionen der von $f_1 \ldots f_{s+1}$ erzeugten homogenen Gruppe wieder homogen der nullten Ordnung etc. Hat man so die Funktionen $f_{s+1} \ldots f_{s'}$ derart bestimmt, dass das vollständige System, das zu der von $f_1 \ldots f_{s'}$ erzeugten homogenen Gruppe G' in derselben Beziehung steht, wie (147) zu G, ausser $f_1 \ldots f_{s'}$ keine Lösungen besitzt, so enthält G' m-gliedrige Involutionssysteme nullter Ordnung, und die Integration von (149) ist erledigt[237]).

Lie[238]) hat gezeigt, dass die vorstehenden Theorieen die bestmögliche Ausnützung bekannter Lösungen $f_{q+1} \ldots f_r$ des Systems (150) gewährleisten.

Ist φ eine Lösung von (150), so gestattet dieses vollständige System die infinitesimale Transformation (φf); mittels dieser Bemerkung erhält *Lie*[239]) die Sätze dieser Nummer auch aus seiner Integrationstheorie der vollständigen Systeme mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

Enthält die vorhin genannte homogene Gruppe G nicht lauter Funktionen, die in den p homogen nullter Ordnung sind, so kann sie die Form $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_s$ erhalten, wo alle φ in den p homogen erster Ordnung sind. Dann *gestattet* das homogene Involutionssystem (149) die infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen $(\varphi_1 f) \ldots (\varphi_s f)$, mithin alle Transformationen der von ihnen erzeugten unendlichen[240]) Transformationsgruppe. Erteilt man einem Involutionssystem

$$(151) \qquad F_i(z, x_1 \ldots x_{m-1}, p_1 \ldots p_{m-1}) = c_i \qquad (i = 1, \ldots q)$$

nach Nr. **35** die homogene Gestalt (149), so verwandelt sich jede infinitesimale Berührungstransformation der Variabeln z, $x_1 \ldots x_{m-1}$, $p_1 \ldots p_{m-1}$, die das System (151) invariant lässt, in eine infinitesimale homogene Berührungstransformation, die das System (149) in sich überführt; die Theorie der homogenen Gruppen lehrt dann, wie man bekannte infinitesimale Berührungstransformationen[241]), die ein Involutionssystem (151) invariant lassen, für dessen Integration verwertet.

---

237) Über die Gestalt, die diese Theorie für solche Involutionssysteme annimmt, die z explizite enthalten, vgl. mein Buch Kap. 14.

238) Math. Ann. 11, p. 540, 544 f.

239) Ebenda p. 521—529 (vgl. Nr. **13**, Fussn. 80).

240) Vgl. *Lie*, Math. Ann. 24, p. 554, Anm.; „Tr." 2, Kap. 16; s. auch III D 7.

241) S. auch *Bäcklund*, Math. Ann. 15, p. 50—62; mein Buch Kap. 14, § 4.

So beruht die Vereinfachung, welche die Integration einer die Unbekannte z nicht explicite enthaltenden Gleichung darbietet, darauf, dass eine solche Gleichung die infinitesimale Translation $\frac{\partial f}{\partial z}$ gestattet. *Lie*[242]) hat die allgemeinere Frage behandelt, welche Vorteile sich für die Integration einer Gleichung 1. Ordnung mit bekannten infinitesimalen Punkttransformationen ergeben. Eine Klassifikation und Integrationstheorie aller Gleichungen 1. Ordnung mit 2 Independenten, die bekannte endliche Gruppen von Punkttransformationen gestatten, hat *W. de Tannenberg*[243]) nach *Lie*'s Angaben[244]) durchgeführt.

42. Die Bäcklund'sche Theorie[245]). Sind μ ($\leqq 2m$) unabhängige Gleichungen

$$(152) \qquad F_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu)$$

gegeben, und ist $2k$[246]) die Ordnung der höchsten vermöge (152) nicht identisch verschwindenden Determinanten der Matrix $\| [F_i F_k] \|$, so besitzen die Gleichungen (152), falls $k > \mu - m$, ∞^∞ gemeinsame Integral-M_{m-k}, die zusammen alle durch (152) definierten Flächenelemente umfassen und von „charakteristischen" Mannigfaltigkeiten $M_{\mu-2k}$ erzeugt werden, und im Falle $k = \mu - m$ einfach unendlich viele Integral-M_{m-k}; dagegen kann nicht jedes Flächenelement, das den Gleichungen (152) genügt, einer gemeinsamen Integral-M_{m-k+1} dieser Gleichungen angehören. Ist $\mu \geqq m + 1$ und $k = \mu - m - 1$, so definieren die Gleichungen (152) eine Element-$M_{2m+1-\mu}$. Die Theorie der Involutionssysteme (Nr. **38**) ist in diesen Sätzen als Spezialfall ($k = 0$) enthalten.

V. Höhere Differentialprobleme.

1. Differentialsysteme mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

43. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinsichtlich ihrer Charakteristiken erster Ordnung. Die Relationen

$$(153) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

242) Math. Ann. 5, p. 200; „*Lie-Scheffers* Btr." Kap. 13.

243) Toul. Ann. 5 (1891).

244) „Tr." 3, p. 128, Anm.

245) *A. V. Bäcklund*, Math. Ann. 11, p. 412 (1877); mein Buch Kap. 14, § 5; die Theorie ist ein Spezialfall der „verallgemeinerten *Frobenius*'schen Theorie" des *Pfaff*'schen Problems, vgl. Nr. **26**.

246) Man hat stets $\mu - m - 1 \leqq k \leqq \frac{1}{2}\mu$.

$$dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy \tag{154}$$

bestimmen im allgemeinen eine diskrete Zahl von Wertsystemen r, s, t; durch einen Streifen S von Flächenelementen 1. Ordnung des Raumes $R_3\,(xyz)$ geht also[247]) im allgemeinen eine diskrete Zahl von Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (153). Bleiben die Werte $r\,s\,t$ für irgend zwei benachbarte Flächenelemente $xyzpq$ und $x + dx \cdots q + dq$ des Streifens S vermöge (153), (154) unbestimmt, so heisst letzterer eine „*Charakteristik erster Ordnung*" der partiellen Differentialgleichung (153). Deutet man $x \ldots q$ als Parameter, $r\,s\,t$ als Punktkoordinaten eines R_3, also die Gleichung (153) als eine ∞^5-Schar von Flächen F, die Relationen (154) als die Gleichungen einer Geraden des Komplexes $(\varkappa)$, der aus allen zu den Erzeugenden des Kegels

$$rt - s^2 = 0 \tag{155}$$

parallelen Linien besteht, so ergiebt sich folgende Klassifikation[248]) der Gleichungen (153):

a) Die Gleichung (153) hat die *Ampère*'sche[249]) Form

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{156}$$
$$(H.\,K \ldots \text{Funktionen von } xyzpq);$$

jede Fläche F enthält zwei verschiedene Scharen von je ∞^1 Geraden des Komplexes $(\varkappa)$; demgemäss giebt es zwei verschiedene Systeme von Charakteristiken 1. Ordnung; das eine ist definiert durch

$$dz = p\,dx + q\,dy;\ Ndp + L\,dx + \lambda_1 dy = 0;\ Ndq + \lambda_2 dx + H\,dy = 0 \tag{157}_1$$
$$\left(\lambda_1,\ \lambda_2 = -K \pm \sqrt{K^2 - HL - MN}\right);$$

das andere durch die Gleichungen $(157)_2$, die sich durch Vertauschung von $\lambda_1\ \lambda_2$ ergeben. Im Falle der *Monge*'schen[250]) Gleichung, d. h. für $N = 0$, sind die Systeme $(157)_1$, $(157)_2$ bez. zu ersetzen durch die beiden Systeme[250a]):

$$dy = \lambda_i dx;\ H\lambda_i dp + L\,dq + M\lambda_i dx = 0,\ dz = p\,dx + q\,dy\ (i = 1, 2). \tag{158}_i$$

---

247) *É. Goursat*, Acta math. 19, p. 291 = „Goursat B", 1, Art. 16.

248) *Goursat*, a. a. O. p. 297 = „Goursat B", 1, Art. 87.

249) J. éc. pol. 11, cah. 18, p. 34 (1820); vgl. *de Morgan*, Cambr. Trans. 9, p. 515 (1854), bes. Art. 20 u. 23; *L. Natani*, „Analysis" p. 365—380; *É. Bour*, J. éc. pol. 22, cah. 39, p. 186 (1862); *G. Boole*, J. f. Math. 61, p. 309 (1863) = „Boole", Suppl. Vol. Kap. 28, 29; *Imschenetzky*, Arch. Math. 54, p. 209 (1872) = „Mansion", deutsche Ausg., Anhang 2; „Goursat B" 1, Kap. 2; *A. Cayley*, Quart. J. 26, p. 1 (1893) = Pap. 13, p. 358.

250) Par. Hist. 1784, p. 118; vgl. *A. M. Legendre*, ebenda 1787, p. 309.

250a) Für den Fall, dass eine oder beide Funktionen H, L verschwinden vgl. „Goursat B" 1, Art. 25.

b) Die Gleichung (153) stellt Komplexkegel von $(\varkappa)$ oder Tangentialebenen von solchen dar, hat also die Form (156), wobei $K^2 - HL - MN \equiv 0$; die beiden Charakteristikensysteme sind identisch.

c) Die Flächen F sind Developpable, deren Erzeugende dem Komplex $(\varkappa)$ angehören, aber keine Kegel; die Gleichung (153) entsteht durch Elimination von α aus 2 Gleichungen der Form:

(159) $r + 2\alpha s + \alpha^2 t + 2\psi(xyzpq\alpha) \equiv 0,\ s + {}^t\alpha + \psi'_\alpha = 0;$

es giebt ein doppeltzählendes Charakteristikensystem 1. Ordnung, definiert durch 3 Gleichungen:

(160) $dz = p\,dx + q\,dy;\ \varphi_1(x, \ldots q, dx, \ldots dq) = 0,\ \varphi_2(x, \ldots a_{12}) = 0.$

d) Die Flächen F sind Regelflächen des Komplexes $(\varkappa)$, weder vom 2. Grad noch Developpable; es giebt ein einfach zählendes Charakteristikensystem erster Ordnung, definiert durch 3 Gleichungen der Form (160).

e) Jede Fläche F enthält eine diskrete Zahl von Komplexlinien; es giebt ∞^4 Charakteristiken 1. Ordnung.

f) Der allgemeine Fall.

Für die Kategorien b) und c) und nur für diese hat man vermöge (153)

(161) $$4RT - S^2 \equiv 0 \quad \left(R = \frac{\partial F}{\partial r} \text{ etc.}\right).$$

Bei einer beliebigen Berührungstransformation des Raums $R_3(xyz)$ geht jede Charakteristik 1. Ordnung wieder in eine solche, also jede partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in eine Gleichung derselben Kategorie über.

Eine aus ∞^2 Flächenelementen $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ bestehende Element-M_2 (Nr. 9), die keine Fläche bildet, schliesst sich entweder an einen Streifen 1. Ordnung, oder an *ein* Flächenelement 1. Ordnung an; dagegen kann eine Element-M_2 2. Ordnung, deren Flächenelemente 1. Ordnung ebenfalls eine ∞^2-Schar bilden und sich an eine Kurve des R_3 anschliessen oder denselben Punkt enthalten, in den Koordinaten $x\,y \ldots t$ nicht dargestellt werden (vgl. Nr. 9, Fussn. 46a). *F. Engel*[251]) gebraucht daher statt $r\,s\,t$ die homogenen Koordinaten $-\varrho : u,\ -\sigma : u,\ -\tau : u$ und eine 5te Koordinate v, die mit den vorigen durch die Relation $\varrho\,\tau - \sigma^2 + u\,v = 0$ verknüpft ist. Dann ist $u = 0$ diejenige partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, die alle Kurven des R_3 zu Integralen hat; die *Ampère*'sche Gleichung wird in den Koordinaten $\varrho\ \sigma\ \tau\ u\ v$ linear und homogen. Die *Monge*'sche Gleichung

251) Leipz. Ber. 1893, p. 468.

ist in $\varrho\ \sigma\ \tau\ u$ linear und homogen und dadurch charakterisiert, dass sie die ∞^3„Punkte" des R_3 zu Integralen hat. Da sich die Koordinaten $\varrho \ldots v$ bei jeder erweiterten Berührungstransformation des R_3 linear und homogen transformieren, so verwandelt sich eine *Monge*'sche Gleichung bei beliebiger Berührungstransformation im allgemeinen in eine *Ampère*'sche; umgekehrt erhält die Gleichung (156) durch jede Berührungstrsf., die ∞^3 ihrer Integralflächen in die Punkte eines R_3' transformiert, die *Monge*'sche Form [252]).

44. Erste Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Jede Integralfläche einer Gleichung 2. Ordnung der ersten 4 Kategorien ist von ∞^1 Charakteristiken 1. Ordnung erzeugt, und zwar im Falle a) auf zwei verschiedene Arten; umgekehrt ist jede M_2 von Flächenelementen $x\ y\ z\ p\ q$, die aus ∞^1 Charakteristiken besteht, ein Integral von (153). Die Charakteristiken eines intermediären Integrals $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ (Nr. **6** und **34**) sind unter denjenigen der Gleichung (153) enthalten; ersetzt man demnach in den Definitionsgleichungen der Charakteristiken 1. Ordnung von (153) die $dx, \ldots dq$ durch ihre Werte (81), so ergiebt sich für f ein System Σ partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den Indepondenten $x \ldots q$. [253]) Man findet alle ersten Integrale $f = 0$ durch Aufsuchung aller Funktionen f, die das System Σ *vermöge* $f = 0$ erfüllen. Jede Lösung f des Systems Σ liefert ein erstes Integral:

$$f(x\,y\,z\,p\,q) = \text{const.} \tag{162}$$

der partiellen Differentialgleichung (153) und umgekehrt.

Bei der Kategorie a) erhält man so zwei Systeme Σ_1 und Σ_2, bestehend aus je zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, die zu dem System $(157)_1$ bezw. $(157)_2$ adjungiert sind (Nr. **14**). Ist (162) ein erstes Integral der Gleichung (156), so ist df eine integrable Kombination eines der Systeme $(157)_1$, $(157)_2$, und umgekehrt. Ist df eine integrable Kombination des einen Systems (157), so gehören die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (162) dem andern Charakteristikensystem von (153) an, und umgekehrt. Sind u_1, u_2 bezw. Lösungen von Σ_1, Σ_2, so sind die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung: $u_1 = c_1$ und $u_2 = c_2$ involutorisch [254]).

252) Auf diese einfache Bemerkung reduziert sich *A. V. Imschenetzky*'s „Methode der Variation der Konstanten", a. a. O. Kap. 4; vgl. *Lie*, Christ. Forh. 1872, p. 24.

253) „Goursat B", 1, Art. 90.

254) Diese Beziehung benützt *Monge* (Par. Hist. 1784, p. 168) zur Integration der part. Differentialgl. 1. Ordnung.

Zwei Lösungen u, v desselben Systems Σ_i sind dann und nur dann involutorisch, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$; dann liegt der Fall b) vor, und die Systeme Σ_i koincidieren zu einem einzigen *vollständigen* System, das also ausser u, v eine dritte (mit u und v involutorische) Lösung $w(xyzpq)$ besitzt. Umgekehrt, ist das System Σ_1 vollständig, so ist es mit Σ_2 identisch, und seine 3 Lösungen u, v, w sind involutorisch. Die Gleichung (156) hat dann zwei verschiedene allgemeine erste Integrale $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$;[255]) ihre allgemeinste Integral-M_2 ergiebt sich nach Ermittelung von u, v, w als Umhüllungsgebilde von irgend ∞^1 der dreifach unendlich vielen Element-M_2:

$$u = a,\ v = b,\ w = c.$$

Eine Gleichung (153) dieser Art[256]) ist durch Berührungstransformation äquivalent mit $r = 0$, oder mit $rt - s^2 = 0$, oder mit der Gleichung, deren allgemeines Integral aus allen „Kurven“ des $R_3(xyz)$ besteht (s. d. vor. Nummer).

Besitzt eine Gleichung (156) der Kategorie b) *ein* erstes Integral (162), so wird sie durch eine Berührungstransformation, deren Aufstellung mit der Integration von (162) äquivalent ist, auf eine von s und t freie Form gebracht[257]).

45. Fortsetzung. Existieren für eine Gleichung (156) der Kategorie a) zwei Lösungen u, v des Systems Σ_1, so besitzt die Gleichung (156) ein allgemeines erstes Integral:

$$u(xyzpq) = \varphi[v(xyzpq)], \tag{163}$$

und wird durch Derivation (Fussn. 2) dieser Gleichung nach x, y und Elimination von $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ wiedergewonnen. Es giebt eine und nur eine Gleichung der Form (163), die einen beliebig gegebenen Streifen S der 1. Ordnung enthält, und auf deren Integration die Lösung des *Cauchy*'schen Problems, d. h. die Bestimmung der durch S gehenden Integralfläche zurückkommt.

Besitzt auch Σ_2 zwei Lösungen $u'\ v'$, existiert also ein zweites allgemeines intermediäres Integral $u' = \psi(v')$, und hat man u und u' ermittelt, so erfordert die Aufsuchung von v und die Integration der partiellen Differentialgleichung (163) je eine Quadratur[258]); alle Glei-

255) *Boole*, Lond. Trans. 1862, p. 451 f.; Suppl. Vol. p. 123, J. f. Math. 61, p. 309; *Lie*, Math. Ann. 5, § 19; „Goursat B“, Kap. 1.

256) Die Verallgemeinerung für m Independente giebt *J. Kürschak*, Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn, 14, p. 285 (1898); s. Nr. 57.

257) *Ampère*, a. a. O. (Fussn. 249) p. 126 ff.

258) *Lie*, Norw. Arch. 2, p. 1 (1877); vgl. Leipz. Ber. 1895, p. 498.

chungen (156) dieser Art sind durch Berührungstransformationen mit $s = 0$ äquivalent. Hat Σ_2 nur *eine* Lösung, so erledigt sich die Integration jeder Gleichung der Form (163) durch eine Operation 1.

Die Gleichung (156) kann durch Berührungstransformation von einer der Ableitungen r, l oder von beiden befreit werden, je nachdem nur eines der Systeme Σ_1, Σ_2 oder beide je eine Lösung besitzen[259]).

Eine Gleichung der Kategorie e) kann *ein* erstes Integral (162), eine Gleichung der Kategorie f) höchstens ein solches der Form $f = 0$ besitzen.

Bilden für eine Gleichung (153) der Kategorie c) oder d) die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung des Systems Σ (Nr. **44**) zusammen mit der durch Klammeroperation (Nr. **38**) daraus abgeleiteten Relation ein dreigliedriges Involutionssystem, so besitzen sie eine Lösung mit zwei arbiträren Konstanten a, b, die Gleichung (153) also ein erstes Integral der Form[260]):

$$V(x\,y\,z\,p\,q\,a\,b) = 0. \tag{164}$$

Durch Variation der Konstanten folgt hieraus ein allgemeines erstes Integral, mithin die Lösung des *Cauchy*'schen Problems für (153) durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Elimination von a und b aus (164) und $\frac{\partial V}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$ liefert unter Umständen ein singuläres erstes Integral. Nach *A. V. Bäcklund*[261]) erhält man jede Gleichung (153) dieser Art aus einer Gleichung zwischen $x'\,y'\,z'\,p'\,q'$ durch eine *Flächentransformation* (Nr. **10**):

$$x' = \xi,\ y' = \eta, \ldots q' = \varkappa \quad (\xi, \eta, \ldots \varkappa \text{ Funktionen von } x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t). \tag{165}$$

Soll das System Σ involutorisch sein[262]), die Gleichung (153) also ein erstes Integral mit 3 arbiträren Konstanten besitzen, so gehört (153) zur Kategorie c) und die Funktion ψ in (159) genügt einer gewissen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit den Independenten $x\,y\,z\,p\,q\,a$; dann bildet jedes erste Integral der Form (164) zusammen mit den Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = a', \quad \frac{\partial V}{\partial b} = b' \qquad (a, b, a', b' \text{ arbiträre Konstante}) \tag{166}$$

259) *Ampère*, a. a. O. p. 122, 154 ff.

260) *Lagrange*, Berl. Mém. 1774 = Werke 4, p. 89; *Goursat*, Par. C. R. 112, p. 1117.

261) Math. Ann. 11, p. 213—226.

262) *N. J. Sonin*, Mosk. Math. Ges. 1874, übers. von *Engel* in Math. Ann. 49, p. 417, bes. § 7; *H. A. W. Speckman*, Amsterd. Versl. 1892, p. 465; „Goursat B" 1, Art. 93—96.

ein Involutionssystem. Ist $W(x\,y\,z\,a\,b\,a'\,b') = 0$ das Resultat der Elimination von p und q aus den Gleichungen (164), (166), so hat das allgemeine Integral von (153) die Form:

$$(167)\qquad \begin{cases} W[x, y, z, a, \varphi(a), \varphi'(a), \psi(a)] = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial a} + \dfrac{\partial W}{\partial \varphi}\varphi' + \dfrac{\partial W}{\partial \varphi'}\varphi'' + \dfrac{\partial W}{\partial \psi}\psi' = 0.^{263}) \end{cases}$$

46. Die Charakteristiken höherer Ordnung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Durch h-malige Derivation der Gleichung (153) nach x und y erhält man Relationen der Form:

$$(168)_h \qquad M_k^h + Rz_k^{h+2} + Sz_{k+1}^{h+2} + Tz_{k+2}^{h+2} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots h)$$

$$\left(z_k^s = \frac{\partial^s z}{\partial x^k\, \partial y^{s-k}};\ z_0^0 = z;\ R = \frac{\partial F}{\partial r} \text{ etc.}\right).$$

Ein „Streifen ν^{ter} Ordnung der partiellen Differentialgleichung (153)", d. h. ein System von ∞^1 Werten $x\,y\,z\,p\ldots z_\nu^r$, das den Relationen

$$(169)_k \qquad dz_i^k = z_i^{k+1}\cdot dx + z_{i+1}^{k+1}\cdot dy \qquad (i = 0, 1, \ldots k)$$

für $k = 0, 1, \ldots \nu - 1$, sowie den Gleichungen (153) und $(168)_h$ für $h = 1, 2, \ldots \nu - 2$ genügt, bestimmt im allgemeinen einen und nur einen ihn umfassenden Streifen $\nu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung von (153); ist er aber eine *Charakteristik ν^{ter} Ordnung*[264]), d. h. genügt er einem der beiden Relationensysteme:

$$(170)_j \quad j = 1, 2 \quad \begin{cases} \text{a) } dy - A_j dx = 0; \quad \text{b) } dz_i^k - \left(z_i^{k+1} + A_j z_{i+1}^{k+1}\right) dx = 0; \\ \text{c) } Rdz_{h-1}^r + (S - RA_j)\,dz_h^r + M_{h-1}^{r-1}\,dx = 0 \\ \qquad (i = 0, 1, \ldots k;\ k = 0, 1, \ldots \nu - 1;\ h = 1, 2, \ldots \nu), \end{cases}$$

worin A_1, A_2 die Wurzeln der *charakteristischen Gleichung*

$$(171)\qquad RA^2 - SA + T = 0$$

bedeuten, so lassen die Gleichungen $(168_{\nu-1})$ und (169_1) die $\nu + 1^{\text{te}}$ Ableitungen von z unbestimmt. Die Relationen $(170)_j$ c) reduzieren sich vermöge $(168_{\nu-2})$ [im Falle $\nu = 2$ vermöge (153)] auf nur *eine* unabhängige; eines der Differentiale $dz_0^r, dz_1^r, \ldots dz_\nu^r$ bleibt also vermöge $(170)_j$ willkürlich. Jede Charakteristik ν^{ter} Ordnung enthält je eine

263) Wie man W zu bestimmen hat, damit die Relationen (167) das allgemeine Integral einer Gleichung der Form (153) darstellen, s. bei *Goursat*, Acta math. 19, p. 331 ff.

264) *A. V. Bäcklund* in den oben (Fussn. 55) citierten Arbeiten; „Goursat B", Kap. 4; *Lie*, Leipz. Ber. 1895, p. 61; meine Note, Math. Ann. 44, p. 466 (1894) und 47, p. 230; die Charakteristiken 2. Ordnung betrachtet schon *G. Monge*, Par. Mém. 1784, p. 190; vgl. *Du Bois-Reymond*'s „Beiträge", Kap. 5 u. 16.

Charakteristik $\nu - 1^{\text{ter}}$, $\nu - 2^{\text{ter}}, \ldots 2^{\text{ter}}$ Ordnung und ist, falls $A_1 \neq A_2$, auf einfach unendlich vielen[265]) Charakteristiken $\nu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten[266]). Jede nichtsinguläre Integralfläche wird von je ∞^1 Charakteristiken ν^{ter} Ordnung jedes der beiden Systeme (170)$_j$ erzeugt; die zugehörigen beiden Systeme von je ∞^1 Kurven heissen die *charakteristischen Kurven*[267]) der Integralfläche. Längs jeder Charakteristik ν^{ter} Ordnung haben ∞^∞ Integralflächen eine Berührung ν^{ter} Ordnung. Durch 2 beliebige Charakteristiken ν^{ter} Ordnung, die verschiedenen Systemen angehören und ein Flächenelement ν^{ter} Ordnung gemein haben, ist eine und nur eine Integralfläche von (153) festgelegt[268]).

47. Fortsetzung. Jede Charakteristik *erster* Ordnung einer Gleichung (156) der Kategorie a) ist auf einfach unendlich vielen Charakteristiken 2. Ordnung enthalten, und jede der letzteren enthält eine solche der 1. Ordnung; bei der Kategorie d) steht das Charakteristikensystem 1. Ordnung zu dem einen der beiden Charakteristikensysteme 2. Ordnung in derselben Beziehung. Für $A_1 = A_2$, d. h. für eine Gleichung der Kategorie b) oder c) genügt zwar jeder Streifen 2. Ordnung, der eine Charakteristik 1. Ordnung umfasst, den Definitionsgleichungen der Charakteristiken; doch geht durch eine gegebene Charakteristik 1. Ordnung bloss *eine* Integralfläche. Eine Ausnahme bilden nur[269]) die *Ampère*'sche Gleichung mit zwei intermediären Integralen $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$ (Fussn. 255), und die *Sonin*'sche Gleichung (Fussn. 262); für diese giebt es ∞^5 ausgezeichnete Charakteristiken 1. Ordnung, von denen alle nichtsingulären Integralflächen erzeugt werden; die auf nichtsingulären Integralflächen gelegenen Charakteristiken ν^{ter} Ordnung bilden eine ausgezeichnete $\infty^{2\nu+3}$-Schar, und jede ausgezeichnete Charakteristik 1. Ordnung ist auf ∞^2 ausgezeichneten Charakteristiken 2. Ordnung, jede der letzteren auf ∞^2 ausgezeichneten Charakteristiken 3. Ordnung etc. enthalten.

---

265) S. meine Arbeit, Math. Ann. 47, p. 234 f.

266) Diese letzteren werden ohne Integration ermittelt, wenn das betr. Charakteristikensystem eine Invariante $\nu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung (Nr. 51) besitzt, „Goursat B", 2, Art. 165.

267) *Monge* (Applic. p. 471) nennt sie *Charakteristiken*; die Gleichungen 2. Ordnung, auf deren Integralflächen diese Kurven die Krümmungs- oder Asymptotenlinien sind, betrachtet *Lie*, Math. Ann. 5, p. 209—233; s. auch *Du Bois-Reymond*'s „Beiträge" p. 129 f.; *E. Stephan*, Ann. éc. norm. 1866, p. 1.

268) „Goursat B" 1, Art. 82—85; einen Spezialfall des Theorems giebt *Darboux*, „Surfaces" 2, p. 92.

269) S. meine Note, Par. C. R. 124, p. 1215; *Goursat*, ebenda p. 1294 (1897).

48. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Der Charakteristikenbegriff überträgt sich sofort auf eine Gleichung n^{ter} Ordnung[270]):

$$(172) \qquad F(xyzpqr \ldots z_i^k \ldots z_0^n \ldots z_n^n) = 0 \qquad \left(z_i^k = \frac{\partial z^k}{\partial x^i \partial y^{k-i}}\right).$$

Eine *Charakteristik* $n + \nu^{\text{ter}}$ *Ordnung* ist ein Streifen, der die Gleichung (172) und die derivierten Gleichungen bis zur $n + \nu^{\text{ten}}$ Ordnung erfüllt, derart, dass für irgend zwei benachbarte Elemente des Streifens die Gleichungen $(169_{n+\nu})$ und die Derivierten $n + \nu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung von (172) die höchsten Ableitungen unbestimmt lassen. Es giebt entsprechend den n Wurzeln A_i der *charakteristischen Gleichung*:

$$(173) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_0^n} A^n - \frac{\partial F}{\partial z_1^n} A^{n-1} + \cdots + (-1)^n \frac{\partial F}{\partial z_n^n} = 0$$

n im allgemeinen verschiedene Charakteristikensysteme $n + \nu^{\text{ter}}$ Ordnung ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), auf die alle Sätze der Nr. **46** mit Ausnahme des letzten Anwendung finden. Auch die Theorie der Charakteristiken 1. Ordnung einer Gleichung 2. Ordnung hat hier ihr Analogon[271]): Ein Streifen $n-1$. Ordnung heisst eine *Charakteristik* $n-1$. *Ordnung*, wenn für irgend zwei benachbarte Elemente $n-1$. Ordnung desselben die Gleichung (172) nach Substitution der aus (169_{n-1}) folgenden Werte von $z_0^n\, z_1^n \ldots z_{n-1}^n$ unabhängig von z_n^n erfüllt ist. Von den sich so ergebenden Kategorien von Gleichungen n^{ter} Ordnung ist nur *L. Natani*'s[272]) Verallgemeinerung der *Ampère*'schen Gleichung:

$$(174) \qquad A + \Sigma A_i z_i^n + \Sigma\Sigma B_{ik} (z_i^n z_{k+1}^n - z_k^n z_{i+1}^n) = 0$$

$(A, A_i, B_{ik}$ Funktionen von $xyz, z_0^1 \ldots z_0^{n-1}, z_1^{n-1}, \ldots z_{n-1}^{n-1})$

näher untersucht. Die Elimination von $z_0^n \ldots z_n^n$ aus den Gleichungen (169_{n-1}) und (174) führt auf zwei in $dx, dy, dz_0^{n-1} \ldots dz_{n-1}^{n-1}$ homogene nicht lineare Gleichungen, die, falls nicht alle $B_{ik} = 0$, unter gewissen, von den $A, A_i B_{ik}$ zu erfüllenden Bedingungen[273]) durch ein oder höchstens[274]) zwei verschiedene Paare *linearer* homogener Gleichungen in dx, dy, dz_i^{n-1} erfüllt werden, dagegen dann und nur dann, wenn alle $B_{ik} \equiv 0$, in n verschiedene lineare Gleichungspaare[275])

270) Vgl. *Du Bois-Reymond*, „Beiträge" p. 198, *Bäcklund* (Fussn. 55) und meine Arbeiten (Fussn. 264).

271) Vgl. meine Arbeit, Math. Ann. 47, p. 236.

272) „Analysis", p. 380—388.

273) *M. Hamburger*, J. f. Math. 81, p. 272 (1876).

274) *A. V. Bäcklund*, Math. Ann. 13, bes. p. 97.

275) *G. Monge*, Par. Hist. 1784, p. 155 ff.

zerfallen. Jede Charakteristik $n-1$. Ordnung ist im allgemeinen auf ∞^1 Charakteristiken n^{ter} Ordnung enthalten, und umgekehrt umfasst jede Charakteristik n^{ter} Ordnung eine solche $n-1$. Ordnung. Gestatten die linearen Definitionsgleichungen eines Charakteristikensystems $n-1$. Ordnung der Gleichung (174) eine integrable Kombination $df(x, \ldots z_0^{n-1}, \ldots z_{n-1}^{n-1})$, so ist $f = c$ ein erstes Integral von (174); besitzen sie 2 integrable Kombinationen df, df', so existiert ein allgemeines erstes Integral $f = \varphi(f')$. Eine in den z_i^n nicht lineare Gleichung (174) kann demnach höchstens zwei, eine lineare Gleichung n verschiedene allgemeine erste Integrale obiger Form besitzen[276]).

Sind $\varrho_1 \ldots \varrho_n$ die Argumente der im allgemeinen Integral (Nr. 4) einer Gleichung n^{ter} Ordnung der „ersten Klasse" auftretenden arbiträren Funktionen φ_{ik}, so definieren die Relationen

$$\varrho_1 = \text{const.}, \ldots \varrho_n = \text{const.}$$

auf jeder Integralfläche bez. die zu den Wurzeln $A_1 \ldots A_n$ von (173) gehörigen n Systeme charakteristischer Kurven. Enthalten die aus den allgemeinen Integralgleichungen zu berechnenden Ausdrücke für $p, q, r, \ldots z_n^n$ keine höheren Ableitungen der arbiträren Funktionen $\varphi_{1k}(\varrho_1)$ als die Integralgleichungen selbst, so kann man durch geeignete Wahl der φ_{1k} ∞^∞ Integralflächen bestimmen, die eine gegebene Integralfläche V längs der charakteristischen Kurve $\varrho_1 = \varrho_1^0$ n-fach berühren; dagegen giebt es ∞^∞ Integralflächen, die V längs der Kurve $\varrho_1 = \varrho_1^0$ nur $n-1$-fach berühren, wenn die Ausdrücke für $p \ldots z_n^n$ Ableitungen der Funktionen φ_{1k} enthalten, die in den Integralgleichungen nicht vorkommen. Aus der letzteren Annahme folgert *A. M. Ampère*[277]) die Bedingungen für das Auftreten eines Charakteristikensystems $n-1$. Ordnung und die Definitionsgleichungen des letzteren.

49. Beziehungen zwischen zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sollen zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$F_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = c_1; \quad F_2(x\,y \ldots t) = c_2 \tag{175}$$

für beliebige $c_1\,c_2$ nach der *Lie*'schen Bezeichnungsweise[41]) ein unbeschränkt integrables System bilden, d. h. ∞^4 Integralflächen gemein haben, so müssen die sechs durch zweimalige Derivation von (175) folgenden Gleichungen 4. Ordnung sich hinsichtlich der 4ten Ableitungen

276) *Bäcklund*, a. a. O.; *M. Falk*, Ups. Nov. Act. 1872, p. 1.

277) J. éc. pol. 10, cah. 17, p. 590 ff.; vgl. „Goursat B" 1, Art. 98, 99.

auf nur 5 unabhängige reduzieren[278]), was bei gegebenem F_1 eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für F_2 ergiebt[279]). Die Integration von (175) fordert dann die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (Nr. 3 u. **16**, Fussn. 96) und liefert ein vollständiges Integral mit 5 arbiträren Konstanten für $F_1 = c_1$. Wenn eine Gleichung n^{ter} Ordnung $F(x\,y\,\ldots\,z_n^n) = c$ mit $F_1 = c_1$ ∞^{2n+1} Integralflächen gemein haben soll, so muss die Funktion F eine gewisse lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit den Independenten $x\,y\,\ldots\,z_n^n$ erfüllen[279]).

Die Gleichungen (175) bilden für beliebige oder nur für zwei bestimmte Werte $c_1\,c_2$ ein Involutionssystem[280]), je nachdem sich die 4 durch einmalige Derivationen aus ihnen folgenden Gleichungen 3. Ordnung identisch oder nur vermöge (175) auf *drei* unabhängige reduzieren. Stellt die Kurve (175) des Raums $R_3(r\,s\,t)$ (vgl. Nr. 43) ein Involutionssystem dar, so repräsentiert die von ihren Tangenten erzeugte Developpable eine Gleichung 2. Ordnung der Kategorie b) oder c), die einem der am Schlusse von Nr. **47** genannten Typen angehört, und umgekehrt[281]); die Integrale des Involutionssystems (175) sind singuläre Lösungen dieser Gleichung 2. Ordnung.

Die charakteristischen Gleichungen (Nr. **46**) der beiden involutorischen Gleichungen (175) haben eine Wurzel A_1, die Gleichungen (175) selbst eine Schar von ∞^5 Charakteristiken 2. Ordnung des ersten Systems gemein. Oskulieren sich zwei gemeinsame Integralflächen von (175) in einem Punkte, so thun sie dies längs einer der gemeinsamen Charakteristiken. Kann das Involutionssystem (175) auf eine in $r\,s\,t$ lineare Form[282]) gebracht werden, so enthalten je ∞^1 gemeinsame Charakteristiken 2. Ordnung denselben Streifen 1. Ordnung, und es giebt ∞^4 gemeinsame Charakteristiken 1. Ordnung, die sich zu ∞^∞ Flächen zusammenordnen lassen, insbesondere mit den Charakteristiken eines gemeinsamen intermediären Integrals (162) identisch sein können. Durch jeden gemeinsamen Streifen 2. Ordnung der involutorischen Gleichungen (175) geht eine und nur eine, von ∞^1 der

278) *Bäcklund,* Math. Ann. 15, p. 50.

279) *Sonin* (Fussn. 262); *J. König,* Math. Ann. 24, p. 501 (1884).

280) Systeme dieser Art hat gelegentlich *Du Bois-R.* („Beiträge" p. 177), dann *G. Darboux,* Ann. éc. norm. 1870, p. 163 = Par. C. R. 70, p. 675, 746 betrachtet; vgl. *Sonin, König,* a. a. O; *Bäcklund* (Fussn. 274); *L. Bianchi,* Linc. Rend. (4) 2, p. 218, 237, 307; *J. Beudon,* Ann. éc. norm. 1896, Suppl. Art. 14; meine Note Münch. Ber. 25, p. 101 (1895).

281) *Goursat,* Par. C. R. 122, p. 1258 (1896); J. éc. pol. (2), cah. 3, p. 75 (1897).

282) S. *Bäcklund,* Math. Ann. 13, p. 73 f. und die ausführliche Darstellnng bei *Goursat,* J. éc. pol. a. a. O.

gemeinsamen Charakteristiken 2. Ordnung erzeugte Integralfläche, die sonach durch eine der *Cauchy*'schen ganz analoge Methode[283]) gefunden wird (Nr. 34).

Um das Involutionssystem (175) zu integrieren, kann man auch mit *Lie*[284]) alle Gleichungen $V(x\,y\,z\,p\,q) = a$ aufsuchen, die mit dem System (175) je ∞^2 Integralflächen gemein haben, was auf eine *semilineare* Gleichung 1. Ordnung (Nr. 34, Fussn. 208) für die Unbekannte V führt. Oder man ermittelt nach *N. Sonin*[285]) durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit den Independenten $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ eine Gleichung 2. Ordnung der Form $F_3(x \ldots t) = c_3$, die mit dem System (175) ein Integral mit 3 Konstanten $c_4\,c_5\,c_6$ gemein hat, und gewinnt dadurch ein vollständiges Integral der Gleichung $F_1 = c_1$, das von den arbiträren Konstanten $c_2 \ldots c_6$ abhängt, und dessen Flächen sich zu Scharen von je einfach unendlich vielen derart zusammenordnen, dass sie ihre Enveloppe nach je einer Kurve oskulieren[286]).

Für ein beliebiges vollständiges Integral einer Gleichung 2. Ordnung existiert kein entsprechender Prozess, und die Variation der Konstanten führt hier im allgemeinen zu keiner Vereinfachung des Integrationsgeschäfts[287]); das gleiche gilt a fortiori für höhere Differentialprobleme[288]). Auch die Theorie der singulären Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung (Nr. 33) hat bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung im allgemeinen kein Analogon[289]).

50. Darboux'sche Systeme; Involutionssysteme. Hat man eine Gleichung 2. Ordnung und eine Gleichung n^{ter} Ordnung[290]):

283) Nach *W. de Tannenberg* (Par. C. R. 120, p. 674) findet diese Thatsache auch darin Ausdruck, dass das mit dem Involutionssystem (175) äquivalente System *Pfaff*'scher Gleichungen (Nr. 8) eine eingliedrige Gruppe gestattet (Nr. 60).

284) Leipz. Ber. 1895, p. 70 ff.

285) A. a. O. (Fussn. 262) § 20.

286) Für die Übertragung von *Monge*'s Enveloppentheorie auf diesen Fall s. meine Arbeit, Math. Ann. 47, p. 254; *Beudon*, a. a. O. (Fussn. 280) Art. 15 und Par. C. R. 128, p. 1215 (1899).

287) *Lagrange*, Werke 4, p. 101; „Goursat B" 1, Art. 21.

288) Die von *V. Sersawy* (Wien. Denkschr. 53, 1887) und *L. Königsberger* (J. f. Math. 109, p. 313—319, 321—328) entwickelten und als allgemein hingestellten Methoden zur Variation der Konstanten gelingen nur in speziellen Fällen, die sich einfacher mittels der Charakteristikentheorie erledigen lassen.

289) Vgl. meine Arbeit, Math. Ann. 46, p. 1.

290) *Darboux* (Fussn. 280); *Bäcklund*, Math. Ann. 13, p. 76; 15, p. 45 f.;

(176) $F_1(x \ldots t) = c_1;\ F_2(x\,y\,z\,p \ldots z_0^n z_1^n \ldots z_n^n) = c_2 \quad (n \geqq 2)$

und reduzieren sich die $n+2$ aus (176) durch Derivation folgenden Gleichungen $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung auf $n+1$ unabhängige, dann und nur dann haben die beiden charakteristischen Gleichungen von $F_1 = c_1$ und $F_2 = c_2$ eine Wurzel A_1, die Gleichungen (176) selbst ∞^{2n+1} Charakteristiken n^{ter} Ordnung des ersten Systems gemein; durch jeden gemeinsamen Streifen n^{ter} Ordnung der Gleichungen (176) geht dann eine und nur eine von den gemeinsamen Charakteristiken erzeugte Integralfläche. Die Gleichung $F_2 = c_2$ ist also dann ein intermediäres Integral (Nr. 6) von $F_1 = c_1$, d. h. sie hat mit dieser Gleichung ∞^∞ Integralflächen gemein. Gilt dies für beliebiges c_2, dann und nur dann ist dF_2 eine integrable Kombination der totalen Differentialgleichungen, die das zur Wurzel A_2 gehörige Charakteristikensystem n^{ter} Ordnung der Gleichung $F_1 = c_1$ definieren (Nr. 46). Bilden die Gleichungen (175) für beliebige $c_1\,c_2$ ein Involutionssystem, so steht F_1 zu $F_2 = c_2$ in der analogen Beziehung.

Damit ein System von $k\,(\leqq n+1)$ partiellen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung ein Involutionssystem[291]) bilden, sodass durch jeden gemeinsamen Streifen n^{ter} Ordnung eine Integralfläche des Systems hindurchgeht, ist notwendig und hinreichend, dass die $2k$ Derivierten $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung nur $k+1$ unabhängige Relationen darstellen. Irgend k verschiedene erste Integrale einer *Natani*'schen Gleichung $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung (Nr. 48), die bez. k verschiedenen Charakteristikensystemen n^{ter} Ordnung der letzteren angehören, bilden ein Involutionssystem[292]). Für $k = n+1$ hängt das allgemeine Integral des Involutionssystems von einer endlichen Konstantenzahl, für $k \leqq n$ von $n-k+1$ arbiträren Funktionen ab; im letzteren Fall besitzt das Involutionssystem $n-k+1$ Systeme von Charakteristiken n^{ter} und höherer Ordnung, die zu den Charakteristikensystemen einer partiellen Differentialgleichung $n-k+1^{\text{ter}}$ Ordnung ein vollkommenes Analogon bilden.

Lie[293]) nennt ein System partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, die ein Integral mit r arbiträren Funktionen gemein haben, ein *„Darboux'sches System r^{ter} Klasse"*. Die Bedingungen für ein solches erhält man, indem man ausdrückt, dass die derivierten

Sonin a. a. O. (Fussn. 262) § 22 ff.; ein Beispiel für $n = 3$ giebt *J. Beudon*, Par. C. R. 120, p. 902.

291) S. meine Arbeit, Münch. Ber. 25, p. 423 (1895).

292) *Bäcklund*, Math. Ann. 11 u. 13, a. a. O.

293) Leipz. Ber. 1895, p. 71.

Gleichungen einer gewissen Ordnung genau r der höchsten Ableitungen von z willkürlich lassen; dies gilt dann von selbst für die höheren Derivierten. Im Falle $r = 1$ wird das allgemeine Integral stets nach einer der *Cauchy*'schen ähnlichen Methode durch Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden.

51. Die Darboux-Lévy'sche Integrationstheorie und ihre Verallgemeinerungen. Ist $du(x, y, z, p, \ldots z_i^k \ldots z_n^a)$ eine integrable Kombination der Definitionsgleichungen des einen der beiden Charakteristikensysteme n^{ter} Ordnung der partiellen Differentialgleichung (153), so heisst u nach *Goursat*[294]) eine „*Invariante* n^{ter} *Ordnung*" von (153). Sind die Wurzeln A_1, A_2 verschieden, so gelten für die zu derselben Wurzel A_1 gehörigen Invarianten folgende Sätze[294]).

Eine Invariante n^{ter} Ordnung muss einem System $\Sigma^{(n)}$ von zwei homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen, in denen $x\,y\,z\,p\,q$ und diejenigen 2ten, $3^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Ableitungen von z, die vermöge (153) und ihrer Derivierten willkürlich bleiben, als unabhängige Variable figurieren; $\Sigma^{(n)}$ wird auch von den etwaigen Invarianten 1ter, $2^{\text{ter}} \ldots n-1^{\text{ter}}$ Ordnung befriedigt. Für $n > 2$ giebt es höchstens *eine* zur Wurzel A_1 gehörige Invariante n^{ter} Ordnung; sie kann auf eine in den n^{ten} Ableitungen lineare Form gebracht werden. Ersteres gilt auch für $n = 2$ im Falle der *Ampère*'schen Gleichung, oder wenn eine Invariante 1. Ordnung vorhanden ist. Die Gesamtzahl der zu A_1 gehörigen Invarianten n^{ter} und niederer Ordnung ist höchstens $n + 1$. Diese Zahl wird dann und nur dann erreicht, wenn die Gleichung (153) ein erstes Integral mit 2 arbiträren Konstanten besitzt; dann ist nämlich die Zahl der Invarianten erster und zweiter Ordnung zusammen 3, und es giebt je eine Invariante $3^{\text{ter}}, \ldots n^{\text{ter}}$ Ordnung. Gehören zu A_1 zwei verschiedene Invarianten u, v,[295]) so erhält man deren eine unbegrenzte Reihe:

$$u, v;\ v_1 = \frac{dv}{du};\quad v_2 = \frac{dv_1}{du} \cdots, \tag{177}$$

indem man darin die Differentiale dz, dz_i^k durch ihre Werte aus $(170)_1$ b) ersetzt. Umgekehrt, giebt es mehr als *eine* zu A_1 gehörige Invariante, so kann man zwei derselben, u, v so wählen, dass jede zu

294) „Goursat B" 2, Kap. 7; Par. C. R. 123, p. 680 (1896); vgl. auch *Sonin* a. a. O. (Fussn. 262).

295) Gehören die Invarianten u, v zu derselben Wurzel A_1, so haben die Gleichungen $u = c$, $v = c'$ ∞^∞ gemeinsame Integralflächen, wenn sie *eine* solche besitzen, „Goursat B" Art. 144.

A_1 gehörige Invariante in der Form $\varphi(u, v, v_1, v_2, \ldots v_k)$ dargestellt werden kann.

Ist (153) von r und t frei, so gehören zu A_1, A_2 bezw. die Invarianten x und y, und jede andere Invariante hat die Form:

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x} \cdots \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right) \text{ bezw. } \psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y} \cdots \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)^{296}).$$

Sind für jedes der beiden Charakteristikensysteme von (153) zwei Invarianten u, v bezw. u', v' vorhanden, d. h. besitzt die Gleichung (153) zwei verschiedene allgemeine intermediäre Integrale (Nr. 6):

$$u = \varphi(v); \quad u' = \psi(v'), \tag{178}$$

so bilden diese für jede Form der arbiträren Funktionen φ und ψ mit (153) zusammen ein im *Lie*'schen Sinne (Fussn. 41) unbeschränkt integrables System, und die Integration von (153) kommt auf diejenige gewöhnlicher Differentialgleichungen hinaus (*Darboux's Methode*[280]). Dies gilt aber nach *M. Lévy*[297]) auch, wenn nur *ein* intermediäres Integral $u = \varphi(v)$ existiert; ist nämlich n seine Ordnung, so kann man φ auf eine und nur eine Art so bestimmen, dass die partielle Differentialgleichung $u = \varphi(v)$ durch einen gegebenen Streifen n^{ter} Ordnung der Gleichung (153) erfüllt wird, also die durch ihn festgelegte Integralfläche V der Gleichung (153) mit dieser gemein hat[298]), worauf V selbst durch Integration eines von der Wahl des Ausgangsstreifens abhängigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden wird.

Besitzt eine Gleichung 2. Ordnung mit zwei verschiedenen Charakteristikensystemen ein allgemeines Integral der Form[299]):

$x = V_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_1'(\alpha_1), \ldots \varphi_1^{(p)}(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \varphi_2'(\alpha_2) \ldots \varphi_2^{(q)}(\alpha_2), F_1, \ldots F_l)$,
$y = V_2(\alpha_1 \ldots F_l)$; $z = V_3(\alpha_1 \ldots F_l)$,

worin die α_1 α_2 unabhängige Parameter, die φ_i arbiträre Funktionen, die φ_i' deren Ableitungen bedeuten, und die F_i als Integrale eines für jede Form von φ_1, φ_2 unbeschränkt integrabeln Systems totaler Differentialgleichungen

$$dF_i = \sum_{1,2}^{k} \Phi_{ik}(\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1, \varphi_1' \ldots \varphi_2, \varphi_2' \ldots F_1 \ldots F_l)\, d\alpha_k \quad (i = 1, 2, \ldots l)$$

definiert sind, so existieren für jede Wurzel A_1, A_2 je zwei unab-

296) „Goursat B“ Art. 145.

297) Par. C. R. 75, p. 1094 (1872); vgl. *Sonin*, *König* a. a. O.; *Speckman* (Fussn. 262); *V. Sersawy*, Wien. Denkschr. 49², p. 7—33 (1885).

298) *Lie*, Leipz. Ber. 1895, p. 65.

299) „Goursat B“ 2, Art. 184.

hängige Invarianten[300]), und umgekehrt; hierher gehören alle Gleichungen (153) von *Ampère*'s erster Klasse (Nr. 4). Geht nur α_2, nicht aber α_1 auf die angegebene Art in V_i, Φ_{ik} ein, so besitzt nur das erste Charakteristikensystem zwei Invarianten, und umgekehrt.

Die Forderung, dass eine partielle Differentialgleichung (153) durch gewöhnliche Differentialgleichungen integrierbar sei, setzt sich unter Zuhilfenahme gewisser Axiome in die andere um, dass jeder charakteristische Streifen 2. Ordnung des einen der beiden Systeme durch Verschiebung längs beliebiger ihn enthaltender Integralflächen nur eine endlichgliedrige Mannigfaltigkeit von Lagen anzunehmen im Stande sei[301]). Diese geometrische Eigenschaft deckt sich vollkommen mit der Existenz zweier zu dem andern Charakteristikensysteme gehöriger Invarianten[301]).

Damit für eine Gleichung 2. Ordnung mit koincidierenden Wurzeln A_1, A_2 eine Invariante n^{ter} Ordnung existiere, muss das Gleichungssystem $\Sigma^{(n)}$ (s. oben) nach *Goursat* ein vollständiges System sein[294]); die Bedingungen hierfür sind von der Zahl u unabhängig und drücken aus, dass die Gleichung (153) einer der am Schluss von Nr. 47 genannten Kategorien angehört; es sind dies die einzigen, zu *Ampère*'s erster Klasse gehörenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit nur *einem* Charakteristikensystem.

Ist die Funktion u der Variabeln $x, y, z, p, \ldots z_i^k \ldots z_v^v$ eine zu der Wurzel A_i von (173) gehörige „Invariante" der partiellen Differentialgleichung (172), d. h. du eine integrable Kombination der Definitionsgleichungen des i^{ten} Charakteristikensystems ν^{ter} Ordnung (Nr. 48), so genügt u einem System linearer homogener partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, worin diejenigen Grössen $x \ldots z_r^v$, die vermöge (172) und der derivierten Gleichungen willkürlich bleiben, die Independenten darstellen. Sind $u_1 \ldots u_k$ bez. zu $A_1 \ldots A_k$ gehörige Invarianten beliebiger Ordnung, so bilden die Gleichungen:

$$F(x_1 \ldots z_n^n) = 0, \quad u_1 = c_1 \ldots u_k = c_k \qquad (c_i \text{ arb. Konstante})$$

für $k < n$ ein *Darboux*'sches System (Nr. 50) der Klasse $n - k$, für $k = n$ ein unbeschränkt integrables System mit einer endlichgliedrigen Schar von Integralflächen. Gehören zu jeder der Wurzeln $A_1 \ldots A_k$

---

300) *De Boer* (Harl. Arch.. 27, p. 355) bestimmt alle nach der *Darboux*schen Methode integrierbaren Gleichungen der Form $f(r, s, t) = 0$; *Goursat* (Par. C. R. 127, p. 854 [1898], Toul. Ann. (2) 1, p. 31 [1899]) alle nach *Darboux* integrierbaren Gleichungen der Form $s = f(x\, y\, z\, p\, q)$.

301) S. meine Arbeit, Münch. Ber. 26, p. 425 (1896), „Goursat B" 2, Art. 185

zwei verschiedene Invarianten u_i, v_i, d. h. giebt es k verschiedene allgemeine intermediäre Integrale:

(179) $u_1 = \varphi_1(v_1), u_2 = \varphi_2(v_2), \ldots u_k = \varphi_k(v_k)$ ($\varphi_1 \ldots \varphi_k$ arb. Funktionen),

so kommt die Lösung des *Cauchy*'schen Problems für die Gleichung (172) auf die Integration $k+1$-gliedriger *Darboux*'scher Systeme der Form (172), (179), also für $k = n$ oder $k = n-1$ auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen hinaus[302]).

Diese Methode lässt sich auf Involutionssysteme[302]) partieller Differentialgleichungen, überhaupt auf jedes *Darboux*'sche System übertragen.

52. Differentialsysteme erster Ordnung mit mehreren Unbekannten. Bilden ν ($< 2n$, aber $\geq n$) hinsichtlich der Grössen p, q unabhängige Gleichungen

(180) $F_i(x, y, z_1 \ldots z_n, p_1, q_1, \ldots p_n, q_n) = 0 \quad \left(i = 1, \cdots \nu;\ p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x};\ q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y}\right)$

ein Involutionssystem[303]), und verschwinden vermöge (180) in der „*charakteristischen Matrix*“:

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial q_k} - \lambda \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right\| \qquad (i = 1, \ldots \nu;\ k = 1 \ldots n)$$

nicht alle n-reihigen Determinanten identisch[303a]), so haben die letzteren genau $2n - \nu$ Linearfaktoren $\lambda - \lambda_i$ gemein[303b]); dementsprechend giebt es $2n - \nu$ Systeme charakteristischer Streifen[304]), die durch ebensoviele Systeme Σ_i *Pfaff*'scher Gleichungen in x, y, z_i, p_k, q_k definiert sind. Man erhält diese Systeme, wenn man ausdrückt, dass die $2n$ Gleichungen:

$$dp_k = r_k\,dx + s_k\,dy,\ dq_k = s_k\,dx + t_k\,dy \qquad \left(r_k = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^2} \text{ etc.}\right)$$

zusammen mit den 2ν derivierten Gleichungen von (180) die Grössen $r_k\ s_k\ t_k$ unbestimmt lassen. In ähnlicher Weise kann man

---

302) S. meine Arbeit, Münch. Ber. 25, p. 423; vgl. die von *M. Falk* (Fussn. 276), *M. Hamburger*, J. f. Math. 93, p. 201 (1882) und *V. Sersawy*, Wien. Denkschr. 49^2, p. 33—60 behandelten Spezialfälle dieser Theorie.

303) S. meine Arbeit, J. f. Math. 118, p. 123 (1897); für den Spezialfall $p = 0$ vgl. *M. Hamburger*, J. f. Math. 93, p. 188 (1882).

303a) Der Fall, dass die Zahl ν und der Rang der char. Matrix beliebig sind, lässt sich auf den obigen zurückführen, s meine Arbeit Münch. Ber. 29, p. 231 (1899).

303b) Über den Fall vielfacher Wurzeln und die Beziehungen zur Elementarteilertheorie s. meine vorhin citierte Arbeit; vgl. auch *Hamburger* (Fussn. 303 u. 305).

304) Für $\nu = 2$, $n = 2$ vgl. auch *Bäcklund*, Math. Ann. 19, p. 389 ff.

charakteristische Streifen 2ter und höherer Ordnung, sowie, falls die Gleichungen (180) in den p_k, q_k linear[305]) sind, $2u - v$ Systeme *charakteristischer Kurven* des Raums $R_{n+2}(x\,y\,z_1 \ldots z_n)$ durch Systeme totaler Differentialgleichungen definieren. Die etwaigen integrabeln Kombinationen der letzteren führen zu einem der *Darboux-Lévy*'schen Methode ganz ähnlichen Integrationsverfahren. Im Falle $v = 2u - 1$ geht durch jedes gemeinsame Flächenelement $x\,y\,z_i\,p_k\,q_k$ der Gleichungen (180) ein und nur ein charakteristischer Streifen 1. Ordnung, und die Integration von (180) vollzieht sich wie bei der *Cauchy*'schen Methode (Nr. 34) mit Hülfe eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen[306]).

Durch Derivationen und Eliminationen aus zwei Gleichungen der Form

$$F_i(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

erhält man nach *A. V. Bäcklund*[307]) für die Unbekannten z_1 und z_2 im allgemeinen bezw. zwei Systeme J_1, J_2 von je 2 involutorischen, in den höchsten Ableitungen linearen partiellen Differentialgleichungen 3. Ordnung; zwischen den Flächenelementen 2. Ordnung der beiden Räume $(z_1\,x\,y)$ und $(z_2\,x\,y)$ besteht dann eine umkehrbar eindeutige Beziehung derart, dass jeder Integralfläche von J_1 eine solche von J_2 entspricht, und umgekehrt. Doch können sich die Systeme J_1 und J_2 auch auf je eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung reduzieren; jedem Integral von J_1 entsprechen dann höchstens ∞^1 Integrale von J_2, und umgekehrt[308]). Analoges gilt für jede durch 4 Relationen vermittelte Beziehung zwischen den Flächenelementen $x\,y\,z\,p\,q$ und $x'\,y'\,z'\,p'\,q'$ zweier Räume[309]).

305) Den Fall linearer Systeme mit n Gleichungen und n Unbekannten behandelt *M. Hamburger*, J. f. Math. 81, p. 243 (1876); Systeme charakteristischer Kurven existieren auch für gewisse allgemeinere Differentialsysteme, die in den Grössen p_i, q_i, $p_i\,q_k - p_k\,q_i$ linear sind, und ein Analogon zu den *Ampère*'schen und *Natani*'schen Gleichungen (Nr. 43 und 48) bilden; ein System dieser Art (und nur ein solches) kann ein allgemeines Integral der Form

$$\varphi_1(u_1\,v_1) = 0, \quad \varphi_2(u_2\,v_2) = 0, \ \ldots \ \varphi_n(u_n\,v_n) = 0$$

besitzen, worin die φ_i arbiträre Funktionen, die $u_i\,v_i$ Funktionen von $x\,y\,z_1 \ldots z_n$ bedeuten; vgl. *Hamburger*, a. a. O. Das System von zwei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 2 Unbekannten untersucht *L. Königsberger*, Math. Ann. 41, p. 260.

306) S. auch *Lie*, Christ. Forh. 1880, p. 1; Leipz. Ber. 1895, p. 85.

307) Fussn. 52; eine Verallgemeinerung s. bei „Goursat B" 2, p. 292.

308) Über diese Beziehung zwischen 2 Gleichungen 2. Ordnung vgl. „Goursat B" 2, Art. 194 ff.

309) *Bäcklund*, a. a. O.; vgl. *G. Darboux*, „Surfaces" 3, p. 438; „Goursat B" Art. 202 ff.

53. Die Methode von Laplace und ihre Verallgemeinerungen. Führt man in eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

(181) $Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Zz=0$ ($R \ldots Z$ Funktionen von $x\,y$)

die Integrale der Differentialgleichungen $dy = \lambda_i\, dx$ ($i = 1, 2$, vgl. Nr. **46**) als Independente ein, so erhält sie die Form:

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Zwei Gleichungen der Form (A) heissen äquivalent[310]), wenn die eine durch Substitution eines Ausdrucks $z' = \varrho(x\,y)\cdot z$ in die andere übergeführt werden kann; dazu ist notwendig und hinreichend, dass die *„Invarianten“*[310])

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c; \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

für beide Gleichungen bez. dieselben sind. Die zu (A) adjungierte[311]) Gleichung

$$(A') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) z = 0$$

hat die Invarianten k, h; für $h = k$ ist (A) mit (A′) äquivalent und kann die Form $s = h\,z$ erhalten.

Die Anwendung der *Darboux-Lévy*'schen Theorie auf (A) führt zu der schon von *P. S. Laplace*[312]) gegebenen *„Cascadenmethode“*. Mittels der Formeln

$$(182) \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az; \qquad (183) \quad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz$$

erhält man nach Elimination von z aus (A) und (182), bezw. aus (A) und (183) für z_1 bezw. z_{-1} je eine Gleichung (A_1), (A_{-1}) derselben Form[313]) wie (A), deren Invarianten h_1, k_1 bezw. h_{-1}, k_{-1} in einfacher Weise von h, k abhängen. Die Wiederholung des Verfahrens liefert im allgemeinen eine nach zwei Seiten unbegrenzte Serie von Gleichungen:

$$(184) \qquad \ldots (A_{-2}), (A_{-1}), (A), (A_1), (A_2) \ldots$$

bezw. mit den Invarianten $\ldots h_{-2}, k_{-2}; h_{-1}, k_{-1}; h, k; h_1, k_1; \ldots$; die Anwendung derselben Methode auf irgend eine Gleichung (184) oder

---

310) *Darboux*, „Surfaces“ 2, p. 23 ff.

311) *Darboux*, a. a. O. p. 71 ff.

312) Par. Hist. 1773, p. 341; s. z. B. *Darboux* a. a. O. p. 23; „Goursat B“ 2, Kap. 5.

313) „Goursat B“ 2, Art. 187—193 betrachtet die allgemeinste Gleichung (153), aus der sich durch die Substitution $z_1 = q$ wieder eine Gleichung 2. Ordnung für z_1 ergiebt; die *Laplace*'sche Methode erscheint als Spezialfall dieser Theorie.

eine mit ihr äquivalente Gleichung giebt eine äquivalente Serie. Aus (A') folgt ebenso eine Serie $\ldots (A'_{-1})(A')(A'_1)\ldots$, wobei (A'_{-i}) zu (A_i) adjungiert ist. Aus dem allgemeinen Integral irgend einer Gleichung (184) folgt dasjenige aller übrigen durch Quadraturen und Differentiationen. Ist $h_\nu = 0$, dann und nur dann bricht die Serie (184) nach rechts hin mit (A_ν), also die zu (A') gehörige Serie nach links mit $(A'_{-\nu})$ ab, und (A) besitzt ein allgemeines intermediäres Integral[314]):

$$a_0(x\,y)\cdot z + \sum_1^{\nu+1} a_i(x\,y)\,\frac{\partial^i z}{\partial y^i} = \varphi(y) \qquad (\varphi \text{ arbiträr}),$$

sowie ein durch Quadraturen erhältliches allgemeines Integral:

$$z = \xi_0 \cdot X + \xi_1 \cdot X' + \cdots + \xi_\nu X^{(\nu)} + B,$$

wo X eine arbiträre Funktion von x und die ξ_i bestimmte Funktionen von x, y bedeuten, während in B eine arbiträre Funktion Y von y im allgemeinen unter partielle Quadraturen eingeht. Umgekehrt, hat das allgemeine Integral von (A) diese Form, so bricht die Serie (184) spätestens mit (A_ν) ab; dazu ist notwendig und hinreichend[315]), dass ein System von $\nu + 1$ partikulären Integralen von (A) existiere, das einer linearen homogenen Identität genügt, deren Koeffizienten, ohne sämtlich konstant zu sein, nur von x abhängen.

Analoges gilt, wenn im Vorigen die auf x bezüglichen Buchstaben mit den auf y bezüglichen vertauscht werden.

Verschwinden $h_\nu, k_{-\mu}$ (wobei im Falle $h = k$ auch $\mu = \nu$), dann und nur dann bricht die Serie (184) nach rechts mit (A_ν), nach links mit $(A_{-\mu})$ ab, und (A) hat ein allgemeines Integral:

$$z = a_0 X + a_1 X' + \cdots + a_\nu X^{(\nu)} + b_0 Y + b_1 Y' + \cdots + b_\mu Y^{(\mu)},$$

gehört also, ebenso wie (A'), zu *Ampère*'s erster Klasse (Nr. 4).

Nach *Moutard*[316]) und *Darboux*[317]) kann man für jedes Zahlenpaar μ, ν die allgemeinste Gleichung (A) dieser Art, sowie ihr allgemeines Integral und die zugehörige *Laplace*'sche Serie explicite darstellen, für $h = k$ insbesondere aus dem einfachsten Typus $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$ durch ein Rekursionsverfahren[318]) ableiten.

---

314) „Goursat B" 2, Art. 168.

315) „Goursat B" Art. 109–112; Par. C. R. 122, p. 169 (1896).

316) In einer verloren gegangenen Arbeit, s. Par. C. R. 70, p. 834; *J. Bertrand* ebenda, p. 1068 (1870).

317) „Surfaces" 2, p. 46 und 122; vgl. *O. Niccoletti,* Linc. Rend. (5) 6. p. 307 (1897).

318) Ebenda p. 157; *Moutard,* J. éc. pol. 28, cah. 45, p. 1 (1878).

Lässt sich die Gleichung (153) nach der *Darboux-Lévy*'schen Methode integrieren, so erhält man das allgemeine Integral der Hülfsgleichung (Nr. 5, Fussn. 33) mittels der *Laplace*'schen Methode[319]).

Die *Laplace*'sche Methode überträgt sich auf Gleichungen (A), deren rechte Seite in einer beliebigen Funktion von x, y besteht, sowie nach *A. M. Legendre*[320]) direkt auf Gleichungen der Form (181).[321])

Ist ξ ein partikuläres, z das allgemeine Integral von (A), so genügt die Funktion $\xi \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \xi}{\partial y}$ wieder einer Gleichung 2. Ordnung der Form (A), auf deren Integration die von (A) zurückkommt[322]). Wiederholung dieser und der *Laplace*'schen Transformation führt auf den allgemeinsten Ausdruck:

$$Az + \sum_1^m{}_i B_i \frac{\partial^i z}{\partial x^i} + \sum_1^n{}_i C_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \qquad (A, B_i, C_i \text{ Funktionen von } x\, y),$$

der vermöge (A) das allgemeine Integral einer linearen Gleichung 2. Ordnung derselben Form darstellt[323]). Diese und andere Methoden[324]), um aus einer Gleichung (A) eine neue derselben Form abzuleiten, auf deren Integration die von (A) zurückkommt, ergeben sich als Spezialfälle der von *Bäcklund* (Nr. 52, Fussn. 308 und 52) studierten Beziehung zwischen zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, die ein allgemeines Integral der Form:

$$z = f(x, y,\ X, X', \ldots X^{(k)},\ Y, Y', \ldots Y^{(l)})$$

besitzt, kann, von trivialen Fällen abgesehen, durch Einführung neuer Variabeln auf die Form (A) oder auf die von *J. Liouville* integrierte Gleichung $s = ae^{bz}$ (a, b konstant)[325]), oder endlich auf die Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[M(x\,y)\,e^z] - \frac{\partial}{\partial y}[N(x\,y)\,e^z]$$

319) „Goursat B“ 2, Note 1.

320) Par. Hist. 1787, p. 319; vgl. *Imschenetzky*, Arch. Math. 54, Art. 67—74.

321) Nach *Darboux* (Surfaces 4, p. 267) auch auf gewisse Involutionssysteme linearer Gleichungen 2. Ordnung mit mehreren Independenten.

322) *L. Lévy*, J. éc. pol. 56, p. 63 (1886); eine geometrische Interpretation s. bei *Darboux*, Surfaces 2, p. 219; die *Laplace*'sche Transf. ist in dieser als Grenzfall enthalten, *Darboux* a. a. O. p. 177.

323) *Darboux*, Surfaces 2, p. 164 ff.

324) A. a. O. p. 179 ff.; „Goursat B“ Art. 194 ff.; *O. Niccoletti*, Pisa Ann. 1897; Tor. Atti 32 (1897).

325) J. de math. (1) 18, p. 71 (1853); sie gestattet eine unendliche Gruppe von Punkttransformationen, und ist die einzige nach *Darboux-Lévy* integrierbare Gleichung der Form $s = f(z)$; *Lie*, Norw. Arch. 6, p. 112 (1881).

gebracht werden[326]), wo die Koeffizienten M, N gewissen Bedingungen unterliegen, und deren Integration auf die einer *Laplace*'schen Gleichung (A) zurückkommt[327]).

54. Verwertung des Gruppenbegriffs für Differentialgleichungen. Alle Transformationen der unendlichen Gruppe von Punkttransformationen:

$$(185) \qquad z' = \varrho(x\,y)\cdot z; \quad x' = \xi(x\,y); \quad y' = \eta(x\,y)$$

und nur diese führen *jede* lineare partielle Differentialgleichung (181) wieder in eine solche über[328]). Die Frage, ob zwei Gleichungen der Form (181) durch eine Transformation (185) in einander transformiert werden können, erledigt sich nach *Cotton*[329]) und *Burgatti*[330]) durch die Betrachtung zweier den *Darboux*'schen h, k analoger Invarianten. In allen Fällen entscheidet sich die Frage, ob zwei Differentialprobleme durch eine Transformation einer gegebenen Gruppe in einander überführbar sind oder nicht, durch die Vergleichung einer endlichen Zahl der Differentialinvarianten[331]), die sie der Gruppe gegenüber besitzen. Hierauf gründet sich z. B. eine Klassifikation[332]) aller Differentialsysteme in drei Variabeln $x\,y\,z$ gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen oder aller Berührungstransformationen des R_3.

Nicht jedes System partieller Differentialgleichungen mit der Unbekannten z und den Independenten $x_1\,x_2\ldots x_m$ gestattet eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $R_{m+1}(z, x_1\ldots x_m)$[333]); die Existenz einer solchen Transformation ist im allgemeinen an das Bestehen gewisser Relationen[334]) zwischen den zugehörigen Differentialinvarianten geknüpft. Jede bekannte infinitesimale Punkt- oder Berührungstransformation des R_{m+1}, die ein Differentialsystem in sich überführt, liefert eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die mit dem System die bei der infinitesimalen Transformation in-

326) *Moutard* (Fussn. 316); *H. W. L. Tanner,* Mess. Math. 5, p. 53 (1876) *É. Cosserat* in *Darboux* Surfaces 4, p. 405.

327) Vgl. „Goursat B" 2, p. 250.

328) Analoges gilt für lineare partielle Differentialgleichungen jeder Ordnung und Independentenzahl; *P. Stäckel,* J. f. Math. 114, p. 116 (1895); vgl. *Lie,* Leipz. Ber. 1894, p. 322.

329) Par. C. R. 123, p. 936 (1896).

330) Linc. Rend. (5) 5^2, p. 433 (1896).

331) *Lie,* Math. Ann. 24, p. 537 (1884); *A. Tresse,* Acta math. 18, p. 1 (1894).

332) *Lie,* a. a. O. p. 572.

333) *A. V. Bäcklund,* Math. Ann. 15, p. 63.

334) *Lie,* Math. Ann. 24, p. 578.

varianten Integralgebilde gemein hat[335]); die Bestimmung der letzteren kommt auf die Integration eines Differentialsystems mit weniger als m Independenten hinaus. Ähnliches gilt für ein Differentialsystem mit mehreren bekannten infinitesimalen Transformationen, die vertauschbar sind, oder überhaupt eine Gruppe bilden[336]). Analoge Theorien hat *Lie*[335]) für Differentialsysteme 1. Ordnung mit mehreren Unbekannten entwickelt. Für Differentialprobleme mit bekannten infinitesimalen Transformationen in sich lässt sich darnach in vielen Fällen die Existenz gewisser Arten von partikulären Integralen a priori[335]) feststellen.

Gestattet eine partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit drei Variabeln $x\ y\ z$ eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen des $R_3(x\ y\ z)$,[337]) so kann man mittels der Differentialinvarianten der Gruppe andere Differentialsysteme aufstellen, die mit der gegebenen Gleichung *Darboux*'sche Systeme bilden, insbesondere im Falle $n = 2$[338]) die Gleichung 2. Ordnung nach der *Darboux-Lévy*'schen Methode integrieren[339]).

Weitergehende Integrationstheorien[340]) ergeben sich für Differentialsysteme mit unendlicher Gruppe, wenn man ein volles System von Differentialinvarianten der letzteren als neue Variable einführt. So lässt sich die Integration eines *Darboux*'schen Systems k^{ter} Klasse (Nr. **50**), das eine von l arbiträren Funktionen abhängende unendliche Gruppe von Berührungstransformationen gestattet, unter gewissen Voraussetzungen auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und eines *Darboux*'schen Systems $k - l^{\text{ter}}$ Klasse reduzieren; ein anderes Beispiel liefern die Differentialprobleme mit einem System von *Fundamentallösungen*[341]) $\xi_1 \ldots \xi_n$, mittels deren sich das allgemeine Integral $z_1 \ldots z_n$ durch Relationen der Form $z_i = \varphi_i(\xi_1 \ldots \xi_n)$ ergiebt, die eine Transformationsgruppe darstellen.

---

335) *Lie*, Leipz. Ber. 1895, p. 90—112.

336) *Laplace*'sche Gleichungen 2. Ordnung mit infinitesimalen Transformationen in sich klassifiziert und integriert *Lie*, Norw. Arch. 6, p. 328 (1881).

337) *J. Beudon*, Par. C. R. 118, p. 1188 (1894); „Goursat B" Art. 173.

338) Die partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, die unendliche Gruppen von Punkttransformationen gestatten, klassifiziert *P. Medolaghi*, Ann. di mat. (3) **1**, p. 229 (1898).

339) Dieser Satz ist nicht umkehrbar, „Goursat B" 2, p. 196.

340) *Lie*, Leipz. Ber. 1895, p. 112.

341) Ebenda p. 282; *J. Drach*, Par. C. R. 116, p. 1041 (1893).

2) Differentialsysteme mit m unabhängigen Veränderlichen.

55. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Auf einer Integralfläche $z = f(x_1\, x_2 \ldots x_m)$ einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$(186)\quad F\left(x_1 \ldots x_m, z, z_{1,0\ldots0}, \ldots z_{\beta_1 \ldots \beta_m} \cdots\right) = 0 \quad \left(\sum \beta_i \leqq n;\ \text{vgl. Nr. 1}\right).$$

wird durch Hinzufügung einer Relation $x_1 = \varphi(x_2 \ldots x_m)$ eine $m-1$-fach ausgedehnte Elementmannigfaltigkeit definiert; durch Angabe der letzteren ist dann die Integralfläche eindeutig festgelegt. Genügt aber φ der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung S, die durch Nullsetzen der *charakteristischen Form*

$$(187)\quad \sum \frac{\partial F}{\partial z_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n)$$

erhalten wird, nachdem man darin z und seine Ableitungen mittels $z = f$ als Funktionen der x dargestellt, und $\xi_1 \ldots \xi_m$ bezw. durch $-1,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$, ferner x_1 durch φ ersetzt hat, dann und nur dann ist die entsprechende Element-M_{m-1} unbegrenzt vielen Integralflächen von (186) gemeinsam, da alle ihr zugehörenden Flächenelemente $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung die m ersten Derivierten von (186) erfüllen; sie wird eine „$m-1$-*dimensionale Charakteristik*“ der partiellen Differentialgleichung (186) genannt[342]) und mit C_{m-1} bezeichnet.

Durch eine auf der Integralfläche $z = f$ beliebig gewählte Element-M_{m-2} gehen n im allgemeinen verschiedene dieser Charakteristiken hindurch. Berühren sich zwei Integralflächen mit gemeinsamer C_{m-1} in einem Flächenelement der letztern $n+\nu$-fach, so thun sie dies längs der ganzen C_{m-1}. Die Charakteristiken C_{m-1} sind, unabhängig von der gerade betrachteten Integralfläche, durch ein System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den abhängigen Variabeln $x_1, z, z_{1\,0\ldots0}, \cdots z_{0,\ldots0,n}$ und den Independenten $x_2 \ldots x_m$ definiert. Indem man zu der Gleichung (186) die Derivierten bis zu einer beliebigen Ordnung hinzufügt, lassen sich ebenso wie im Falle $m = 2$ Charakteristiken der Ordnung $n+1,\ n+2, \cdots$ definieren.

Für spezielle Gleichungen (186) kann es eintreten[343]), dass jede C_{m-1} sich aus ∞^1 $m-2$-*dimensionalen charakteristischen Mannigfaltigkeiten* C_{m-2} zusammensetzt, deren Gesamtheit dann durch ein

342) *A. V. Bäcklund*, Math. Ann. 13, p. 411 (1878); vgl. auch *J. Beudon*, Par. C. R. 124, p. 671 (1897); *É. Goursat*, ib. 126, p. 1332 (1898), doch sei die Priorität *Bäcklund*'s ausdrücklich hervorgehoben.

343) *Bäcklund*, a. a. O.

System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit $m-2$ Independenten definiert ist. Eine noch speziellere Klasse von Gleichungen (186) ergiebt sich, wenn sich jede C_{m-2} von je ∞^1 Charakteristiken C_{m-3} erzeugen lässt, etc. Indes kennt man kein Beispiel einer Gleichung (186), deren allgemeinste Integralfläche sich aus $\infty^{m-\nu}$ Charakteristiken $C_\nu (m-1>\nu>1)$, nicht aber aus $\infty^{m-\nu+1}$ Charakteristiken $C_{\nu-1}$ zusammensetzen lässt[344]).

Zerfällt die charakteristische Form (187) in n Linearfaktoren[345]), also die zu einer beliebigen Integralfläche gehörige partielle Differentialgleichung S (s. oben) in n lineare partielle Differentialgleichungen, so bestimmen die „charakteristischen Kurven" einer jeden der letzteren auf der Integralfläche ebensoviele Systeme von *Streifen* n^{ter} Ordnung, welche *„eindimensionale Charakteristiken"* oder *„charakteristische Streifen"* von (186) heissen, und mit C_1 bezeichnet werden sollen. Die Charakteristiken C_1 sind, unabhängig von der betrachteten Integralfläche, durch n Systeme linearer, totaler Differentialgleichungen in den Variabeln $x_i, z, z_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \left(\sum \alpha_i \leqq n\right)$ definiert; die Anzahl der Gleichungen eines solchen Systems ist um m kleiner als die Zahl der Differentiale $dx_i, dz, dz_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \left(\sum \alpha \leqq n\right)$. Jede nichtsinguläre Integralfläche von (186) besteht aus $m-1$-fach unendlich vielen C_1 eines jeden der n Charakteristikensysteme. Die allgemeinste C_ν $(\nu = 2, 3, \cdots m-1)$ ist von $\infty^{\nu-1}$ Charakteristiken C_1 erzeugt. Für Gleichungen (186) dieser Art lassen sich auch charakteristische Streifen jeder beliebigen Ordnung $n+k$ durch Systeme totaler Differentialgleichungen definieren[346]). Die etwaigen integrablen Kombinationen dieser Systeme führen wie im Falle $m=2$ zu partiellen Differentialgleichungen, die mit (186) in Involutionsbeziehung stehen; doch ist eine entsprechende Übertragung der *Darboux-Lévy*'schen Methode bisher nicht durchgeführt worden[347]).

56. Involutionssysteme mit einer Unbekannten. Ein System von $\mu \left(\leqq m\right)$ partiellen Differentialgleichungen (186) ist dann und nur

344) Das von *Bäcklund*, Math. Ann. 15, p. 83 f. gegebene Beispiel einer Gleichung 2. Ordnung hat die genannte Eigenschaft nur hinsichtlich einer partikulären Integralschar, vgl. Math. Ann. 17, p. 326.

345) S. *Bäcklund* a. a. O.; *V. Sersawy*, Wien. Denkschr. 49^2, p. 60 ff., bes. p. 81.

346) *A. R. Forsyth*, Lond. Trans. A, 1898, p. 1 giebt im Falle $n=2$, $m=3$ die Definitionsgleichungen der charakteristischen Streifen 2. und 3. Ordnung.

347) Vgl. die (nach Methode und Ergebnis nicht einwandfreien) Ansätze *Sersawy*'s a. a. O., und die Andeutungen von *Forsyth* a. a. O.

dann involutorisch[348]), wenn die μm aus ihm durch Derivation folgenden Gleichungen $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung sich auf nur $\mu m - \frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ unabhängige Gleichungen reduzieren. Die μ charakteristischen Formen haben dann einen Faktor $n-1^{\text{ten}}$ Grades gemein; demgemäss giebt es auf jeder gemeinsamen Integralfläche ein System gemeinsamer Charakteristiken C_{m-1}, das durch eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung vom Grade $n-1$ in den Ableitungen definiert ist, im Falle $n=2$ insbesondere ∞^{m-1} gemeinsame eindimensionale Charakteristiken. Ein Involutionssystem von m Gleichungen 2. Ordnung in m Independenten besitzt[349]) eine von endlicher Konstantenzahl abhängende Schar charakteristischer Streifen 2. Ordnung, aus denen sich alle Integralflächen des Systems erzeugen lassen; die Integration des letzteren kommt sonach auf die Herstellung der allgemeinsten Integral-M_{m-1} und die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen hinaus. Bilden k Gleichungen 2. Ordnung mit jeder einzelnen der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung: $u_1 = c_1, \ldots u_{m-k+1} = c_{m-k+1}$ je ein $k+1$-gliedriges Involutionssystem, so bilden sie ein solches mit allen Gleichungen der Form $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{m-k+1}) = 0$.

J. Beudon[350]) hat involutorische Gleichungen der Form (186) betrachtet, deren Zahl um ν ($<m$) kleiner ist als die Anzahl der n^{ten} Ableitungen von z. Ein solches System besitzt eine endlichgliedrige Schar von Charakteristiken $C_{m-\nu}$ derart, dass durch jedes gemeinsame Flächenelement n^{ter} Ordnung der gegebenen Gleichungen *eine* dieser $C_{m-\nu}$ festgelegt ist. Die ∞^{ν} Charakteristiken $C_{m-\nu}$, die bez. durch die Flächenelemente einer Integral-M_r des Systems hindurchgehen, erzeugen die allgemeinste Integral-M_m. Die Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung (Nr. **38**) und die *Darboux*'schen Systeme erster Klasse (Nr. **50**) sind Spezialfälle dieser Theorie.

Besitzen zwei Gleichungen (186), ohne involutorisch zu sein, soviele gemeinsame Integralflächen, dass jedes ihrer gemeinsamen

348) *Bäcklund*, Math. Ann. 13, p. 104—107, 423, 427; Math. Ann. 15, p. 78.

349) *Bäcklund*, Math. Ann. 13, p. 107; die in den zweiten Ableitungen *linearen* Systeme dieser Art bestimmt und integriert *J. Beudon*, Ann. éc. norm. 1898, p. 229; die betr. Resultate lassen sich ohne weiteres auf m-gliedrige Involutionssysteme von linearen Gleichungen *beliebiger* Ordnung übertragen.

350) Ann. éc. norm. 1896, Suppl. = Thèse, Paris 1896; in J. de math. (5) 5, p. 351 (1899) betrachtet *Beudon* diejenigen Differentialsysteme mit *einer* Unbekannten, deren allg. Int. *eine* arb. Funktion von ϱ ($<m$) Variabeln enthält; vgl. die von *Bäcklund*, Math. Ann. 19, p. 410 f. behandelten Spezialfälle.

Flächenelemente $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung wenigstens *einer* Integralfläche angehört[351]), d. h. bilden die gegebenen Gleichungen mit ihren $2m$ Derivierten zusammen im *Lie*'schen Sinne (Fussn. 41) ein unbeschränkt integrables System, so sind die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, die auf einer gemeinsamen Integralfläche bezw. die Charakteristiken C_{m-1} der gegebenen Gleichungen definieren, involutorisch; jede gemeinsame Integralfläche ist also dann im Falle $m=2$ von einfach unendlich vielen, im Falle $m>3$ von ∞^{∞} *gemeinsamen* Charakteristiken C_{m-1} der gegebenen Gleichungen 2. Ordnung erzeugt.

57. Verallgemeinerung der Monge-Ampère'schen Theorie[352]) (Nr. **43**—**45**). Damit eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(188)\quad F(x_1 \dots x_m, z, p_1 \dots p_m, r_{11}, r_{12}, \dots r_{mm}) = 0 \qquad \left(r_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\right)$$

ein allgemeines erstes Integral der Form:

$$(189)\qquad \varphi(u_1 u_2 \dots u_m) = 0$$

besitze, worin φ eine arbiträre Funktion und die u_i Funktionen von $x_1 \dots x_m$, z, $p_1 \dots p_m$ bedeuten, muss ihre linke Seite eine lineare Funktion der Determinante $|r_{ik}|$ und ihrer Minoren $m-1^{\text{ter}}$, $m-2^{\text{ter}}$,.. .. 1ter Ordnung sein; ferner müssen ihre Koeffizienten gewissen Relationen genügen, welche aussagen, dass die Gleichung (188) zwei verschiedene Systeme *„charakteristischer Streifen 1. Ordnung"* besitzt, die bezw. durch zwei Systeme Σ_1, Σ_2 von je $m+1$ *Pfaff*'schen Gleichungen in x_k, z, p_i definiert sind; endlich muss Σ_1 m integrable Kombinationen $du_1, \dots du_m$ zulassen. Durch eine Berührungstransformation kann man stets erreichen, dass Σ_1 die Form hat:

$$dz = \sum_1^m p_h dx_h; \quad dp_i + \sum_1^m \alpha_{ih} dx_h = 0$$

$$(i = 1, \cdots m;\ \alpha_{ih} \text{ Funktionen der } x, z, p);$$

Σ_2 entsteht hieraus, indem man überall α_{ik} und α_{ki} vertauscht, und (188) hat die Form:

$$|r_{ik} + \alpha_{ik}| = 0^{353}) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots m).$$

---

351) *Bäcklund*, Math. Ann. 15, p. 69—74.

352) *Bäcklund*, Math. Ann. 11, p. 236; 13, p. 99 ff.; *H. W. L. Tanner*, Lond. math. Proc. 7, p. 43, 75 (1875—76); *G. Vivanti*, Lomb. Rend. (2) 29, p. 777 (1896); ebenda 32 (1899); *A. R. Forsyth*, Cambr. Trans. 16^3, p. 191 (1898); *É. Goursat*, Bull. soc. math. 27 (1899).

353) *Goursat*, a. a. O.

Gestattet auch Σ_2 m integrable Kombinationen dv_i, so besitzt die Gleichung (188) noch ein zweites allgemeines intermediäres Integral:

$$\psi(v_1\, v_2 \cdots v_m) = 0. \tag{190}$$

Jede partielle Differentialgleichung 1. Ordnung dieser Form ist dann mit jeder Gleichung (189) involutorisch. Ist das System Σ_1 unbeschränkt integrabel, d. h. gestattet es $m+1$ integrable Kombinationen $du_1, \ldots du_{m+1}$, so ist es mit Σ_2 identisch; umgekehrt ist dies der Fall, und giebt es m integrable Kombinationen du_i, so existiert stets noch eine $m+1^{\text{te}}$.[354]) Die Gleichungen $u_1 = c_1, \cdots u_{m+1} = c_{m+1}$ stellen dann ∞^{m+1} Mannigfaltigkeiten M_m von Flächenelementen 1. Ordnung dar, und die allgemeinste Integral-M_m von (188) ist das Umhüllungsgebilde von irgend ∞^1 derselben[355]).

Eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung mit m Independenten und einem ersten Integral (189)[356]), wo die u_i Funktionen von x_i, z, p_i, r_{ik} bedeuten, hat eine partikuläre Form, die in den dritten Ableitungen bis zum Grade m ansteigt; besitzt eine Gleichung dieser Form noch ein zweites intermediäres Integral (190), so bildet jede Gleichung (190) mit jeder Gleichung (189) ein Involutionssystem 2. Ordnung, und es giebt drei verschiedene Systeme charakteristischer Streifen 2. Ordnung, derart, dass jede Integral-M_m der gegebenen Gleichung 3. Ordnung je ∞^{m-1} Streifen eines jeden der drei Systeme enthält. Zwei dieser Systeme sind durch lineare totale Differentialgleichungen definiert, die bezw. die integrabeln Kombinationen du_i und dv_i zulassen. Analoges gilt für Gleichungen beliebiger Ordnung mit intermediären Integralen. Zerfällt insbesondere die charakteristische Form einer hinsichtlich der höchsten Ableitungen linearen Gleichung n^{ter} Ordnung in n Linearfaktoren[357]), so giebt es ebensoviele durch *Pfaff*'sche Gleichungen definierte Systeme charakteristischer Streifen $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, und es können dementsprechend 1, 2, 3, ... selbst n verschiedene allgemeine Integrale auftreten; irgend k Integrale verschiedener Systeme bilden ein Involutionssystem $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung.

Bäcklund[358]) hat auch Gleichungen der Form (188) betrachtet,

---

354) Für den Fall $m = 3$ vgl. *G. Vivanti*, Math. Ann. 48, p. 474.

355) *Vivanti*, a. a. O ; *J. Kürschak* (Fussn. 256).

356) *Bäcklund*, Math. Ann. 13, p. 104.

357) Diesen Fall betrachtet schon *Monge*, Par. Hist. 1784, p. 161; vgl. *A. M. Legendre*, ebenda 1787, p. 323; *M. Falk*, Tidskr. f. Mat. Upsala 4 (1871); *E. Combescure*, Par. C. R. 74, p. 798 (1872).

358) Math. Ann. 11, p. 240.

die ein erstes Integral mit m arbiträren Konstanten zulassen (für $n = 2$, $m = 2$ vgl. Nr. 45).

58. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten. *M. Hamburger*[359]) giebt eine Integrationstheorie des Differentialsystems:

$$\sum_1^n{}_k \sum_1^m{}_s P_{iks}\, p_{ks} = Q_i \tag{191}$$

$$\left(i = 1, \cdots n;\ p_{ks} = \frac{\partial z_k}{\partial x_s};\ P_{iks},\ Q_i \text{ Funktionen von } x_1 \cdots x_m\ z_1 \cdots z_n\right)$$

mit den Unbekannten $z_1 \ldots z_n$ und den Independenten $x_1 \ldots x_m$, unter der Voraussetzung, dass die Funktionen P_{iks} im Falle $m > 2$ gewissen algebraischen Bedingungen unterliegen, die u. a. aussagen, dass die Determinante

$$\left| \sum_1^m{}_s P_{iks}\, \lambda_s \right| \qquad (i, k = 1, \cdots n) \tag{192}$$

in n hinsichtlich $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ lineare Faktoren zerfällt. Diesen Faktoren entsprechen dann ebensoviele Systeme Σ_i von je $m + 1$ *Pfaff*'schen Gleichungen in den x, z. Eine eindimensionale Punktmannigfaltigkeit des Raumes $R_{m+n}(x_1 \ldots x_m\ z_1 \ldots z_n)$, die ein solches System Σ_i befriedigt, kann als „charakteristische Kurve" des Differentialsystems (191) bezeichnet werden. Jedes Integralgebilde

$$z_1 = \xi_1(x_1 \cdots x_m), \cdots z_n = \xi_n(x_1 \cdots x_m)$$

enthält ∞^{m-1} charakteristische Kurven eines jeden der n Systeme. Besitzt jedes System Σ_i m integrable Kombinationen $du_{i1}, du_{i2}, \ldots du_{im}$, so erhält man das allgemeine Integral von (191) durch Auflösung der Gleichungen

$$\varphi_i(u_{i1}, u_{i2}, \cdots u_{im}) = 0 \quad (i = 1, \cdots n;\ \varphi_1, \cdots \varphi_n \text{ arb. Funktionen}) \tag{193}$$

nach $z_1 \ldots z_n$. Die Methode ist auch auf den Fall mehrfach zählender Linearfaktoren von (192) anwendbar, vorausgesetzt, dass jeder k-fache Faktor $k - l$-fach in allen $n - l$-reihigen Unterdeterminanten von (192) aufgeht. Ist unter dieser Annahme insbesondere $k = n$, so hat das System (191) die von *Jacobi*[63]) betrachtete Form:

$$P_1 \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \cdots + P_m \frac{\partial z_i}{\partial x_m} = Q_i \quad (i = 1, \cdots m)$$

und seine Integration kommt nach Nr. 11 auf diejenige eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen[360]) zurück.

359) J. f. Math. 100, p. 401 ff. (1887); für den Fall $m = 2$ vgl. Fussn. 305.

360) Analoges gilt für eine von *Hamburger* angegebene Klasse nicht linearer Systeme 1. Ordnung in n Unbekannten, J. f. Math. 110, p. 167—173.

Damit n Gleichungen 1. Ordnung mit n Unbekannten z_i ein allgemeines Integral (193) besitzen[359]), müssen ihre linken Seiten eine partikuläre Form haben, die in den p_{ik} bis höchstens zum Grade m ansteigt, und ihre Koeffizienten gewisse Identitäten befriedigen; auf diese Klasse von Differentialsystemen überträgt sich ohne weiteres der Begriff „charakteristische Kurve“ und die obige Integrationsmethode.

59. Nichtlineare Differentialsysteme erster Ordnung mit n Unbekannten; Normalsysteme. Das System von N ($< m \cdot n$) involutorischen, hinsichtlich der p_{ik} unabhängigen Gleichungen 1. Ordnung mit n Unbekannten $z_1 \dots z_n$ und m Independenten $x_1 \dots x_m$:

$$(\mathrm{J}) \qquad F_i(x_1 \cdots x_m, z_1 \cdots z_n, p_{11} \cdots p_{n,m}) = 0 \quad \left(i = 1, 2, \cdots N;\ p_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)$$

ist für den Fall näher untersucht[361]), dass es sich in der Form:

$$p_{ik} = f_{ik}(x_1 \dots x_m,\ z_1 \dots z_n \dots p_{rs} \dots) \tag{194}$$
$$(k = 1, \cdots \mu;\ i = 1, \cdots n \quad \text{und} \quad k = \mu + 1,\ i = 1, 2, \cdots \nu)$$

auflösen[362]) lässt, worin $N = \mu n + \nu$ ($\mu < m$, $\nu < n$) gesetzt wird. Die Bedingungen der Passivität (Nr. 2) von (194) haben u. a. zur Folge, dass die Gleichungen, die durch Nullsetzen aller n-reihigen Determinanten der *„charakteristischen Matrix“*[363])

$$\left\| \sum_1^m {}_s P_{iks}\, \lambda_s \right\| \qquad \left(i = 1, \cdots N;\ k = 1, \cdots n;\ P_{iks} = \frac{\partial F_i}{\partial p_{ks}}\right)$$

erhalten werden, im Raume R_{m-1} mit den homogenen Punktkoordinaten $\lambda_1 \dots \lambda_m$ eine $m - \mu$ — 1-dimensionale Punktmannigfaltigkeit M vom Grade $n - \nu$ darstellen. Jedes der μ *„Teilsysteme“*

$$(\mathrm{J}_s) \qquad p_{is} = f_{is};\ p_{j,\mu+1} = f_{j,\mu+1} \qquad (i = 1, \cdots n;\ j = 1, \cdots \nu)$$

bildet für sich ein Involutionssystem, wenn $x_1 \dots x_{s-1}$, $x_{s+1} \dots x_\mu$ als Parameter gelten. Das System (J) heisst ein *„Normalsystem“*, wenn die P_{iks} gewissen algebraischen Bedingungen genügen, die u. a. zur Folge haben, dass M in $n - \nu$ lineare Punktmannigfaltigkeiten zerfällt. Jedes System (J_s) bildet dann gleichfalls ein Normalsystem, und (J) besitzt $n - \nu$ im allgemeinen verschiedene Systeme *„charakte-*

361) S. meine Arbeiten: Par. C. R. 123, p. 292 (1896); Leipz. Ber. 1897, p. 329; Math. Ann. 49, p. 543.

362) Die Existenz der Lösungen eines passiven Systems der Form (194) hat für den Fall $r = 0$ *J. König* (Math. Ann. 23, p. 520), allgemein *C. Bourlet* (Ann. éc. norm. 1891, Suppl. p. 43) untersucht.

363) Dieser Begriff überträgt sich auf jedes beliebige Differentialsystem, vgl. *De Pistoye*, Par. C. R. 78, p. 1102 (1874).

ristischer", μ-fach ausgedehnter Integralmannigfaltigkeiten C_μ, die durch lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den Independenten $x_1 \dots x_\mu$ und den abhängigen Variabeln $x_{\mu+1} \dots x_m$, $z_1 \dots z_n$, p_{ik}, im Falle $\mu = 1$ also durch $n - \nu$ Systeme Σ_i *Pfaff*'scher Gleichungen in x_k, z, p_{ik} definiert sind. Jedes Integralgebilde des Normalsystems (J) ist von je $\infty^{m-\mu}$ Charakteristiken C_μ eines jeden der $n - \nu$ Systeme erzeugt; die einzelne C_μ enthält je $\infty^{\mu-1}$ Charakteristiken C_1 jedes Teilsystems (J_s), und die Systeme (J_1), $(J_2), \dots (J_\mu)$ stehen sonach zu einander in einer ähnlichen Beziehung, wie die Gleichungen eines μ-gliedrigen Involutionssystems von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit *einer* Unbekannten (Nr. **38** und **39**).

Im Falle $\nu = n - 1$ geht durch jedes Flächenelement des Normalsystems (J) nur *eine* C_μ, und die Integration von (J) vollzieht sich mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen, nachdem zuvor die allgemeinste Integral-$M_{m-\mu}$ durch Integration eines Differentialsystems in $m - \mu$ Independenten ermittelt worden. Die Integration von (194) wird mit Hülfe der *Lie-Mayer*'schen *Transformation* (Nr. **17**) auf den Fall $\mu = 1$ zurückgeführt[364]). Besitzen in diesem letzteren Fall die $n - \nu$ *Pfaff*'schen Systeme Σ_i eine genügende Anzahl integrabler Kombinationen, so lässt sich die Integration von (J) auf Probleme in weniger als m Independenten, eventuell auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen reduzieren.

In der Theorie der Normalsysteme sind die meisten Integrationstheorien partieller Differentialprobleme, insbesondere die *Darboux-Lévy*'sche Theorie und ihre Verallgemeinerungen (Nr. **51**), sowie die *Beudon*'schen Systeme (Nr. **56**, Fussn. 350) als Spezialfälle enthalten.

60. Systeme Pfaff'scher Gleichungen. Die mit dem Systeme *Pfaff*'scher Gleichungen:

$$(S) \qquad dx_{m+s} = a_{1s}dx_1 + \dots + a_{ms}dx_m$$
$$(s = 1, \dots n - m;\ a_{is} \text{ Funktionen von } x_1 \dots x_n)$$

invariant verknüpfte adjungierte Schar infinitesimaler Transformationen (Nr. **14**) hat die Form:

$$(195) \qquad \varrho_1 A_1 f + \varrho_2 A_2 f + \dots + \varrho_m A_m f$$
$$\left(A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-m} {}_s\, a_{si} \frac{\partial f}{\partial x_{m+s}}\right).$$

Schreibt man

$$a_{iks} \equiv a_{kis} \equiv A_i a_{ks} - A_k a_{is}$$

364) *König*, a. a. O. p. 525; *Bourlet*, a. a. O. p. 43.

und ist $m - h$ der Rang der m-zeiligen Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a_{121} & \cdots & a_{1m1} & 0 & a_{122} & \cdots & a_{1m2} & 0 & \cdots \\ a_{211} & 0 & \cdots & a_{2m1} & a_{212} & 0 & \cdots & a_{2m2} & a_{213} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m11} & a_{m21} & \cdots & 0 & a_{m12} & a_{m22} & \cdots & 0 & a_{m13} & \cdots \end{matrix} \right\|,$$

so giebt es, entsprechend den h Lösungensystemen $\xi_1^{(i)} \ldots \xi_m^{(i)}$ der Gleichungen

$$\sum \xi_k a_{iks} = 0; \quad \xi_{m+s} = \sum a_{ks} \xi_k \quad (s = 1, \cdots n - m; \; i = 1, \cdots m)$$

h linear unabhängige, der Schar (196) angehörende infinitesimale Transformationen

$$X_i f \equiv \sum \xi_k^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \cdots h),$$

die das System ungeändert lassen (Nr. **14**). Die Schar

$$\varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_h X_h f$$

ist mit dem System (S) invariant verknüpft[365]); führt man die Integrale $y_1 \ldots y_{n-1}$ irgend einer der partiellen Differentialgleichungen $X_i f = 0$ statt ebensovieler x als neue Variable in (S) ein, so verwandelt sich dieses in ein System, das nur mehr die Variabeln $y_1 \ldots y_{n-1}$ enthält[366]). Die Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_h f = 0$ bilden ein vollständiges System; führt man dessen Integrale $y_1 \ldots y_{n-h}$ in (S) als neue Variable ein, so entsteht ein System, das nur mehr die $y_1 \ldots y_{n-h}$ enthält; eine weitere Reduktion der Variabelnzahl ist unmöglich[367]).

Das Gleichungensystem

$$\left. \begin{matrix} dx_{m+s} = \sum a_{ks} dx_k; \quad \delta x_{m+s} = \sum a_{ks} \delta x_k \\ \sum \sum a_{iks} \, dx_i \delta x_k = 0 \end{matrix} \right\} (s = 1, 2, \cdots n - m)$$

365) *F. Engel,* Leipz. Ber. 1889, p. 157.

366) *M. Hamburger*, J. f. Math. 110, p. 158 (1892); *W. de Tannenberg,* Par. C. R. 120, p. 674 (1895); der Satz enthält die *Pfaff-Grassmann*'sche Reduktionsmethode *einer Pfaff*'schen Gleichung als Spezialfall (s. Nr. **27**). Über die Bedingungen, die ausdrücken, dass die oben mit h bezeichnete Zahl > 0 ist, vgl. auch *Grassmann,* Werke 1^2, Nr. 511, und *Engel*'s Bemerkungen dazu ebenda p. 479 f.

Die (triviale) Thatsache, dass es keinen Sinn hat, die in der Theorie des *Pfaff*'schen Problems zum Ziele führenden Methoden rein formal auf beliebige *Systeme Pfaff*'scher Gleichungen übertragen zu wollen, bildet das Ergebnis der Untersuchungen von *O. Biermann,* Zeitschr. Math. Phys. 30, p. 234 (1885) und *A. R. Forsyth* (Theory of Diff. Equations 1, Kap. 13).

367) S. meine Arbeit, Leipz. Ber. 1898, p. 207.

ist mit (S) invariant verknüpft[368]). Also sind die Rangzahlen K, 2ν, die bezw. den Matrices

$$(196)\qquad \begin{array}{ll} \left\| \sum_1^m{}_k\, a_{iks}\lambda_s \right\| & (i=1,\cdots m;\ s=1,\cdots n-m) \\ \left\| \sum_1^{n-m}{}_s\, a_{iks}\mu_s \right\| & (i,k=1,\cdots m) \end{array}$$

für beliebige x, λ, μ zukommen, *Invarianten* des Systems (S); K heisst der *Charakter*, 2ν der *Rang* von (S)[367]). Nennt man $D_1, D_2, \ldots D_p$ die nicht identisch verschwindenden K-reihigen Unterdeterminanten von (196), und ersetzt man in den D_i die λ_k durch die dx_k, so bilden die Gleichungen

$$(197)\qquad dx_{m+1} = \sum a_{ks}\,dx_k;\ D_i = 0 \quad (s=1,\cdots n-m;\ i=1,\cdots p)$$

ein mit (S) invariant verknüpftes System totaler Differentialgleichungen[369]).

Das Differentialsystem

$$(198)\qquad A_i f = 0,\ A_i(A_k f) - A_k(A_i f) = 0 \qquad (i,k,=1,2,\ldots m)$$

ist mit (S) ebenfalls invariant verknüpft[370]); dasselbe gilt also von dem zu (198) adjungierten *Pfaff*'schen System (S_1), das in dem System (S) enthalten ist und das *abgeleitete System* des letzteren heissen möge.

Im Falle $K=0$ ist auch $2\nu=0$, die a_{iks} verschwinden, und (S) ist mit (S_1) identisch und unbeschränkt integrabel.

Im Falle $K=1$ besteht (S_1) aus $n-m-1$ Gleichungen, das Differentialsystem (198) also aus $m+1$ unabhängigen Gleichungen, und zwar ist dies System *vollständig*, also (S_2) unbeschränkt integrabel[367]), wenn der Rang $2\nu > 2$; dann kann (S) die Normalform:

$$dz_{2\nu+1} = z_{\nu+1}dz_1 + z_{\nu+2}dz_2 + \cdots + z_{2\nu}dz_\nu;\ dz_{2\nu+2} = 0, \cdots dz_{2\nu+n-m} = 0$$

erhalten, worin die Funktionen $z_1 \ldots z_{2\nu+n-m}$ unabhängig sind, besitzt also ausser den Zahlen 2ν und $n-m$ keine weiteren Invarianten.

Ist dagegen $K=1$, $2\nu=2$, so besitzt (S) eine reduzierte Form:

$$dy_2 = y_{n-m+2}\,dy_1;\ dy_{2+s} = \varphi(y_1 y_2 \cdots y_{n-m+2})\,dy_1$$
$$(s=1,2,\cdots n-m-1).$$

Ist (S_2) das abgeleitete System von (S_1), (S_3) dasjenige von (S_2) etc.,

368) *F. Engel*, Leipz. Ber. 1890, p. 192.

369) Ebenda p. 197.

370) Über diese und andere invariante Bildungen und deren geometrische Deutung vgl. die beiden citierten Arbeiten *Engel*'s.

und besitzen diese Systeme alle den Charakter 1, d. h. bestehen sie bezw. aus $n-m-2$, $n-m-3, \ldots$ Gleichungen, bis man zu einem System $(S_{n-m-r-1})$ gelangt, dessen abgeleitetes System unbeschränkt integrabel ist, dann und nur dann besitzt (S) eine Normalform[367]):

$$dz_2 = 0,\ dz_3 = 0, \ldots dz_{r+1} = 0,$$

$$dz_{r+2} = z_{r+3} dz_1;\ dz_{r+3} = z_{r+4} dz_1, \ldots dz_{n-m+1} = z_{n-m+2} dz_1,$$

worin die z_i unabhängige Funktionen der x sind, und es giebt ausser den Zahlen r und $n-m$ keine weiteren Invarianten von (S). Insbesondere kann jedes zweigliedrige *Pfaff*'sche System in 4 Variabeln, das keine integrable Kombination besitzt, auf die Normalform

$$dz_2 = z_3 dz_1;\ dz_3 = z_4 dz_1$$

gebracht werden[365]).

Die Frage nach dem vollen Invariantensystem von (S) im allgemeinen Fall $K = 1$, $2\nu = 2$, sowie für die Fälle $K > 1$ harrt noch der Erledigung[371]).

Auf die Zahl K gründet sich eine *Klassifikation der Differentialsysteme*, bezw. der mit ihnen äquivalenten Systeme *Pfaff*'scher Gleichungen (Nr. 8). Der Fall $K = 0$ umfasst z. B. alle *Mayer*'schen Systeme (Nr. 3), der Fall $K = 1$, $m = 3$ alle *Darboux*'schen Systeme erster Klasse (Nr. 50)[372]).

371) Für den Fall $n = 6$, $n - m = 2$ giebt *Duport* (Liouv. Journ. (5) 3, p. 17, 1897) reduzierte Formen.

372) Über die Bedeutung der bilinearen Kovarianten für die Theorie der Differentialprobleme mit 2 Independenten vgl. meine Arbeiten: Münch. Ber. 25, p. 101 (1895); ebenda p. 423.

II A 6. KONTINUIERLICHE TRANSFORMATIONSGRUPPEN

VON

L. MAURER IN TÜBINGEN*) und **H. BURKHARDT** IN ZÜRICH.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Definitionen.
3. Die grundlegenden Differentialgleichungen.
4. Umformung der Differentialgleichungen. Infinitesimale Transformationen.
5. Integrabilitätsbedingungen. Zusammensetzung.
6. Untergruppen.
7. Isomorphismus.
8. Ähnlichkeit.
9. Transformation einer Gruppe in sich.
10. Reciproke Gruppen.
11. Transitivität. Primitivität.
12. Invarianten.
13. Differentialinvarianten.
14. Parametergruppen.
15. Adjungierte Gruppe.
16. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Variabeln- und Parameterzahl.
17. Bestimmung aller Typen der Zusammensetzung einer Gruppe.
18. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Zusammensetzung.
19. Über den analytischen Charakter der Funktionen $f_r(x \mid a)$.
20. Besondere Arten von endlichen kontinuierlichen Gruppen.
21. Gemischte Gruppen.
22. Unendliche kontinuierliche Gruppen.

Litteratur.

S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen (unter Mitwirkung von *Fr. Engel*), 1, Lpz. 1888; 3, Lpz. 1893 („Lie-Engel").

S. Lie, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, bearb. u. herausgeg. von *G. Scheffers*, Lpz. 1893 („Lie-Scheffers").

*) Der Text rührt grösstenteils von *L. Maurer*, die Anmerkungen grösstenteils von *H. Burkhardt* her.

F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie, autogr. Vorl., 2, Gött. 1893.

Zur ersten Einführung: *S. Lie*, Math. Ann. 16 (1880), p. 441; *J. M. Page*, Ann. of math. 8 (1894), p. 117; *E. Picard*, Traité d'analyse 3, Par. 1897, chap. 17.

Über die *Anwendungen* der Theorie auf komplexe Zahlensysteme, Integrationstheorie und Geometrie vgl. man bezw. die Abschnitte I A 4; II A 4b und 5; III B 1, C 8 und D 7.

1. Einleitung. Das anschaulichste Beispiel einer kontinuierlichen Transformationsgruppe bietet die *Gesamtheit der Bewegungen des Raumes*. Wird eine Raumfigur durch Bewegung ohne Formänderung in eine neue Lage gebracht, so drücken sich die Cartesischen Koordinaten eines jeden ihrer Punkte in der neuen Lage als lineare Funktionen seiner ursprünglichen Koordinaten aus. Die Koeffizienten dieser Substitution unterliegen noch Bedingungen, sodass sie durch nur 6 willkürliche Parameter ausgedrückt werden können: es giebt 6fach unendlich viele (∞^6) Bewegungen. Der Ersetzung zweier aufeinanderfolgenden Bewegungen durch eine einzige Bewegung entspricht die Zusammensetzung zweier solchen Substitutionen zu einer neuen, die dieselbe Form besitzt und nur andern Werten der Parameter entspricht.

Diese Dinge sind natürlich seit lange bekannt, aber zu einer scharfen Formulierung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse und zu einer prinzipiellen Auffassung derselben ist man erst gelangt, nachdem sich aus den Untersuchungen über Gruppen von Buchstabenvertauschungen der allgemeine Begriff einer *Gruppe von Operationen* (I A 6, Nr. **15**) entwickelt hatte. So hat *C. Jordan* bereits 1867 alle *Gruppen von Bewegungen* (d. h. alle in der Gruppe aller Bewegungen enthaltenen Untergruppen) bestimmt[1]). Dann haben *F. Klein* und *S. Lie* den Gruppenbegriff in die Mitte der mathematischen Forschung gerückt und zunächst für alle geometrischen Untersuchungen dargelegt: dass nicht das *Element*, aus welchem man eine Mannigfaltigkeit erzeugt, deren charakteristische Eigenschaften bestimmt, sondern einzig die *Gruppe*; dass es sich für invariante Eigenschaften immer um Herstellung von Körpern mittelst der Transformationen der Gruppe handelt; dass Abbildungen die Gruppe, also auch die Geometrie bestehen lassen[2]). Von dem daraus sich ergebenden Problem der Diskussion aller möglichen Gruppen hat *S. Lie* die *kontinuierlichen* Gruppen in Angriff genommen, d. h. diejenigen, bei welchen

1) Par. C. R. 65 (1867), p. 229; Ann. di mat. (2) 2 (1869), p. 168, 320. Die sich hieran schliessenden Untersuchungen kommen in III A 3 und V 7 zur Sprache.

2) *F. Klein*, Programm Erlangen 1872 (abgedruckt Math. Ann. 43; Ann. éc. norm. (3), 8; Ann. di mat. (2) 17; N. Y. Bull. 2; Prace mat. fis. 6).

die auftretenden Parameter als *stetig veränderlich*[3]) behandelt werden; indem ihm aus seinen früheren Untersuchungen nicht nur zahlreiche Beispiele solcher Gruppen geläufig, sondern auch in den Begriffen der *infinitesimalen Transformation* und der *Funktionengruppe*, sowie in den *Klammerausdrücken* die hauptsächlichsten Werkzeuge zu ihrer Bearbeitung bereits zur Hand waren[4]). Als wesentlichstes Resultat seiner Untersuchungen ergab sich die Erkenntnis, dass von solchen Gruppen in gewissem Sinne nur eine *endliche Anzahl wesentlich verschiedener* existiert.

2. Definitionen. Es sei ein System von n Funktionen[5]) der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der r Parameter $a_1, a_2, \ldots, a_r$:

3) Bei den *endlichen diskreten* Gruppen von I A 6 werden den Parametern nur eine *endliche Anzahl*, bei den *unendlichen diskreten* Gruppen von II B 6c nur eine *abzählbare Menge* verschiedener Werte beigelegt. — Ausserdem ist noch der Fall möglich — aber noch nicht untersucht — dass eine Gruppe auch bei Beschränkung der Parameter auf einen gewissen Bereich zustande kommt; ein Beispiel *Lie-Engel* 1, p. 163.

4) *Lie*'s Untersuchungen bezogen sich zunächst auf *einzelne* (geometrische) *Transformationen* der verschiedensten Art, unter denen bald die *Berührungstransformationen* (Gött. Nachr. 1871, p. 201) hervortreten. Die gruppentheoretischen Begriffe erscheinen zuerst in der gemeinsamen Arbeit von *F. Klein* und *S. Lie* [Math. Ann. 4 (1871), insbes. p. 53 ff.; vgl. auch Par. C. R. 70 (1870), p. 1222, 1275]; statt des *Wortes* Gruppe wird dort „geschlossenes System" gebraucht. Zwar ist zunächst nur von Gruppen die Rede, deren sämtliche Transformationen untereinander vertauschbar sind; doch wird p. 56 ausdrücklich gesagt, dass das nicht wesentlich ist. Von den allgemeinen Begriffen und Sätzen seiner Theorie gab *Lie* [abgesehen von den Andeutungen Christ. Forh. 1871, p. 243 und Math. Ann. 5 (1872), p. 254] die erste Skizze Gött. Nachr. 1874, p. 529. In den ersten Bänden des Norw. Arch. 1876 ff. folgt dann die zusammenhängende Darstellung mit Beweisen. 1879 waren die Methoden soweit ausgebildet, dass *Lie* ihre Tragweite an dem Problem der Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Kurven (Progr. Christiania) erproben konnte. — Über die Entwicklung von *Lie*'s Ideen vgl. man seine eigenen Angaben Math. Ann. 16 (1880) p. 525; 24 (1884), p. 538, 540, 547; *Lie-Engel* 1, p. 4; 3, p. XV, 665; Leipz. Abh. 21 (1895), p. 45; Leipz. Ber. 1895, p. 56, 262; 1896, p. 131. Dazu *F. Klein*, The Evanston Colloquium, N. Y. and Lond. 1894, confer. II u. III, sowie *M. Noether*, Math. Ann. 53 (1900), p. 1. Für Einsicht in die Korrekturbogen dieses letzteren Nekrologs sind wir dem Verfasser zu besonderem Dank verpflichtet.

5) *Lie* hatte ursprünglich die Frage nach der Natur der auftretenden Funktionen ganz bei Seite gelassen, dann unter dem Einfluss von *Fr. Engel* sich auf *reguläre Elemente analytischer Funktionen* beschränkt. Doch giebt er bereits Leipz. Ber. 1888 p. 17 an, dass der grösste Teil der Sätze gilt, wenn man nur gewisse Stetigkeitsforderungen [etwa solche wie II A 4a, Nr. 4] stellt, insbesondere dass jede transitive Gruppe (Nr. 11) mit einer analytischen ähnlich ist;

$$(1) \qquad f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben, das folgenden Bedingungen genügt:

A) die f_ν seien als Funktionen der x betrachtet von einander unabhängig;

B) sie genügen nicht einer Relation der Form:

$$(2) \quad A_1 \frac{\partial f_\nu}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial f_\nu}{\partial a_2} + \cdots + A_r \frac{\partial f_\nu}{\partial a_r} \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

in der $A_1, A_2, \ldots, A_r$ Funktionen der Parameter a bedeuten[6]).

Einem bestimmten Wertsystem der Parameter entspricht dann eine *Transformation:*

$$(3) \qquad x'_\nu = f_\nu(x \,|\, a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und der r-fach unendlichen Mannigfaltigkeit der Parameterwerte eine *r-fach unendliche Schar von Transformationen.* Wir nehmen weiter an, dass für diese Schar das *Associationsgesetz* (I A 1, Nr. 2) gilt, d. h.:

C) aus den Gleichungssystemen (3) und:

$$(4) \qquad x''_\nu = f_\nu(x' \,|\, b) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ergeben sich die Gleichungssysteme:

$$(5) \quad x''_\nu = f_\nu(x \,|\, c); \quad c_\varrho = \varphi_\varrho(a \,|\, b) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

in denen, wie durch die Bezeichnung angedeutet ist, die r Funktionen φ nur von den beiden Parametersystemen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ und $b_1, b_2, \ldots, b_r$ abhängen.

Endlich nehmen wir an, dass die Transformationenschar die *identische Transformation*[7]) enthalte, d. h.:

Beweise bei *Fr. Schur*, Math. Ann. 41 (1892), p. 509 und *Lie-Engel* 3, p. 365. — Wie die Sätze zu modifizieren sind, wenn man sie für den Gesamtverlauf analytischer Funktionen aussprechen will, darüber sind wohl nur die Fussn. (17) und (28) zu erwähnenden Sätze bekannt.

6) Andernfalls könnten die f_ν als Funktionen von weniger als r Parametern dargestellt werden.

7) *Lie* hatte ursprünglich [Gött. Nachr. 1874, p. 531; Norw. Arch. 1 (1876), p. 19] *beweisen* zu können geglaubt, dass jede kontinuierliche Gruppe die identische Transformation enthalte. Später erkannte er, dass sein Beweis implicite Voraussetzungen über die Natur der auftretenden Funktionen enthielt und dass es möglich ist, dass die identische Transformation auf der Grenze (*Engel* bei *Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 15) oder ausserhalb (*Engel* bei *Lie-E.* 1, p. 163) des Definitionsbereichs dieser Funktionen liegt. Daher nahm *Lie* die Forderung des Vorkommens der identischen Transformation, bezw. der inversen zu jeder auftretenden Transformation mit in die *Definition* auf [Math. Ann. 16 (1880), p. 445]. Übrigens lässt sich jede kontinuierliche Gruppe durch Einführung neuer Parameter und analytische Fortsetzung so umformen, dass die identische

D) für ein bestimmtes Wertsystem der Parameter — „die Anfangswerte“: $a_1 = a_1^0$, $a_2 = a_2^0$, ..., $a_r = a_r^0$ sei:

$$x_\nu' = f_\nu(x \mid a^0) \equiv x_\nu. \tag{6}$$

Es ist dann:

$$\varphi_\varrho(a_1, a_2, \ldots, a_r \mid a_1^0, a_2^0, \ldots, a_r^0) \equiv a_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r), \tag{7}$$

also[8]):

$$\frac{\partial \varphi_\varrho(a \mid a^0)}{\partial a_\sigma} = \varepsilon_{\varrho\sigma}. \tag{8}$$

Hieraus folgt, dass die Funktionaldeterminante (II A 1, Nr. **41**):

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_r)} \tag{9}$$

nicht identisch Null ist; dasselbe gilt für die Funktionaldeterminante:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{D(b_1, b_2, \ldots, b_r)}. \tag{10}$$

Aus D) ergiebt sich ferner, dass die zu (3) *inverse* Transformation $x_\nu = f_\nu(x' \mid \bar{a})$ ebenfalls der Schar angehört; die zugehörigen Parameter $\bar{a}$ sind durch die r Gleichungen bestimmt:

$$\varphi_\varrho(a_1, a_2, \ldots, a_r \mid \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r) = a_\varrho^0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Wenn die Bedingungen A)—D) *erfüllt sind, definieren die Gleichungen* (3) *eine endliche*[9]) *kontinuierliche Transformationsgruppe G;* sie wird nach der Zahl der verfügbaren Parameter als *r-gliedrige Gruppe*[10]) oder als *Gruppe der Ordnung r* bezeichnet.

3. Die grundlegenden Differentialgleichungen. Da nach Voraussetzung A) die Funktionaldeterminante:

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{12}$$

nicht Null ist, so kann man Funktionen $M_{\varrho\lambda}$ so bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt sind:

Transformation in sie einbezogen wird (*Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 15; *Lie-Engel*, 1, p. 160; 3, p. 574; *Lie*, Leipz. Ber. 1891, p. 319; *Fr. Schur*, Math. Ann. 15 (1889), p. 197 [Dorpater Festschrift]). Vgl. aber Fussn. 3.

8) Das Symbol $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ hat den Wert 1 oder 0, je nachdem ϱ und σ gleich oder ungleich sind.

9) *Endlich* mit Rücksicht auf die endliche Anzahl willkürlicher Parameter; die Anzahl der Transformationen selbst ist unendlich.

10) *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 154.

$$\frac{\partial f_\nu(x\,|\,a)}{\partial a_\varrho} + \sum_{\lambda=1}^{n} M_{\varrho\lambda}(x\,|\,a)\frac{\partial f_\nu(x\,|\,a)}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{13}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Betrachten wir in den Gleichungen (5) die x, a und b als unabhängig variabel, die x', x'' und c als Functionen von ihnen, so ergiebt sich einerseits:

$$\frac{\partial x_\nu''}{\partial a_\varrho} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu''}{\partial x_\mu'}\frac{\partial x_\mu'}{\partial a_\varrho} = -\sum_{\lambda=1}^{n} M_{\varrho\lambda}(x\,|\,a)\frac{\partial x_\nu''}{\partial x_\lambda}; \tag{14}$$

andererseits:

$$\frac{\partial x_\nu''}{\partial a_\varrho} = \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial x_\nu''}{\partial c_\sigma}\frac{\partial c_\sigma}{\partial a_\varrho} = -\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{n} M_{\sigma\lambda}(x\,|\,c)\frac{\partial x_\nu''}{\partial x_\lambda}\frac{\partial c_\sigma}{\partial a_\varrho}, \tag{15}$$

und hieraus folgt:

$$M_{\varrho\lambda}(x\,|\,a) = \sum_{\sigma=1}^{r} M_{\sigma\lambda}(x\,|\,c)\frac{\partial c_\sigma}{\partial a_\varrho}. \tag{16}$$

Ersetzt man die Parameter a durch ihre Anfangswerte a^0, so wird $c_1 = b_1, \ldots c_r = b_r$. Die Werte, welche die $M_{\sigma\lambda}(x\,|\,a)$ und die $\partial c_\sigma/\partial a_\varrho$ infolge dieser Substitution erhalten, werden mit $\xi_{\sigma\lambda}(x)$, bezw. $\alpha_{\varrho\sigma}(b)$ bezeichnet; die ersteren hängen nur von den x, die letzteren nur von den b ab. Aus (16) wird dabei:

$$\xi_{\varrho\lambda}(x) = \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\varrho\sigma}(b)\, M_{\sigma\lambda}(x\,|\,b) \tag{17}$$

und an Stelle der Gleichungen (13) treten die Gleichungen:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\varrho\sigma}(a)\frac{\partial f_\nu(x\,|\,a)}{\partial a_\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{n} \xi_{\varrho\lambda}(x)\frac{\partial f_\nu(x\,|\,a)}{\partial x_\lambda} = 0. \tag{18}$$

Die $\xi_{\varrho\lambda}$ genügen (wegen B) keinem Relationsystem der Form:

$$e_1\xi_{1\lambda} + e_2\xi_{2\lambda} + \cdots + e_r\xi_{r\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

mit von den x und dem Index λ unabhängigen Koeffizienten; und die Determinante der Funktionen $\alpha_{\varrho\sigma}(a)$ ist wegen D) nicht Null[11]).

Durch die Differentialgleichungen (18) und die Anfangsbedingungen (6) sind die Funktionen f_ν vollkommen bestimmt (II A 5, Nr. 1). Diese Differentialgleichungen sind für die Gruppe *charakteristisch*; ein derartiges System von Differentialgleichungen definiert

11) *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 50 für $n = 1$, $r = 3$; p. 162 allgemein. Eine „synthetische" Ableitung dieser Resultate bei *Lie-Engel* 3, p. 549 und *Lie-Scheffers* p. 377.

— sofern es *vollständig* (II A 5, Nr. **13**) ist — *immer* eine r-gliedrige Transformationsgruppe[12]).

Aus den Gleichungen (16) und (17) folgt noch:

$$\alpha_{\varrho\,\sigma}(c) = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial c_\sigma}{\partial a_\tau}\, \alpha_{\varrho\,\tau}(a) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots r); \tag{20}$$

durch diese Gleichungen und die Anfangsbedingungen:

$$c_1 = b_1,\ c_2 = b_2, \ldots, c_r = b_r \quad \text{für} \quad a_1 = a_1^0,\ a_2 = a_2^0, \ldots, a_r = a_r^0$$

sind die Funktionen $c_\varrho = \varphi_\varrho(a, b)$ vollkommen bestimmt.

4. Umformung der Differentialgleichungen. Infinitesimale Transformationen. Durch Auflösung der Gleichungen (18) nach den $\partial f_\nu / \partial a_\varrho$ ergebe sich:

$$\frac{\partial f_\nu(x \mid a)}{\partial a_\varrho} = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{n} \vartheta_{\sigma\varrho}(a)\, \xi_{\sigma\lambda}(x)\, \frac{\partial f_\nu(x \mid a)}{\partial x_\lambda}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen (3):

$$dx'_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f_\nu(x \mid a)}{\partial x_\lambda} \Big[dx_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{\sigma\varrho}(a)\, \xi_{\sigma\lambda}(x)\, da_\varrho \Big];$$

betrachtet man also die x' als konstant, die x als Funktionen der a, so folgt:

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial a_\varrho} = -\sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{\sigma\varrho}(a) \xi_{\sigma\lambda}(x).$$

Andererseits enthält die Gruppe die zur Transformation (3) inverse $x_\nu = f_\nu(x' \mid \bar{a})$; es ist also auch:

$$\frac{\partial x'_\lambda}{\partial \bar{a}_\varrho} = -\sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{\sigma\varrho}(\bar{a})\, \xi_{\sigma\lambda}(x');$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\partial x'_\lambda}{\partial a_\tau} = \sum_{\sigma=1}^{r} \psi_{\sigma\tau}(a)\, \xi_{\sigma\lambda}(x'), \tag{21}$$

wenn nämlich:

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \vartheta_{\sigma\varrho}(\bar{a})\, \frac{\partial \bar{a}_\varrho}{\partial a_\tau} = -\psi_{\sigma\tau}(a) \tag{22}$$

gesetzt wird[13]).

12) Diese „*Umkehrung des ersten Fundamentalsatzes*“ ist von *Lie* zunächst nur implicite gegeben, *Lie-Engel* 1, p. 153; dann explicite von *Fr. Schur*, Math. Ann. 35 (1889), p. 169; einfacher ib. 38 (1891), p. 265. *Lie*'s eigener Beweis bei *Lie-Engel* 3, p. 558 und *Lie-Scheffers* p. 372.

13) Die Form (21) der Differentialgleichungen wird von *Lie* vorzugsweise

Da für die Anfangswerte der Parameter:

$$\alpha_{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\varrho\sigma}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f_\nu}{\partial a_\varrho} = -\xi_{\varrho\,\nu}(x)$$

gebraucht (explicite wohl zuerst Christ. Forh. 1884, Nr. 15; ihre Auflösung nach den ξ Norw. Arch. 1 (1876), p. 162. — Die ξ sind Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen („*Definitionsgleichungen der Gruppe*"); *Lie*, Norw. Arch. 8 (1883), p. 384.

Die Theorie der binären Formen liefert zu den Entwicklungen des Textes das folgende einfache Beispiel: Die Binärform $F = \sum_{\nu=1}^{n} (n-1)_\nu x_\nu u^{n-\nu} v^{\nu-1}$ werde durch die Substitution (S): $u = a_{11}u' + a_{12}v'$, $v = a_{21}u' + a_{22}v'$ in $F' = \sum_{\nu=1}^{n} (n-1)_\nu x'_\nu u'^{n-\nu} v'^{\nu-1}$ transformiert. Der Gruppe der Substitutionen (S) entspricht eine ebenfalls 4-gliedrige Gruppe linearer Substitutionen, die den Zusammenhang zwischen den Koefficienten x und x' vermittelt (I B 2, Nr. **2, 18**). Dieselbe ist bestimmt durch jedes der beiden Systeme von Differentialgleichungen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 1)\ a_{11}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{11}} + a_{12}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{12}} = D_{11}(x'_\nu), & 2)\ a_{21}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{21}} + a_{22}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{22}} = D_{22}(x'_\nu), \\ 3)\ a_{21}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{11}} + a_{22}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{12}} = D_{12}(x'_\nu), & 4)\ a_{11}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{21}} + a_{12}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{22}} = D_{21}(x'_\nu). \end{cases}$$

[Hier haben die Symbole D_{ik} die von *S. Aronhold*, J. f. Math. 62 (1863) p. 288 festgesetzte Bedeutung]; bezw.:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} 1)\ a_{11}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{11}} + a_{21}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{21}} = (n-\nu)x'_\nu, & 2)\ a_{12}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{12}} + a_{22}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{22}} = (\nu-1)x'_\nu, \\ 3)\ a_{12}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{11}} + a_{22}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{21}} = (n-\nu)x'_{\nu+1}, & 4)\ a_{12}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{12}} + a_{22}\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_{22}} = (\nu-1)x'_{\nu-1}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (I) entsprechen den Gleichungen (18), die Gleichungen (II) den Gleichungen (21) des Textes.

Durch die Substitution (S_1): $u' = b_{11}u'' + b_{12}v''$, $v' = b_{21}u'' + b_{22}v''$ gehe F' in F''' über; durch die aus S und S_1 zusammengesetzte Substitution (S_2): $u = c_{11}u'' + c_{12}v''$, $v = c_{21}u'' + c_{22}v''$ wird F direkt in F''' transformiert. Die Substitutionskoeffizienten c genügen den folgenden 16 Differentialgleichungen, die den Gleichungen (20) des Textes entsprechen:

$$a_{11}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{11}} + a_{12}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{12}} = \varepsilon_{\lambda 1}(\varepsilon_{\mu 1}c_{11} + \varepsilon_{\mu 2}c_{12}),$$

$$a_{21}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{11}} + a_{22}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{12}} = \varepsilon_{\lambda 1}(\varepsilon_{\mu 1}c_{21} + \varepsilon_{\mu 2}c_{22}),$$

$$a_{11}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{21}} + a_{12}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{22}} = \varepsilon_{\lambda 2}(\varepsilon_{\mu 1}c_{11} + \varepsilon_{\mu 2}c_{22}),$$

$$a_{21}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{21}} + a_{22}\frac{\partial c_{\lambda\mu}}{\partial a_{22}} = \varepsilon_{\lambda 2}(\varepsilon_{\mu 1}c_{21} + \varepsilon_{\mu 2}c_{22}).$$

(Das Symbol $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ ist Fussn. 8 erklärt.)

ist, so ist für Werte der Parameter, die von den Anfangswerten unendlich wenig verschieden sind, in erster Annäherung:

$$x'_\nu = f_\nu = x_\nu - \sum_{\varrho=1}^{r} (a_\varrho - a_\varrho^0)\,\xi_{\varrho\nu}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man hier $(a_\varrho - a_\varrho^0) = -\,e_\varrho\,\delta t$ und betrachtet die e als konstant, δt als variabel, so erhält man die *infinitesimale Transformation*[14]):

$$x'_\nu = f_\nu = x_\nu + \delta t \sum_{\varrho=1}^{r} e_\varrho\,\xi_{\varrho\nu}(x). \tag{23}$$

Für eine beliebige Funktion $F(x)$ von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergiebt sich dann:

$$F(x') - F(x) = \delta F(x) = \delta t \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n} e_\varrho\,\xi_{\varrho\nu}(x)\,\frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu},$$

oder, wenn zur Abkürzung:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\varrho\nu}(x)\,\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = X_\varrho(F)$$

gesetzt wird:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = e_1 X_1(F) + e_2 X_2(F) + \cdots + e_r X_r(F). \tag{24}$$

Den rechts stehenden Ausdruck gebraucht *Lie* als Symbol für die infinitesimale Transformation (23)[15]). Indem man sie unendlich oft wiederholt[16]), erhält man endliche Transformationen der Gruppe[17]); und wenn man zwei Gruppen als nicht verschieden ansieht, falls die eine durch Einführung neuer Parameter in die andere übergeführt werden kann, so ist die Gruppe durch die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_1(F),\ X_2(F),\ \ldots,\ X_r(F) \tag{25}$$

vollkommen bestimmt. *Lie* sagt deshalb: *die Gruppe wird von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugt.*

14) Die infinitesimalen Transformationen und die Erzeugung der endlichen Transformationen der Gruppe durch ihre unendlichmalige Wiederholung gehören zu *Lie*'s ursprünglichem Ideenschatz [Par. C. R. 70 (1870), p. 1222; Math. Ann. 4 (1871), p. 56; Christ. Forh. 1871, p. 193].

15) Christ. Forh. 4 (1874), p. 258.

16) Zu arithmetisch exakter Fassung dieser Vorstellung bedarf es nur der Sätze von II A 4 a, Nr. **3**. Vgl. auch Nr. **18**.

17) Man erhält so *alle* innerhalb eines Funktionenelementes gelegenen Transformationen der Gruppe [*Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 171]. Über Modifikationen dieses Satzes bei Aufgebung der Beschränkung auf ein Funktionen-

5. Integrabilitätsbedingungen. Zusammensetzung. Die Differentialgleichungen (18) bilden ein „vollständiges System“ (II A 5, Nr. **13**); es müssen daher Gleichungen der Form bestehen[18]):

$$(26)\quad \sum_{\tau=1}^{r}\left(\alpha_{\varrho\tau}\frac{\partial \alpha_{\sigma\varkappa}}{\partial a_\tau}-\alpha_{\sigma\tau}\frac{\partial \alpha_{\varrho\varkappa}}{\partial a_\tau}\right)=\sum_{\tau=1}^{r} c_{\varrho\sigma\tau}\alpha_{\tau\varkappa}\quad(\varrho,\sigma,\varkappa=1,2,\ldots,r).$$

$$(27)\quad \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\xi_{\varrho\lambda}\frac{\partial \xi_{\sigma\nu}}{\partial x_\lambda}-\xi_{\sigma\lambda}\frac{\partial \xi_{\varrho\nu}}{\partial x_\lambda}\right)=\sum_{\tau=1}^{r} c_{\varrho\sigma\tau}\xi_{\tau\nu}\qquad(\nu=1,2,\ldots,n).$$

Die Gleichungen (27) kann man auch in der symbolischen Form schreiben:

$$(X_\varrho X_\sigma)\equiv X_\varrho X_\sigma(f)-X_\sigma X_\varrho(f)=\sum_{\tau=1}^{r} c_{\varrho\sigma\tau}X_\tau(f).$$

Aus den Zusätzen zu (18) ergiebt sich, dass die $c_{\varrho\sigma\tau}$ weder von den x, noch von den a abhängen, also reine Konstante sind. Sie genügen den Gleichungen:

$$(28)\qquad c_{\varrho\sigma\tau}=-c_{\sigma\varrho\tau};$$

$$(29)\quad \sum_{\mu=1}^{r}(c_{\varrho\sigma\mu}c_{\mu\tau\varkappa}+c_{\sigma\tau\mu}c_{\mu\varrho\varkappa}+c_{\tau\varrho\mu}c_{\mu\sigma\varkappa})=0\quad(\varrho,\sigma,\tau,\varkappa=1,2,\ldots,r).$$

Die Gleichungen (29) ergeben sich aus der *„Jacobi'schen Identität“*[19]):

$$(30)\qquad ((X_\varrho X_\sigma)X_\tau)+((X_\sigma X_\tau)X_\varrho)+((X_\tau X_\varrho)X_\sigma)\equiv 0.$$

---

element vgl. man *Fr. Engel*, Leipz. Ber. 1892, p. 279; *E. Study*, ib. 1893, p. 659; *L. Maurer*, ib. 1894, p. 215; *H. Taber*, N. Y. Bull. (2) 2 (1896), p. 336.

18) Für $r=2$, $n=1$ *S. Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 36; allgemein Math. Ann. 16 (1880), p. 461. — Die Klammerausdrücke waren *Lie* aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen (II A 5, Nr. **8**, **13**) geläufig; dann erscheinen bei ihm die Gleichungen (27) als Ausdruck dafür, dass die infinitesimale Transformation $S^{-1}T^{-1}ST$ der Gruppe angehört [Norw. Arch. 1 (1876), p. 193]. Dieser Beweis wird Math. Ann. 24 (1884) p. 556 vereinfacht und 1872 als Zeitpunkt seiner Entdeckung angegeben; die seiner exakten Durchführung zunächst entgegenstehenden Schwierigkeiten werden Leipz. Ber. 1891, p. 321 [von *Engel* redigiert] durch Unterscheidung der Begriffe: *„unendlich kleine“* und *„infinitesimale“* Transformation beseitigt. — Anderer Beweis *Lie*, Leipz. Ber. 1890, p. 460.

Die Umkehrung dieses „zweiten Fundamentalsatzes“ für $n=2$ *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 41; für jedes n ib. p. 172 noch unter zwei Einschränkungen, die erst 3 (1878), p. 94 beseitigt werden. Vgl. *Lie-Engel* 3, p. 659. Ein anderer Beweis Leipz. Ber. 1890, p. 463; *Lie-Engel* 1, p. 156 und 3, p. 583; *Lie-Scheffers* 3, p. 386; in synthetischer Form Leipz. Ber. 1890, p. 472 (*Lie-E.* 3, p. 591; *Lie-Sch.* 3, p. 391). Bei *Fr. Schur*, Math. Ann. 33 (1888), p. 54 ergiebt sich die Umkehrung aus der Eigenschaft der Gleichungen (27), dass sie die Integrabilitätsbedingungen sind.

19) *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 52; ein einfacher Beweis von *Engel* bei

Die Konstanten $c_{\varrho\sigma\tau}$ bestimmen die „*Zusammensetzung*“ der Gruppe; sie sind jedoch nicht vollkommen bestimmt, wenn die Gruppe gegeben ist. Ersetzt man nämlich die Differentialgleichungen (18) durch r lineare Kombinationen derselben (I B 2, Nr. 27), so tritt an Stelle des Systems der Konstanten $c_{\varrho\sigma\tau}$ ein äquivalentes Konstantensystem. *Jedem* System von Konstanten $c_{\varrho\sigma\tau}$, das den Gleichungen (28) und (29) genügt, entsprechen unendlich viele r-gliedrige Transformationsgruppen[20]).

6. Untergruppen. Heben wir aus den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, die der vorgelegten r-gliedrigen Gruppe G angehören, q von einander unabhängige heraus:

$$(31)\quad Z_\varkappa(f) = e_{\varkappa 1} X_1(f) + e_{\varkappa 2} X_2(f) + \cdots + e_{\varkappa r} X_r(f) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

und nehmen wir an, dass sie Relationen von der Form genügen:

$$(32)\qquad (Z_\varkappa Z_\lambda) = \sum_{\mu=1}^{q} \gamma_{\varkappa\lambda\mu} Z_\mu(f), \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q),$$

wo die $\gamma_{\varkappa\lambda\mu}$ Konstante bedeuten. Dann erzeugen diese q infinitesimalen Transformationen eine q-gliedrige Gruppe G_1, die als *Untergruppe* der Gruppe G zu bezeichnen ist[21]).

G_1 ist „*invariante Untergruppe*“[22]) von G, wenn Relationen der Form bestehen:

Lie-E. 1, p. 95. Über die gruppentheoretische Bedeutung der Identität vgl. *Engel*, Leipz. Ber. 1887, p. 89. — Die Gleichungen (29) geben die vollständigen Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (27): *Fr. Schur*, Math. Ann. 35 (1889), p. 174.

20) *Lie*'s ursprünglicher Beweis für diese „Umkehrung des dritten Fundamentalsatzes“ [Norw. Arch. 1 (1876) p. 192; Math. Ann. 16 (1880), p. 495; 25 (1885), p. 94] besteht in der Bildung der adjungierten Gruppe (Nr. 15), gilt also nur für den Fall, dass diese wirklich r-gliedrig ist (*Lie-E.* 3, p. 598). Ein zweiter Beweis bildet eine *Berührungs*transformationsgruppe der gegebenen Zusammensetzung (Christ. Forh. 1888, Nr. 13; ohne Benutzung der betreffenden Terminologie dargestellt bei *Lie-E.* 3, p. 509 und *Lie-Sch.* 3, p. 396). — Über *Schur*'s Beweis vgl. Fussn. 19 und 76.

21) Die in einer Gruppe enthaltenen Untergruppen sind durch die Konstanten der Zusamensetzung vollkommen bestimmt; ihre Aufsuchung ist ein *algebraisches* Problem [*Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 178]. — Dass für $q \leq 4$ jede mehr als q-gliedrige Gruppe q-gliedrige Untergruppen besitzt, beweisen *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 171 für $q = 1$, p. 192 für $q = 2$; *Lie-Engel* 1, p. 591 für $q = 3$; *Fr. Engel*, Leipz. Ber. 1886, p. 92 für $q = 4$.

22) *Lie*, Norw. Arch. 3 (1878), p. 104; der *Name* „invariante Untergruppe“ ib. p. 457*. Vgl. Math. Ann. 25 (1885), p. 77. Wegen der Unterscheidung von „*invariant*“ und „*ausgezeichnet*“ vgl. man Fussn. 54.

$$(33)\quad (X_\varrho Z_\varkappa) = \sum_{\mu=1}^{q} \delta_{\varrho\varkappa\mu} Z_\mu(f) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, q).$$

Diese Bezeichnung ist mit der in der Theorie der diskreten Gruppen üblichen (1 A 6, Nr. **16**) in vollkommenem Einklang.

Die infinitesimalen Transformationen $(X_\varrho X_\sigma)$ erzeugen[23]) eine invariante Untergruppe der Gruppe G, die als *„Hauptuntergruppe“*[24]) oder *„Derivierte“*[25]) bezeichnet wird. Diese Gruppe kann übrigens auch mit G selbst zusammenfallen.

Wenn die p infinitesimalen Transformationen

$$(34)\quad Y_\mu(f) = \sum_{\varrho=1}^{r} c'_{\mu\varrho} X_\varrho(f)$$

ebenfalls eine Untergruppe G_2 von G erzeugen und wenn dabei die Relationen bestehen:

$$(35)\quad (Y_\mu Z_\varkappa) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, q),$$

dann ist jede Transformation T von G_1 mit jeder Transformation U von G_2 *vertauschbar*[26]); symbolisch ausgedrückt $TU = UT$ (I A 6, Nr. **1**). In diesem Fall heissen die Untergruppen G_1 und G_2 vertauschbar, und diese Bezeichnung wird auch auf die erzeugenden infinitesimalen Transformationen übertragen: $Y_\mu(f)$ heisst vertauschbar mit $Z_\varkappa(f)$[27]).

7. Isomorphismus. Zwei r-gliedrige Gruppen, die gleichen oder äquivalenten Systemen von Konstanten der Zusammensetzung entsprechen, heissen *„gleichzusammengesetzt“*[28]) oder *„holoedrisch isomorph“* (1 A 6, Nr. **14**).

Eine Gruppe Γ, die von $q < r$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, ... $Y_q(f)$ erzeugt ist, heisst zu G *meriedrisch isomorph*[29]), wenn r in Γ enthaltene infini-

23) *Lie*, Norw. Arch. 8 (1883), p. 390. — Übertragung auf diskrete Gruppen: *W. Ahrens*, Leipz. Ber. 1897, p. 621.

24) *W. Killing*, Math. Ann. 31 (1887), p. 252.

25) *Lie*, Leipz. Ber. 1888, p. 19.

26) *Lie*, Norw. Arch. 3 (1878), p. 102; 7 (1882), p. 180; Math. Ann. 24 (1884), p. 557.

27) So schon Christ. Forh. 1872, p. 25.

28) *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 185. — Beschränkt man sich nicht auf Funktionenelemente, so muss man zwischen „gleichzusammengesetzt“ und „holoedrisch isomorph“ unterscheiden (*Fr. Engel*, Leipz. Ber. 1893, p. 695).

29) *Lie-Engel* 1, p. 293. — Die Übereinstimmung dieser Definitionen mit den in der Theorie der diskreten Gruppen üblichen folgt aus den von *Lie*,

tesimale Transformationen $Z_1(f), Z_2(f), \ldots Z_r(f)$ — die natürlich nicht alle von einander unabhängig sein können — den Gleichungen genügen:

$$(36) \qquad (Z_\varrho Z_\sigma) = \sum_{\tau=1}^{r} c_{\varrho\sigma\tau} Z_\tau(f).$$

In diesem Fall muss G eine invariante Untergruppe der Ordnung $r-q$ enthalten, der in der Gruppe Γ die identische Transformation entspricht.

8. Ähnlichkeit. Die r-gliedrige Gruppe G (3) wird durch die Substitution:

$$(37) \quad z_\nu = F_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ z'_\nu = F_\nu(x'_1, x'_2, \ldots, x'_\nu), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in die *„ähnliche"* r-gliedrige Gruppe H:

$$(38) \qquad z'_\nu = g_\nu(z \mid a)$$

transformiert[30]). Den r infinitesimalen Transformationen (25), die die Gruppe G erzeugen, entsprechen die r infinitesimalen Transformationen:

$$(39) \qquad Z_\varrho(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\varrho\nu}(z) \frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

die die Gruppe H erzeugen; dabei ist:

$$(40) \qquad \xi_{\varrho\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_{\varrho\lambda}(x) \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\lambda}.$$

Die Gruppen G und H sind gleichzusammengesetzt.

Wenn im Falle $n \geqq r$ die Matrix

$$(41) \qquad \| \xi_{\varrho 1}, \xi_{\varrho 2}, \ldots, \xi_{\varrho n} \| \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

vom Range r (I B 1 b, Nr. **12**) ist, so ist auch die Matrix:

$$(42) \qquad \| \xi_{\varrho 1}, \xi_{\varrho 2}, \ldots, \xi_{\varrho n} \| \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

von demselben Range. Ist diese Bedingung für zwei gleichzusammengesetzte Gruppen erfüllt, so sind sie einander ähnlich.

Ist die Matrix (41) vom Range $k < r$, so ist nicht nur auch die Matrix (42) vom Range k, sondern auch die Matrix

---

Norw. Arch. 3 (1878), p. 104 gegebenen Sätzen; explicite ausgesprochen ist sie Math. Ann. 25 (1885), p. 77. Beweise bei *Lie-Engel* 1, p. 418; 3, p. 661.

30) *Lie*, Gött. Nachr. 1874, p. 530. — Kriterien für die Ähnlichkeit zweier Gruppen vermöge einer *Berührungs*transformation: *Lie*, Norw. Arch. 1 (876), p. 145. Welche Bedingungen, diese Art von Ähnlichkeit vorausgesetzt, dann noch hinzukommen müssen, damit Ähnlichkeit vermöge einer Punkttransformation stattfindet, giebt *Lie*, Norw. Arch. 3 (1878), p. 125 an.

(43) $\| \xi_{\varrho 1}, \xi_{\varrho 2}, \ldots, \xi_{\varrho n};\ \zeta_{\varrho 1}, \zeta_{\varrho 2}, \ldots, \zeta_{\varrho n} \| \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$

für alle den Gleichungen (37) genügenden Werte der Variabeln x und z. In diesem Fall kann aus der gleichen Zusammensetzung der Gruppen G und H nur dann auf ihre Ähnlichkeit geschlossen werden, wenn man dem Gleichungssystem, das diesen Rang der Matrix (43) liefert, genügen kann, ohne dass Relationen zwischen den x allein oder zwischen den z allein auftreten[31]).

9. Transformation einer Gruppe in sich. Die Gruppe H fällt mit der Gruppe G zusammen — die Substitution (37) transformiert also die Gruppe G in sich selbst — wenn für die Funktionen ξ Gleichungen der Form gelten:

$$(44) \qquad \xi_{\varrho\nu}(z) = \sum_{\sigma=1}^{r} k_{\varrho\sigma} \xi_{\sigma\nu}(z) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

in der die $k_{\varrho\sigma}$ Konstante bedeuten. Ist insbesondere:

$$(45) \qquad \xi_{\varrho\nu}(z) = \xi_{\varrho\nu}(z),$$

so wird durch die Substitution (37) jede Transformation von G nicht nur wieder in eine Transformation von G, sondern in sich selbst übergeführt. In diesem Fall wird die Transformation (37) als *mit der Gruppe G vertauschbar* bezeichnet[32]).

An Stelle der einzelnen transformierenden Substitution (37) lassen wir nun die allgemeine Substitution:

$$(46) \qquad z_\nu = F_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, b_1, b_2, \ldots, b_q) = F_\nu(x \,|\, b) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

einer Gruppe Γ treten; Γ sei erzeugt von den q infinitesimalen Transformationen:

$$(47) \qquad Y_\varkappa(f) = \sum_{\nu=1}^{n} y_{\varkappa\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q).$$

Die allgemeine Substitution (46) der Gruppe Γ transformiert die Gruppe G dann und nur dann in sich selbst, wenn die aus (40) und (44) folgenden Gleichungen:

$$(48) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_{\varrho\lambda}(x) \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\lambda} = \sum_{\sigma=1}^{r} k_{\varrho\sigma} \xi_{\sigma\nu}(z) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 1, 2, \ldots, \nu),$$

in denen die Grössen $k_{\varrho\sigma}$ Funktionen der Parameter b bedeuten, für beliebige Werte dieser Parameter erfüllt sind. Indem man diese Glei-

31) *Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 8; Math. Ann. 25 (1885), p. 96.

32) Abweichend von der in der Theorie der diskreten Gruppen zuweilen gebrauchten Ausdrucksweise, nach der eine Operation S schon dann mit einer Gruppe G vertauschbar heisst, wenn sie diese Gruppe in sich transformiert.

chungen nach den b differenziert und die Differentialgleichungen der Gruppe (Nr. 3) berücksichtigt, erkennt man, dass sie gleichbedeutend sind mit einem System der Form:

$$(49)\quad (Y_\varkappa X_\varrho) = \sum_{\tau=1}^{r} \gamma_{\varkappa\varrho\tau} X_\tau(f) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

in der die $\gamma_{\varkappa\varrho\tau}$ Konstante bedeuten[33]).

Die allgemeine Substitution von Γ transformiert jede einzelne Substitution von G in sich selbst — *die beiden Gruppen sind vertauschbar* —, wenn ihre erzeugenden infinitesimalen Transformationen den Gleichungen genügen[34]):

$$(50)\qquad (Y_\varkappa X_\varrho) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, q;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

10. Reciproke Gruppen. Ein besonderes Interesse bietet der Fall, dass für die Gruppe G $n = r$ ist und überdies die Determinante:

$$(51)\qquad |\xi_{\varrho\nu}(x)| \qquad (\varrho, \nu = 1, 2, \ldots, r)$$

nicht identisch Null ist. Einer solchen Gruppe G entspricht eine vollständig bestimmte, ebenfalls r-gliedrige Gruppe Γ, die mit ihr vertauschbar ist. Man gelangt zu ihr durch folgende Überlegung[35]):

Die Differentialgleichungen:

$$(52)\quad \sum_{\nu=1}^{r} \xi_{\varrho\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{r} \xi_{\varrho\nu}(z_1, z_2, \ldots, z_r) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

sind von einander unabhängig und bilden ein vollständiges System. Bezeichnen wir mit $\Pi_1(x\,|\,z)$, $\Pi_2(x\,|\,z), \cdots, \Pi_r(x\,|\,z)$ r unter einander unabhängige Lösungen derselben, mit $b_1, b_2, \ldots, b_r$ verfügbare Parameter. Die Gleichungen:

$$(53)\qquad \Pi_\varrho(x\,|\,z) = b_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

definieren eine ∞^r-Schar von Substitutionen, die eine jede Transformation der Gruppe G in sich überführen; denn die Grössen z genügen als Funktionen der x den Gleichungen:

---

33) *Lie*, Norw. Arch. 3 (1878), p. 104.

34) *Lie* bezeichnet diesen Satz Math. Ann. 24 (1884), p. 557 als „seinen alten Satz". Explicite ausgesprochen ist er vorher nirgends; doch vgl. Norw. Arch. 3, p. 102.

35) *S. Lie*, Christ. Forh. 1882, Anhang p. 18; 1883, Nr. 10, p. 3; Math. Ann. 25 (1884), p. 407.

$$(54) \qquad \xi_{\varrho\nu}(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_{\varrho\lambda}(x) \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\lambda} \qquad (\varrho, \nu = 1, 2, \ldots, r).$$

Die Schar hat überdies Gruppencharakter. Da nämlich die $3r$ Funktionen $\Pi_\varrho(x\,|\,z)$, $\Pi_\varrho(z\,|\,y)$, $\Pi_\varrho(y\,|\,x)$ den r Differentialgleichungen:

$$(55) \quad \sum_{\varrho=1}^{r} \left[\xi_{\varrho\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \xi_{\varrho\nu}(y) \frac{\partial f}{\partial y_\nu} + \xi_{\varrho\nu}(z) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \right] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

genügen, so lassen sich die r Grössen $\Pi_\varrho(y\,|\,x)$ als Funktionen der $2r$ Grössen $\Pi_\varrho(x\,|\,z)$, $\Pi_\varrho(z\,|\,y)$ darstellen. Daher ergiebt sich aus den Gleichungssystemen:

$$(56) \qquad \Pi_\varrho(x\,|\,z) = b_\varrho, \quad \Pi_\varrho(z\,|\,y) = c_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

ein Gleichungssystem der Form:

$$(57) \qquad \Pi_\varrho(y\,|\,x) = \chi_\varrho(b\,|\,c),$$

w. z. b. w.

Denken wir uns die erzeugenden infinitesimalen Transformationen der Gruppen G und Γ:

$$X_\varrho(f) = \sum_{\nu=1}^{r} \xi_{\varrho\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \qquad Y_\varrho(f) = \sum_{\nu=1}^{r} \eta_{\varrho\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

so gewählt, dass für ein bestimmtes Wertsystem $(x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0 \cdots x_n = x_n^0)$: $\xi_{\varrho\nu}(x^0) = \varepsilon_{\varrho\nu}$ und $\eta_{\varrho\nu}(x^0) = \varepsilon_{\varrho\nu}$ für $\varrho, \nu = 1, 2, \ldots, r$ wird. Dann gelten für die Konstanten der Zusammensetzung der Gruppen G und Γ die Gleichungen:

$$(58) \qquad c_{\varrho\sigma\nu} = \frac{\partial \xi_{\sigma\nu}(x^0)}{\partial x_\varrho^0} - \frac{\partial \xi_{\varrho\nu}(x^0)}{\partial x_\sigma^0}, \qquad \gamma_{\varrho\sigma\nu} = \frac{\partial \eta_{\sigma\nu}(x^0)}{\partial x_\varrho^0} - \frac{\partial \eta_{\sigma\nu}(x^0)}{\partial x_\sigma^0}$$

$$(\varrho, \sigma, \nu = 1, 2, \ldots, r);$$

es ist ferner wegen $(X_\varrho Y_\sigma) = 0$:

$$\frac{\partial \eta_{\sigma\nu}(x^0)}{\partial x_\varrho^0} = \frac{\partial \xi_{\varrho\nu}(x^0)}{\partial x_\sigma^0}.$$

Also:

$$(59) \qquad c_{\varrho\sigma\nu} = -\gamma_{\varrho\sigma\nu}.$$

Die Gruppen G und Γ gehören somit zu äquivalenten Systemen von Konstanten der Zusammensetzung; sie sind also gleichzusammengesetzt, folglich auch ähnlich. *Lie* bezeichnet sie als *reciproke Gruppen*[36]).

11. Transitivität. Primitivität. Die Gruppe G ist *transitiv*[37]), wenn man die Gleichungen:

36) Der entsprechende Satz in der Theorie der diskreten Gruppen bezieht sich auf die „reguläre Form einer Gruppe“ (I A 6, Fussn. 75).

37) *S. Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 15; Norw. Arch. 10 (1885), p. 355. „Transitivität im Infinitesimalen“ schon ib. 4 (1879), p. 375.

$$(60) \qquad y_\nu = f_\nu(x \mid a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bei willkürlich gegebenen Werten von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch geeignete Verfügung über die Parameter $a_1, a_2, \ldots, a_r$ befriedigen kann. In diesem Falle giebt es keine Funktion, die den r Differentialgleichungen:

$$(61) \qquad X_\varrho(f) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\varrho\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

genügt.

Es kann der Fall eintreten, dass man durch geeignete Wahl der Parameter nicht nur den Gleichungen (60), sondern auch noch den $k - 1$ analogen Gleichungssystemen:

$$(62) \qquad y_\nu^{(\varkappa)} = f_\nu(x^{(\varkappa)} \mid a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1),$$

in denen die $x^{(\varkappa)}$ und die $y^{(\varkappa)}$ gegeben sind, genügen kann. *Lie* hat gezeigt, dass $k \leqq n + 2$ ist und dass für $k = n + 2$ die Gruppe G von der Ordnung $n(n + 2)$ und mit der projektiven Gruppe in n Variabeln (Nr. **20**) gleichzusammengesetzt ist[38]).

Halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Gruppe G transitiv sei und nehmen wir überdies an, die Funktionen:

$$\xi_{\varrho 1}(x), \ \xi_{\varrho 2}(x), \cdots, \xi_{\varrho m}(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

hängen nur von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ab; dann lassen die Gleichungen (2) erkennen, dass $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ von $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ unabhängig sind. Jede Substitution von G wird daher die durch die Gleichungen:

$$(63) \qquad x_\mu = \text{const.} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

charakterisierte Mannigfaltigkeit in eine den Gleichungen $x_\mu' = \text{const.}$ genügende Mannigfaltigkeit transformieren.

Die erzeugenden infinitesimalen Transformationen $X_\varrho(f)$ von G stehen zu dem System der Differentialgleichungen:

$$(64) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

in der Beziehung, dass die Grössen $X_\varrho(\Phi)$ diesen Gleichungen genügen, sobald die Funktion Φ selbst ihnen genügt. Transformiert man nun G in eine ähnliche Gruppe G', so treten an Stelle der r infinitesimalen Transformationen $X_\varrho(f)$ gewisse andere r infinitesimale Transformationen $X_\varrho'(f)$ und an Stelle des Systems (64) tritt ein System von $n - m$ linearen homogenen Differentialgleichungen:

38) *Lie-Engel* 1, p. 632; der Beweis richtig gestellt 3, p. 297. — Charakterisirung der Transitivität einer r-gliedrigen Gruppe durch r gebrochene Zahlen 3, p. 746.

(65) $$C_1(f) = 0, \quad C_2(f) = 0, \ldots, C_{n-m}(f) = 0.$$

Dabei sind wieder, wenn Φ ein Integral dieses Systems ist, auch die $X_\varrho'(\Phi)$ Integrale desselben. Diese Beziehung findet ihren Ausdruck in den Relationen:

(66) $$(C_\lambda X_\varrho') = \sum_{\mu=1}^{n-m} w_{\lambda\varrho\mu} C_\mu(f) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-m; \ \varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

in denen die $w_{\lambda\varrho\mu}$ irgend welche Funktionen der Variabeln sind. Gruppen dieser Art bezeichnet *Lie* als *imprimitiv*; transitive Gruppen, denen diese Eigenschaft nicht zukommt, heissen *primitiv*[39]).

12. Invarianten. Wenn es nicht möglich ist, den Gleichungen (60) bei gegebenen Werten der x und y zu genügen, so heisst die Gruppe G *intransitiv*. In diesem Fall giebt es Funktionen, die den Differentialgleichungen (61) genügen; sie werden als *Invarianten* der Gruppe bezeichnet. Eine Invariante wird durch jede Substitution der Gruppe in sich selbst transformiert[40]).

Durch die allgemeine Substitution (60) der Gruppe G wird ein Gleichungssystem:

(67) $$\Phi_1(x) = 0, \ \Phi_2(x) = 0, \ldots, \Phi_\varkappa(x) = 0$$

in ein Gleichungssystem

$$\Psi_1(y) = 0, \ \Psi_2(y) = 0, \ldots, \Psi_\varkappa(y) = 0$$

transformiert. Ist das letztere System gleichbedeutend mit dem System:

$$\Phi_1(y) = 0, \ \Phi_2(y) = 0, \ldots, \Phi_\varkappa(y) = 0,$$

so heisst das Gleichungssystem (67) *invariantiv gegenüber der Gruppe G*.

---

39) Christ. Forh. 1884, Nr. 15; Norw. Arch. 10 (1885), p. 375; Leipz. Ber. 1888, p. 18. Ausführung bei *Lie-Engel* 1, p. 220. — Jede primitive Gruppe ist *asystatisch*, d. h. die grösste Untergruppe, die einen Punkt von allgemeiner Lage ungeändert lässt, lässt nicht auch noch eine durch den Punkt gehende Mannigfaltigkeit ungeändert [*Lie*, Norw. Arch. 10 (1885), p. 375]. Doch giebt es auch imprimitive asystatische Gruppen (ib.). Die Entscheidung, ob eine Gruppe systatisch ist, ergiebt sich aus den Gliedern 1. Ordnung in den Reihenentwicklungen ihrer infinitesimalen Transformationen für die Umgebung eines Punktes von allgemeiner Lage (ib. p. 379).

40) Der in der Algebra der linearen Transformationen geläufige Begriff der Invariante (I B 2, Nr. 2) ist von *Klein* und *Lie* von Anfang an in die allgemeine Theorie herübergenommen worden (*Klein*, Progr. Erl. § 1; *Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 15). — *Lie* spricht auch von „*Invarianten mehrerer Punkte*" gegenüber der Gruppe (60), d. h. Invarianten der aus (60) und (62) gebildeten Gruppe [*Lie-Engel*, 1, p. 218; vgl. auch *W. Killing*, Math. Ann. 35 (1889), p. 422]. Die Invarianten von mehr als r Punkten lassen sich stets durch die Invarianten von r oder weniger Punkten ausdrücken (*Lie*, Leipz. Ber. 1889, p. 288).

Lie gebraucht auch den Ausdruck „das System (67) gestattet die Gruppe G“[41]).

Das System (67) ist sicher invariantiv:

1) wenn die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\varkappa$ Invarianten sind;

2) wenn es die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ausdrückt, dass die Matrix (41) einen bestimmten Rang erhält.

Auf diese beiden Fälle kann der allgemeine Fall zurückgeführt werden. Nehmen wir zunächst an, die Matrix (41) bleibe vom Range r, wenn man die x den Gleichungen (67) unterwirft; dann können diese Gleichungen durch Relationen zwischen den Invarianten von G vollständig ersetzt werden.

Nehmen wir zweitens an, infolge der Gleichungen (67) reduziere sich der Rang der Matrix (41) auf p. Dann heben wir aus dem System (67) zunächst solche Gleichungen heraus, die für diese Reduktion erforderlich und hinreichend sind und bezeichnen diese mit (67a), die übrigen — sofern noch welche vorhanden sind — mit (67b). Durch die Gleichungen (67a) werden eine Anzahl von Variabeln x — etwa $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ — als Funktionen der übrigen $x_1, x_2, \ldots, x_h$ bestimmt; an Stelle der r-gliedrigen Gruppe G in n Variabeln tritt eine ebenfalls r-gliedrige Gruppe Γ in h Variabeln[42]).

13. Differentialinvarianten. Es sei zunächst eine einzelne Substitution

$$x_\nu' = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{68}$$

vorgelegt. Durch irgend ein Gleichungssystem seien die Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ definiert. Dementsprechend sind die Variabeln $x_{m+1}', x_{m+2}', \ldots, x_n'$ als Funktionen von $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ zu betrachten. Die unter der Voraussetzung von einander unabhängiger $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildeten Differentialquotienten einer Funktion F nach diesen Variabeln werden im folgenden mit $\frac{\partial F}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet, dagegen mit $\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ diejenigen, die unter Berücksichtigung des funktionalen Zusammenhangs zwischen $x_{m+1}, \ldots, x_n$ und $x_1, \ldots, x_m$ gebildet sind. Entsprechend sind die Bezeichnungen $\frac{\partial F}{\partial x_\nu'}$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu'}\right)$ zu verstehen. Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\left(\frac{\partial x_{m+\lambda}}{\partial x_\mu}\right) = p_{\lambda\mu}, \qquad \left(\frac{\partial x_{m+\lambda}'}{\partial x_\mu'}\right) = p_{\lambda\mu}' \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots, n-m\\ \mu = 1, 2, \ldots, m\end{pmatrix}.$$

41) So schon Christ. Forh. 1872, p. 26 (von einer einzelnen Transformation).

42) Diese Sätze waren *Lie* aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (II A 5, Nr. **54**) geläufig; die Ausführung *Lie-Engel* 1, Kap. 14.

Um die $p'_{\lambda\mu}$ als Funktionen der x und der p darzustellen, benutzt man, dass:

$$\left(\frac{\partial x'_{m+\lambda}}{\partial x_\mu}\right) = \frac{\partial x'_{m+\lambda}}{\partial x_\mu} + \sum_{\varkappa=1}^{n-m} p_{\varkappa\mu}\,\frac{\partial x'_{m+\lambda}}{\partial x_{m+\varkappa}}$$

$$= \sum_{\tau=1}^{m}\left(\frac{\partial x'_{m+\lambda}}{\partial x'_\tau}\right)\left(\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}\right) = \sum_{\tau=1}^{m} p'_{\lambda\tau}\left[\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu} + \sum_{\varkappa=1}^{n-m} p_{\varkappa\mu}\,\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_{m+\varkappa}}\right]$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n-m;\ \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den p' ergiebt sich, wenn man die $\partial x'_\tau/\partial x_\mu$ durch ihre aus (68) folgenden Werte ersetzt, ein Gleichungssystem der Form:

$$(69)\qquad p'_{\lambda\nu} = g_{\lambda\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{n-m,\,m}) = g_{\lambda\nu}(x \mid p)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n-m;\ \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Die durch die Gleichungen (68) und (69) dargestellte Substitution bezeichnet *Lie* als *erweiterte Substitution*[43]). — Die Ausdrücke $g_{\lambda\nu}$ hängen in keiner Weise von den Beziehungen zwischen den $x_{n+1}, \ldots, x_n$ und den $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ab.

Man kann in der Erweiterung der Substitution (3) fortfahren, indem man auch noch die zweiten Differentialquotienten berücksichtigt; u. s. w.

Lassen wir an Stelle von (68) die allgemeine Substitution (3) der Gruppe G treten, so erhalten wir an Stelle von (69) Gleichungen der Form:

$$(70)\qquad p'_{\lambda\nu} = g_{\lambda\nu}(x \mid p \mid a);$$

sie stellen zusammen mit (3) die allgemeine Substitution einer mit G gleichzusammengesetzten Gruppe $G^{(1)}$ dar — der *ersten Erweiterung* der Gruppe G. Durch Hinzufügung der zweiten Ableitungen gelangt man zur *zweiten Erweiterung* $G^{(2)}$, die ebenfalls mit G gleichzusammengesetzt ist. U. s. w.[44])

Um die charakteristischen Differentialgleichungen (Nr. 3) von $G^{(1)}$ aufzustellen, gehen wir von den Differentialgleichungen (21) von G aus. Für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ folgt aus ihnen:

43) Auch diese Vorstellung — dass mit den Punkten eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen zugleich seine Linien-, Flächen- u. s. w. Elemente mit transformiert werden — gehört zu *Lie*'s ursprünglichem Ideenschatz. Vgl. z. B. Christ. Forh. 1871, p. 84, wo die Sache bereits als selbstverständlich behandelt wird.

44) *Lie*, Norw. Arch. 8 (1883), p. 193; Math. Ann. 24 (1884), p. 550. Der Name „*Erweiterung*" *Lie-Engel* 1, p. 523. Vgl. auch *K. Żorawski*, Krak. Ber. 24 (1893), p. 34.

$$(71)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\varkappa}{\partial a_\varrho}\right)=\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\varkappa=1}^{m}\psi_{\sigma\varrho}(a)\left(\frac{\partial \xi_{\sigma\varkappa}(x')}{\partial x'_\varkappa}\right)\left(\frac{\partial x'_\varkappa}{\partial x_\mu}\right);$$

andererseits ist für $\nu = m + \lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n - m$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_{m+\lambda}}{\partial a_\varrho}\right)=\sum_{l=1}^{m}\left[\frac{\partial p'_{\lambda l}}{\partial a_\varrho}\left(\frac{\partial x'_l}{\partial x_\mu}\right)+p'_{\lambda l}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_l}{\partial a_\varrho}\right)\right];$$

also (unter Änderung des Summationsbuchstabens im ersten Gliede rechts):

$$(72)\qquad =\sum_{\varkappa=1}^{m}\left(\frac{\partial x'_\varkappa}{\partial x_\mu}\right)\left[\frac{\partial p'_{\lambda\varkappa}}{\partial a_\varrho}+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}p'_{\lambda l}\psi_{\sigma\varrho}(a)\left(\frac{\partial \xi_{\sigma l}(x')}{\partial x'_\varkappa}\right)\right].$$

Vergleichung von (71) und (72) giebt, da die Funktionaldeterminante:

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)}$$

nicht verschwindet:

$$(73)\qquad \frac{\partial p'_{\lambda\varkappa}}{\partial a_\varrho}=\sum_{\sigma=1}^{\varrho}\psi_{\sigma\varrho}(a)\left[\left(\frac{\partial \xi_{\sigma m+\lambda}(x')}{\partial x'_\varkappa}\right)-\sum_{\sigma=1}^{m}p'_{\lambda l}\left(\frac{\partial \xi_{\sigma l}(x')}{\partial x'_\varkappa}\right)\right.$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n - m);$$

und hier ist:

$$(74)\qquad \left(\frac{\partial \xi_{\sigma l}(x')}{\partial x'_\varkappa}\right)=\frac{\partial \xi_{\sigma l}(x')}{\partial x'_\varkappa}+\sum_{r=1}^{n-m}p'_{r\varkappa}\frac{\partial \xi_{\sigma l}(x')}{\partial x'_r}.$$

Die Differentialgleichungen (21) und (73) mit den zugehörigen Anfangsbedingungen definieren die Gruppe $G^{(1)}$. Auf analogem Wege gelangt man zu den für die Gruppe $G^{(2)}$ geltenden Differentialgleichungen, u. s. w.[45]).

Wenn die Gruppe $G^{(1)}$ *intransitiv* ist, so besitzt sie eine Anzahl von Invarianten und unter diesen giebt es sicher solche, die nicht nur von den x, sondern auch von den p abhängen. Diese werden als *Differentialinvarianten von* G bezeichnet[46]). Ebenso führt die

45) *Lie-Engel* 1, p. 541.

46) *Lie*, Math. Ann. 21 (1884), p. 539; *A. Tresse*, Par. C. R. 114 (1892), p. 948, 1256; *E. Lindelöf*, Fenn. Acta 20 (1893), p. 1. Differentialinvarianten projektiver und damit zusammenhängender Gruppen sind schon früher betrachtet worden; vgl. I B 2, Nr. 20. — Werden die $x_{m+\lambda}$ von der Gruppe G nicht mit transformiert, so sagt man statt Differentialinvariante auch wohl *Differentialparameter* (*G. Lamé*, Coordonnées curvilignes, Paris 1859, p. 5). Vgl. *Lie-Scheffers* p. 739. Durch die Differentialparameter kann man aus bekannten Invarianten neue ableiten. Vgl. I B 2, Nr. 22.

Gruppe $G^{(2)}$, wenn sie intransitiv ist, zu Differentialinvarianten, die auch noch die zweiten Derivierten enthalten; u. s. w.

Schreitet man in der Reihe der erweiterten Gruppen hinreichend weit fort, so muss man sicher einmal zu intransitiven Gruppen gelangen; *es besitzt also jede endliche kontinuierliche Gruppe Differentialinvarianten*[47]).

14. Parametergruppen. Führen wir drei bestimmte Substitutionen $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ der Gruppe G, die den Parametersystemen:

$$a_1, a_2, \ldots, a_r; \quad b_1, b_2, \ldots, b_r; \quad c_1, c_2, \ldots, c_r$$

entsprechen, nach einander aus. Sie setzen sich zu einer ebenfalls der Gruppe G angehörenden Substitution $S(s)$ zusammen, der das Parametersystem $s_1, s_2, \ldots, s_r$ entsprechen möge; symbolisch:

$$S(s) = S(a)\, S(b)\, S(c).$$

Fassen wir $S(a)$ und $S(b)$ in ein Produkt $S(p) = S(a)\, S(b)$ und ebenso $S(b)$ und $S(c)$ in ein Produkt $S(q) = S(b)\, S(c)$ zusammen, sodass:

$$S(s) = S(p)\, S(c) = S(a)\, S(q);$$

zwischen den Parametersystemen a; b; c; p; q; s bestehen dann die Gleichungen (vgl. (5)):

$$(75)\ 1)\ p_\varrho = \varphi_\varrho(a|b);\ 2)\ q_\varrho = \varphi_\varrho(b|c);\ 3)\ s_\varrho = \varphi_\varrho(p|c);\ 4)\ s_\varrho = \varphi_\varrho(a|q)$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Betrachten wir die a, p, s als Variable, die b, c, q als Parameter: die Substitutionen (75, 1) und (75, 3), die derselben ∞^r-Schar angehören, setzen sich zu der Substitution (75, 4) zusammen, die dieser Schar ebenfalls angehört; die Gleichung (75, 2) bestimmt die Parameter der resultierenden Substitution.

Betrachten wir die c, q, s als Variable, die a, b, p als Parameter: (75, 2) und (75, 4) setzen sich zu (75, 3) zusammen, diese drei Substitutionen gehören derselben ∞^r-Schar an; (75, 1) bestimmt die Parameter der resultierenden Substitution.

---

47) *Lie,* Christ. Forh. 1882, Nr. 21, p. 8; 1883, Nr. 18, p. 4; Math. Ann. 24 (1884), p. 566.

Mit den *Differential*invarianten stehen in engem Zusammenhang die *Integral*invarianten [*H. Poincaré,* Acta math. 13 (1899), p. 52; Mécanique céleste, 3 (1899), p. 1; *K. Zorawsky,* Krak. Denkschr. 28 (1895), p. 232; *E. Cartan,* Bull. soc. math. 24 (1896), p. 140; *S. Lie,* Leipz. Ber. 1897, p. 342, 368; *A. Hurwitz,* Gött. Nachr. 1897, p. 71]. Vgl. auch I B 2, Fussn. 141.

Über *invariante Differentialgleichungen und Systeme von solchen* vgl. man II A 4 b, Nr. **13** und II A 5, Nr. **54**.

Jede der beiden r-gliedrigen Substitutionenscharen hat also Gruppencharakter; *Lie* unterscheidet sie als *erste* und *zweite Parametergruppe*[48]).

Bezeichnen wir mit:

$$a_\varrho = \chi_\varrho(a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

die Parameter der zu $S(a)$ inversen Substitution, sodass $S(\bar{a}) = S(a)^{-1}$, und sei entsprechend $S(\bar{b}) = S(b)^{-1}$, $S(\bar{p}) = S(p)^{-1}$. Aus $S(p) = S(a)\,S(b)$ folgt dann $S(p) = S(b)\,S(\bar{a})$, also: $\bar{p}_\varrho = \varphi_\varrho(b\,|\,\bar{a})$. Betrachten wir die $a, p, \bar{a}, \bar{p}$ als Variable, die $b, \bar{b}$ als Parameter. Transformieren wir die allgemeine Substitution der 1. Parametergruppe $p'_\varrho = \varphi_\varrho(a\,|\,b)$ durch die Substitution $\bar{a}_\varrho = \chi_\varrho(a)$, $\bar{p}_\varrho = \chi_\varrho(p)$ und führen wir gleichzeitig an Stelle der b neue Parameter $\bar{b} = \chi_\varrho(b)$ ein, so geht sie in die allgemeine Substitution der 2. Parametergruppe $\bar{p}_\varrho = \varphi_\varrho(\bar{b}\,|\,\bar{a})$ über. Die beiden Parametergruppen sind also *ähnlich*[49]).

Sei wie oben $S(p) = S(a)\,S(b)$ und ferner:

$$S(p') = S(c)\,S(p), \quad S(a') = S(c)\,S(a), \quad \text{folglich} \quad S(p') = S(a')\,S(b).$$

Dann ist:

$$(76)\quad 1)\ p_\varrho = \varphi_\varrho(a\,|\,b);\quad 2)\ p'_\varrho = \varphi_\varrho(a'\,|\,b);\quad 3)\ a'_\varrho = \varphi_\varrho(c\,|\,a);\quad 4)\ p'_\varrho = \varphi_\varrho(c\,|\,p)$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Hier betrachten wir die a, p, a', p' als Variable, die b, c als Parameter; dann lassen sich diese Gleichungen dahin interpretieren: transformiert man die allgemeine Substitution (76, 1) der 1. Parametergruppe durch die allgemeine Substitution (76, 3, bezw. 4) der 2. Parametergruppe, so geht sie in sich selbst (nämlich in 76, 2) über. *Die beiden Parametergruppen sind also reciproke Gruppen*[50]).

Aus (20) folgt, dass die 2. Parametergruppe von den infinitesimalen Transformationen:

$$(77)\qquad A_\varrho(f) = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\varrho\sigma}(u)\,\frac{\partial f}{\partial a_\sigma}$$

erzeugt wird[51]). Die erzeugenden infinitesimalen Transformationen der 1. Parametergruppe ergeben sich hieraus vermöge der Ähnlichkeit beider Gruppen.

---

48) Christ. Forh. 1884, Nr. 15; Norw. Arch. 10 (1885), p. 358 (nur die erste). Vgl. *Lie-Engel* 1, p. 401; 3, p. 638. — Die Parametergruppen entsprechen den „*regulären*" endlichen diskreten Gruppen (I A 6, Fussn. 75).

49) *Lie-Engel* 3, p. 640.

50) *Engel* bei *Lie-Engel* 1, p. 429.

51) *Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 15; *Lie-Engel* 1, p. 407.

Da die Determinante $|a_{\varrho\sigma}|$ nicht Null ist, sind die beiden Parametergruppen *transitiv*.

15. Adjungierte Gruppe. Aus den Gleichungen (18) und (21) ergeben sich durch Elimination der $\partial x'_\nu / \partial a_\varrho$ Gleichungen der Form:

$$(78) \qquad \xi_{\varrho\nu}(x') = \sum_{\sigma=1}^{r} p_{\varrho\sigma} \left[\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_{\sigma\lambda}(x) \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} \right] \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \varrho = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix};$$

die Koeffizienten $p_{\varrho\sigma}$ sind Funktionen der a. In diesen Gleichungen ersetzen wir:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_{\varrho\lambda}(x) \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} \text{ durch } e_\varrho, \quad \xi_{\varrho\lambda}(x') \text{ durch } e'_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

und erhalten eine Schar *linearer* Substitutionen:

$$(79) \qquad e'_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{r} p_{\varrho\sigma} e_\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Diese Schar hat Gruppencharakter[52]); sie heisst die zu G *adjungierte* Gruppe[53]). Sie wird erzeugt von den infinitesimalen Transformationen[52]):

$$(80) \qquad \mathsf{E}_\varrho(f) = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} c_{\sigma\varrho\tau} e_\sigma \frac{\partial f}{\partial e_\tau} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Die adjungierte Gruppe ist zu G *isomorph*[52]). Der Isomorphismus ist *holoedrisch*, wenn G keine *ausgezeichnete* infinitesimale Transformation enthält, d. h. keine, die mit allen infinitesimalen Transformationen von G vertauschbar ist[54]). Giebt es dagegen k unter einander unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so ist der Isomorphismus *meriedrisch*[55]); die adjungierte Gruppe ist dann von der Ordnung $r - k$.

---

52) *Lie*, Norw. Arch. 1 (1876), p. 191. — Die Einführung der adjungierten Gruppe kommt darauf hinaus, dass man die infinitesimalen Transformationen von G als Elemente einer linearen Mannigfaltigkeit auffasst [*Lie*, Math. Ann. 25 (1884), p. 94]. Ausführliche Behandlung der adjungierten Gruppe *Lie-Sch.*, Kap. 18. Übertragung des Begriffs auf diskrete Gruppen (Gruppe der kogredienten Isomorphismen einer Gruppe mit sich selbst, I A 6, Nr. 18) bei *W. Ahrens*, Leipz. Ber. 1897, p. 616.

53) *Engel*, Leipz. Ber. 1886, p. 88.

54) Leipz. Ber. 1895, p. 271 unterscheidet *Lie* alle Gruppen in *aristokratische* und *demokratische*, je nachdem sie ausgezeichnete Operationen enthalten oder nicht. — Betreffend die Unterscheidung von „*ausgezeichnete*“ und „*invariante*“ infinitesimale Transformationen vgl. man *Lie-Scheffers*, p. 465 und p. 485.

55) *Lie*, Christ. Forh. 1884, Nr. 15; Math. Ann. 25 (1884), p. 93. Ursprünglich war es übersehen worden [so noch Math. Ann. 16 (1880), p. 495]. Die

Die adjungierte Gruppe ist *intransitiv*; denn wegen $c_{\varrho\sigma\tau} = -c_{\sigma\varrho\tau}$ (28) ist

$$e_1 \mathsf{E}_1(f) + e_2 \mathsf{E}_2(f) + \cdots + e_r \mathsf{E}_r(f) \equiv 0. \tag{81}$$

Sie besitzt also mindestens eine Invariante.

16. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Variabeln- und Parameterzahl. Um eine Übersicht über alle überhaupt möglichen Transformationsgruppen zu erhalten, fasst *Lie* zunächst alle unter einander ähnlichen Gruppen in einen *Typus* zusammen. Dann ergeben sich drei *Integrationsprobleme*[56]:

A) alle r-gliedrigen Gruppen einer n-fachen Mannigfaltigkeit zu bestimmen;

B) alle endlichen kontinuierlichen Gruppen einer n-fachen Mannigfaltigkeit zu bestimmen;

C) alle r-gliedrigen Gruppen zu bestimmen.

Von diesen Problemen ist B) das schwierigste, C) lässt sich auf A) zurückführen, indem es für jedes r genügt, eine *begrenzte* Anzahl Werte von n zu betrachten.

Wesentliches Hülfsmittel der Untersuchung ist die Unterscheidung der infinitesimalen Transformationen nach ihrer *Ordnung* für einen Punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ von allgemeiner Lage, d. h. nach der Ordnung der Reihenentwicklungen der $\xi_{\sigma\varrho}$ in der Umgebung eines solchen Punktes. Ist X_i von der Ordnung s_i, X_k von der Ordnung s_k, so ist $(X_i X_k)$ mindestens von der Ordnung $s_i + s_k - 1$.[57]

Für $n = 1$ giebt es nur drei Typen von Gruppen[58]:

1) die eingliedrige $x' = x + a$;

2) die zweigliedrige $x' = a_1 x + a_2$;

3) die dreigliedrige $x' = \dfrac{a_1 x + a_2}{a_3 x + 1}$.

Auch für $n > 1$ giebt es „in einem gewissen Sinne“ nur eine begrenzte Anzahl von Typen[59].

Frage, ob lineare Gruppen von jeder vorgeschriebenen Zusammensetzung existieren, ist noch unerledigt; vgl. aber *W. Ahrens*, Leipz. Ber. 1897, p. 359.

56) Diese Formulierung giebt *Lie*, Leipz. Ber. 1888, p. 15. — Die Aufgabe, alle Gruppen *linearer* Transformationen anzugeben, hatte er bereits Christ. Forh. 1871, p. 243 gestellt.

57) *Lie*, Norw. Arch. 3 (1878), p. 126. — Bei seiner ersten Bestimmung aller Gruppen der Ebene hatte *Lie* einen anderen Satz benutzt, ib. p. 116. Vgl. auch *Lie-Engel* 3, p. 666.

58) *Lie*, Gött. Nachr. 1874, p. 531; Norw. Arch. 1 (1876), p. 20; auf anderem Wege Math. Ann. 16 (1880), p. 449; noch anders *Lie-Engel* 3, p. 7 und p. 11.

59) *Lie*, Gött. Nachr. 1874, p. 540 (ohne Beweis). Die *primitiven* Gruppen

17. Bestimmung aller Typen der Zusammensetzung einer Gruppe. Die Bestimmung aller Typen der Zusammensetzung, d. h. aller wesentlich verschiedenen Systeme von Konstanten $c_{\varrho\sigma\tau}$, die den Gleichungen (28) und (29) genügen, ist ein *algebraisches* Problem[60]. Seine Lösung beruht hauptsächlich auf den Eigenschaften der „charakteristischen Determinante“[61]):

$$(82)\qquad \Delta(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \sum_\varrho c_{\varrho 11} e_\varrho - \omega & \sum_\varrho c_{\varrho 21} e_\varrho & \cdots & \sum_\varrho c_{\varrho r1} e_\varrho \\ \sum_\varrho c_{\varrho 12} e_\varrho & \sum_\varrho c_{\varrho 22} e_\varrho - \omega & \cdots & \sum_\varrho c_{\varrho r2} e_\varrho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_\varrho c_{\varrho 1r} e_\varrho & \sum_\varrho c_{\varrho 2r} e_\varrho & \cdots & \sum_\varrho c_{\varrho rr} e_\varrho - \omega \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-\omega)^r + \chi_1(e)(-\omega)^{r-1} + \chi_2(e)(-\omega)^{r-2} + \cdots + \chi_{r-1}(e)\omega.$$

(Das absolute Glied ist Null wegen (28)). Die Anzahl derjenigen unter den Funktionen χ, die unter einander unabhängig sind, heisst

---

der Ebene ($n = 2$) werden ebendort p. 538 summarisch aufgezählt; *alle* Gruppen der Ebene Norw. Arch. 3 (1878), p. 125 und Math. Ann. 16 (1888), p. 455, in einigen Details vereinfacht Norw. Arch. 10 (1885), p. 74; in integrierter Form von *W. Fr. Meyer,* Chic. Congr. Pap. 1893 [96], p. 198. Seine Bestimmung aller Gruppen des Raumes ($n = 3$) [Norw. Arch. 3 (1878), p. 94; 10 (1885), p. 111, 124; *Lie-Engel* 3, p. V] hat *Lie* nicht vollständig veröffentlicht; die primitiven werden *Lie-Engel* 3, p. 122 abgeleitet, grosse Klassen von imprimitiven ib. p. 141, die viergliedrigen von *R. Koch,* Diss. Leipz. 1898. Die *primitiven* Gruppen für $n = 4$ bestimmt *J. M. Page,* Diss. Leipz. 1888 [Amer. J. of math. 10 (1888), p. 345; ein Nachtrag Ann. of math. 9 (1894), p. 60*]; die Gruppen des R_4, für die zwei Punkte eine, mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben, *G. Kowalewski,* Leipz. Ber. 1898, p. 60. Für $n = 5$ giebt *G. Kowalewski* ib. 1899, p. 68 die primitiven Gruppen, 1898, p. 103 die imprimitiven der eben genannten Art.

Man kann auch nur solche Gruppen als unter einander ähnlich behandeln, die durch eine *reelle* Transformation in einander übergeführt werden können; dann spalten sich einzelne Typen in Gestalten (*Lie-Engel* 3, p. 369). Für $n = 1$ und $n = 2$ vgl. auch *S. Sulzberger,* Diss. Leipz. 1889.

60) *S. Lie,* Norw. Arch. 1 (1876), p. 178. Alle Typen der Zusammensetzung für $r = 2, 3, 4$, sowie die nicht integrabeln für $r = 5, 6$: *Lie-Engel* 3, p. 713. Christ. Forh. 1884, Nr. 9, p. 3 giebt *Lie* an, er habe alle Typen für $r < 7$ bestimmt.

61) Auf diese Determinante führt die Frage nach den zweigliedrigen Untergruppen, in denen eine gegebene eingliedrige invariant enthalten ist [*Lie,* Norw. Arch. 1 (1876), p. 53 für $n = 1$, $r = 3$; eine Andeutung des allgemeinen Satzes ib. p. 179]. *W. Killing* hat sie an die Spitze seiner Untersuchungen über Zusammensetzung gestellt [Math. Ann. 31 (1887), p. 259]. Die Resultate dieser Untersuchungen haben sich bei der Nachprüfung durch *E. Cartan* [Par. C. R. 110 (1893), p. 784, 962; Leipz. Ber. 1893, p. 395; Par. thèse 1894] bestätigt gefunden, die benutzten Hülfssätze nur zum Teil.

der *Rang* der Gruppe[62]). Die Funktionen χ sind der adjungierten Gruppe gegenüber invariant, genügen also den r Differentialgleichungen[63]):

$$\mathsf{E}_\varrho(f) \equiv \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} c_{\varrho\sigma\tau} e_\sigma \frac{\partial f}{\partial e_\tau} = 0. \tag{83}$$

Es müssen also für eine Gruppe vom Range l mindestens l Wurzeln der Gleichung $\Delta\omega = 0$ gleich Null sein[64]). Sind alle Funktionen χ Null, so ist die Gruppe vom *Range Null*; die erzeugenden infinitesimalen Transformationen einer solchen Gruppe können so gewählt werden, dass die zwischen ihnen bestehenden Relationen die Form erhalten[65]):

$$(X_\varrho X_\sigma) = \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} c_{\varrho\sigma\tau} X_\tau(f) \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, r-1 \\ \varrho = \sigma+1, \sigma+2, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Andererseits zerfallen (vgl. I A 2, Nr. **16**) alle Gruppen in *einfache*, die keine invariante Untergruppe besitzen, und *zusammengesetzte*, denen eine solche zukommt[66]). Die zusammengesetzten kontinuierlichen Gruppen kann man weiter in drei Unterabteilungen zerlegen:

A) Eine Gruppe G_r der Ordnung r heisst *integrabel*[67]), wenn sie folgende Eigenschaft hat: G_r hat eine invariante Untergruppe G_{r-1} der Ordnung $r-1$, G_{r-1} eine invariante G_{r-2} u. s. f. bis zur G_1. — Konsequenterweise sind die eingliedrigen Gruppen den integrabeln beizuzählen[68]).

Die Gruppen vom Range Null sind integrabel[69]); umgekehrt hat

62) *Killing*, Math. Ann. 31, p. 266.

63) *Killing* u. *Engel*, ib. p. 262.

64) *Killing*, ib. p. 267.

65) *Killing*, ib. p. 287. Über Gruppen vom Range Null vgl. man auch *K. A. Umlauf*, Diss. Leipz. 1891. — Übertragung des Begriffs auf diskrete Gruppen: *W. Ahrens*, Leipz. Ber. 1897, p. 621.

66) Den Satz von *C. Jordan* über die „Konstanz der Faktoren der Zusammensetzung" (I A 6, Nr. **17**) hat *S. Lie* (Leipz. Abh. 1888, p. 562; Beweis bei *E. Vessiot*, Ann. éc. norm. 1892, p. 203), den von *O. Hölder* hat *Fr. Engel* (*Lie-Engel* 3, p. 765) auf die endlichen kontinuierlichen Gruppen übertragen. Über die Ausführung der Zerlegung vgl. *E. Cartan*, Amer. J. of math. 18 (1896), p. 1.

67) *Lie*, Christ. Forh. 1874, p. 273; der Name Leipz. Ber. 1888, p. 19. Unter den endlichen Gruppen entsprechen die „*auflösbaren*" (I A 6, Nr. **23**) den integrabeln. — Eine Gruppe ist stets integrabel, wenn sie keine mit der projektiven Gruppe einer Geraden (oder eines Kegelschnitts) isomorphe Untergruppe (Kegelschnittsgruppe) enthält (*Engel*, Leipz. Ber. 1887, p. 95; vollständiger ib. 1893, p. 360).

68) Anders *Lie-Engel* 3, p. 683.

69) *K. A. Umlauf*, Diss. Leipz. 1891, p. 35.

jede integrable Gruppe entweder selbst den Rang Null oder es gilt dies wenigstens für ihre Derivierte (Nr. **6**)[70].

B) Eine Gruppe heisst *halb-einfach*[71], wenn sie keine *integrable* invariante Untergruppe besitzt.

C) Alle übrigen Gruppen bilden die dritte Unterabteilung.

Für eine gegebene Rangzahl l giebt es im allgemeinen gerade *vier* Typen der Zusammensetzung einer einfachen Gruppe[72]; sie gehören bezw. zu den Ordnungszahlen:

$$l(l+2),\quad l(2l+1),\quad l(2l-1),\quad l(2l+1).$$

Die Gruppen dieser Typen sind bezw. isomorph mit der projektiven Gruppe des R_l; der Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit in $2l+1$; und in $2l$ Variabeln; endlich der Gruppe eines linearen Komplexes im R_{2l} (vgl. Nr. **20**).

Ausnahmen finden nur in folgenden Fällen statt: Für $l=1$ fällt der dritte Typus als eingliedrig weg, die drei andern sind isomorph. Für $l=2$ ist der 3. Typus nicht einfach, der 2. und 4. isomorph. Für $l=3$ ist der 1. und 3. Typus isomorph. Für $l=2$, 4, 6, 7, 8 existiert ausserdem noch je ein Typus einfacher Gruppen, bezw. von der Ordnung 14, 52, 78, 133, 248.[73]

Jede *halb-einfache* Gruppe enthält eine Reihe invarianter Untergruppen $G_1, G_2, \ldots, G_q$ $(q \geq 2)$, von denen jede einfach ist; keine zwei derselben haben eine infinitesimale Transformation gemein; die erzeugenden infinitesimalen Transformationen einer jeden von diesen Untergruppen sind mit den erzeugenden infinitesimalen Transformationen der übrigen vertauschbar; die Summe der Ordnungen von $G_1, G_2, \ldots, G_q$ ist gleich der Ordnung von G. Die Gruppe G *zerfällt* also *in das direkte Produkt* (I A 6, Nr. **16**) der Untergruppen $G_1, G_2, \ldots, G_q$, von denen jede mit jeder vertauschbar ist[74].

---

70) *E. Cartan,* Thèse p. 45.

71) *Killing,* Math. Ann. 34 (1888), p. 74.

72) Dass diese vier Typen *einfache* Gruppen liefern, hat *Lie* gezeigt: für den ersten Christ. Forh. 1884, Nr. 15; Math. Ann. 25 (1884), p. 130, ausführlicher *Lie-Engel* 1, p. 560; für den zweiten und dritten Norw. Arch. 10 (1885), p. 412; für den vierten Leipz. Ber. 1889, p. 325. Dass es, abgesehen von den angeführten Ausnahmefällen, keine andern einfachen Gruppen giebt, hat *W. Killing* behauptet [Math. Ann. 33 (1888), p. 25], *E. Cartan* bewiesen (Thèse p. 94).

73) Die beiden von *Killing,* Math. Ann. 33 (1888), p. 30 angegebenen Systeme für $l=4$, $r=52$ gehören zu demselben Typus (*Cartan,* Thèse p. 94). — Beispiele von Gruppen des zu $l=2$, $r=14$ gehörenden Typus geben *Cartan,* Par. C. R. 116 (1893), p. 784 und *Engel,* ib. p. 786.

74) *Killing,* Math. Ann. 34 (1888), p. 75; *Cartan,* Thèse p. 53. — Vgl. über halb-einfache Gruppen auch einen Satz von *L. E. Dickson,* N. Y. Bull. (2) 3.

Für die Gruppen der Klasse C) gilt der Satz: Ist die umfassendste invariante integrable Untergruppe G_1 von G von der Ordnung $r - m$, so ist mit G eine Gruppe Γ der Ordnung m meriedrisch isomorph, die einfach oder halb-einfach ist[75]).

18. Bestimmung aller Gruppen von gegebener Zusammensetzung. Um *alle* Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu erhalten, muss man sich zuerst eine *einfach transitive* derartige Gruppe verschaffen. Am einfachsten ist es, zunächst die Parametergruppe, die zu der vorgelegten Zusammensetzung gehört, zu bilden[76]). Die Darstellung der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe gestaltet sich verschieden, je nach der Wahl des Parametersystems. *Lie* benützt ein Parametersystem, das er als *kanonisch* bezeichnet; er gelangt dazu auf folgendem Wege.

Seien wieder

$$X_\varrho(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\varrho\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

die infinitesimalen Transformationen irgend einer Gruppe von der verlangten Zusammensetzung[77]). Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ willkürliche aber feste Werte; wir bilden die infinitesimale Transformation:

$$\lambda_1 X_1(f) + \lambda_2 X_2(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f).$$

Sie erzeugt eine eingliedrige Gruppe, die man durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx'_\nu}{dt} = \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho \xi_{\varrho\nu}(x') \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

und die Anfangsbedingungen:

$$x'_\nu = x_\nu \quad \text{für} \quad t = 0 \tag{86}$$

definieren kann. Nach Ausführung der Integration kommen t und die λ nur in den Verbindungen:

$$c_1 = \lambda_1 t, \; c_2 = \lambda_2 t, \; \ldots, \; c_r = \lambda_r t \tag{87}$$

vor; behandelt man diese als unabhängig variabel, so stellen die aus (85) entspringenden Integralgleichungen:

---

75) *Killing*, Math. Ann. 36 (1889), p. 184; Beweis bei *Cartan*, Thèse p. 108.

76) *Fr. Schur*, Leipz. Ber. 1889, p. 231; Math. Ann. 35 (1889), p. 173. *Lie* hatte zuerst die adjungierte Gruppe, später eine Gruppe von Berührungstransformationen zu diesem Zwecke benutzt; vgl. Fussn. 20.

77) Man beachte, dass für die folgenden Schlüsse nur die Existenz einer solchen Gruppe, nicht die Gruppe selbst als bekannt vorausgesetzt zu werden braucht. Vgl. darüber *L. Maurer*, Münch. Ber. 1888, p. 118; *Lie-Engel* 3, p. 796.

$$(88) \qquad x_\nu' = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid e_1, e_2, \ldots, e_r) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

eine r-gliedrige Gruppe dar[78]). Das System der Parameter e bezeichnet *Lie* als *kanonisches Parametersystem*[79]); es ist bestimmt bis auf eine lineare Transformation, der die e unterworfen werden können[80]). Bildet man aus diesen kanonischen Parametern e_ϱ statt der a_ϱ die Funktionen $\psi_{\sigma\tau}$ von Gleichung (22) und setzt:

$$(89) \qquad t\,\psi_{\sigma\tau}(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t) = \Psi_{\sigma\tau}(t; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$$

so genügen die so bestimmten Funktionen $\Psi_{\sigma\tau}$ den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten[81]):

$$(90) \qquad \frac{d\Psi_{\sigma\tau}}{dt} = \varepsilon_{\sigma\tau} + \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\iota=1}^{r} \lambda_\varrho e_{\iota\varrho\sigma} \Psi_{\iota\tau}$$

und den Anfangsbedingungen:

$$\Psi_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, r),$$

lassen sich also durch rationale ganze Funktionen von t und gewissen Exponentialgrössen der Form $e^{\varepsilon t}$ ausdrücken (II A 4 b, Nr. **21**).[82]) Aus den $\psi_{\sigma\tau}$ erhält man die $\alpha_{\sigma\tau}$ und damit die infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe in kanonischer Form (Glchg. 77).[83])

Das kanonische Parametersystem bietet den Vorteil, dass jede Untergruppe durch lineare Gleichungen zwischen den Parametern

78) *Lie,* Norw. Arch. 1 (1876), p. 168.

79) *Lie-Engel* 1, p. 171; Leipz. Ber. 1890, p. 478. — Die Reduktion einer Gruppe auf ihre kanonische Form verlangt höchstens Quadraturen (*Lie,* Leipz. Ber. 1889, p. 281). Vgl. auch *Lie-Engel* 3, p. 624.

80) *Lie-Engel* 3, p. 609.

81) *Engel,* Leipz. Ber. 1891, p. 311. *Lie* hatte vorher Gleichungen derselben Art für die $d\Psi/dt$ gefunden und aus ihnen dieselben Schlüsse gezogen (Leipz. Ber. 1890, p. 482).

82) Sie sind also ganze transcendente Funktionen von t.

83) Aus Fussn. 82 folgt, dass diese $\alpha_{\sigma\tau}$ Quotienten ganzer transcendenter Funktionen sind, wie zuerst *Fr. Schur,* Leipz. Ber. 1890, p. 4; Math. Ann. 38 (1890), p. 271 auf anderem Wege bewiesen hat. Ihren gemeinsamen Nenner stellt *Engel,* Leipz. Ber. 1892, p. 43 als unendliches Produkt dar. Es folgt dann weiter, dass sich überhaupt die Komponenten der infinitesimalen Transformationen jeder *transitiven* Gruppe durch solche Quotienten ausdrücken, wenn die Gruppe auf kanonische Form gebracht ist (*Fr. Schur,* Leipz. Ber. 1890, p. 7; Math. Ann. 38 (1890), p. 276). In allen bisher untersuchten Fällen hat man für diese Komponenten rationale ganze Funktionen der Koordinaten und gewisser Exponentialgrössen, deren Exponenten rationale ganze Funktionen 1. Grades sind, erhalten (vgl. *Lie-Engel* 3, p. 177). Bei primitiven Gruppen traten bis jetzt keine Exponentialgrössen auf (ib. p. 313).

definiert ist[84]). Dem steht der Nachteil gegenüber, dass die Funktionen $f_r(x \mid a)$ im allgemeinen[85]) transcendente Funktionen der Parameter werden — auch dann, wenn bei geeigneter Wahl des Parametersystems eine rationale Darstellung möglich wäre[86]). Man vermeidet dies durch eine andere Darstellung der Parametergruppe, indem man die allgemeinen Substitutionen der r von $X_1(f)$, $X_2(f)$, ..., $X_r(f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppen nach einander anwendet[87]).

In den Parametergruppen kennt man zwei einfach transitive zu einander reciproke Gruppen in r Variabeln. Wenn man überhaupt zwei derartige Gruppen G und Γ kennt, kann man ohne Integration für jeden Typus r-gliedriger Gruppen der gegebenen Zusammensetzung die infinitesimalen Transformationen eines Repräsentanten finden[88]).

Seien $X_1(f)$, $X_2(f)$, ..., $X_r(f)$ und $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, ..., $Y_r(f)$ die erzeugenden infinitesimalen Transformationen von G und Γ, $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, ..., $Y_m(f)$ die erzeugenden infinitesimalen Transformationen einer Untergruppe m^{ter} Ordnung Γ_1 von Γ, $u_1, u_2, \ldots, u_{r-m}$ $r - m$ von einander unabhängige Invarianten von Γ_1.[89]) Wegen (50) ist

---

84) *Fr. Schur,* Math. Ann. 35 (1889), p. 187.

85) Nur für Gruppen vom Range Null tritt eine Ausnahme ein.

86) Z. B. lautet die kanonische Darstellung der Gruppe $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + 1}$:

$$\frac{x' - \omega_2}{x' - \omega_1} = e^{(\omega_2 - \omega_1)e_2} \frac{x - \omega_1}{x - \omega_2};$$

dabei bedeuten ω_1, ω_2 die beiden Wurzeln der Gleichung $e_1 + e_2\omega + e_3\omega^2 = 0$.

87) *L. Maurer,* Math. Ann. 39, p. 421.

88) *Fr. Schur,* für die kanonischen Parametergruppen Leipz. Ber. 1890, p. 4; allgemein Math. Ann. 38 (1890), p. 280. Andere Ableitungen bei *Fr. Engel,* Leipz. Ber. 1891, p. 585; *Lie-Engel* 3, p. 798 [mit Hülfe einer bereits Math. Ann. 25 (1884), p. 81 benutzen Schlussweise]. *Lie* hatte ursprünglich nur gezeigt, dass zur Bestimmung der endlichen Gleichungen aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung die Integration simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen ausreicht, sobald man die endlichen Gleichungen einer solchen Gruppe kennt (Christ. Forh. 1884, Nr. 9 [ohne Beweis]; Norw. Arch. 10 (1885), p. 353. Vgl. *Lie-Engel* 1, Kap. 22; 3, Kap. 27. An der letzteren Stelle wird gezeigt, dass höchstens Quadraturen erforderlich sind). Vgl. auch *Lie,* Leipz. Ber. 1890, p. 490. — Übrigens ist in den betr. Arbeiten nicht überall klar ersichtlich, welcherlei Operationen als „*ausführbar*" angesehen werden sollen.

89) Die Bestimmung dieser Invarianten verlangt eben die Quadraturen, von denen in Fussn. 88 die Rede ist (vgl. *Lie-Engel* 3, p. 663). Wie sie vermieden werden können, wenn man nur die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe zu kennen verlangt, ist ib. p. 798 gezeigt. Von *Schur* werden diese Invarianten überhaupt nicht benutzt.

gleichzeitig mit u_λ auch $X_\sigma(u_\lambda)$ Invariante von Γ_1, also Funktion von $u_1, u_2, \ldots, u_{r-m}$. Das Resultat der Substitution von $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_r$ in die Funktion u_λ werde mit u_λ' bezeichnet. Dann folgt aus (21):

$$(91) \qquad \frac{\partial u_\lambda'}{\partial a_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial x_\nu'} \psi_{\sigma\varrho}(a)\, \xi_{\sigma\nu}(x') = \sum_{\sigma=1}^{r} \psi_{\sigma\varrho}(a)\, X_\sigma(u_\lambda')$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, r-m;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Diese Differentialgleichungen mit den zugehörigen Anfangsbedingungen: $u_1' = u_1$, $u_2' = u_2$, $\ldots$, $u_{r-m}' = u_{r-m}$ für die Anfangswerte der Parameter definieren eine mit G und Γ isomorphe Gruppe G' in $r-m$ Variabeln. Der Isomorphismus ist holoëdrisch, wenn Γ_1 keine in Γ invariante Untergruppe enthält.

Die Bestimmung aller Typen von *intransitiven* Gruppen in $n > r$ Variabeln, für welche die Matrix (41) vom Range r ist, bietet keine Schwierigkeit. Jedem Werte von n entspricht ein einziger Typus. Ist n durch r teilbar, etwa $= kr$, so braucht man nur k kogrediente Gruppen (62) neben einander zu stellen. Ist dagegen $(k-1)\,r < n < kr$, so setze man zwischen den Invarianten dieser Gruppen irgend welche unter einander unabhängige $kr - n$ Relationen fest[90]).

19. Über den analytischen Charakter der Funktionen $f_\nu(x|a)$. Wenn die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe und der zugehörigen Parametergruppe bekannt sind, so kann man die in Nr. 2 eingeführten Funktionen $f_\nu(x|a)$ und $\varphi_\varrho(a|b)$ durch Potenzreihen darstellen, die innerhalb bestimmter Gebiete konvergieren. Aber über den analytischen Charakter der Funktionen f_ν und φ_ϱ geben diese Reihenentwicklungen keinen Aufschluss. Hierüber sind zur Zeit nur wenige Sätze bekannt. Um sie bequem aussprechen zu können, nenne ich ein System von r^2 Grössen $p_{\varrho\sigma}$ *regulär*, wenn die Determinante $|p_{\varrho\sigma} - \varepsilon_{\varrho\sigma}\omega|$, $(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$, entweder durch ω^r teilbar ist, oder wenn sie nur für ganzzahlige Werte von ω Null wird und in diesem Fall nur Elementarteiler 1. Ordnung (I B 2, Nr. 3) hat. Dann gelten die Sätze:

1) Wenn die Funktionen $f_\nu(x|a)$ von den Variabeln x und den Parametern a *algebraisch* abhängen, so kann man unter den zur Gruppe gehörenden äquivalenten Systemen der Zusammensetzung eines der Art auswählen, dass jedes der ϱ Systeme:

---

90) Die Bestimmung der übrigen Typen ist noch nicht durchgeführt; einige Andeutungen giebt *Lie*, Norw. Arch. 10 (1885), p. 369; *Lie-Engel* 1, p. 457.

$$\begin{matrix} e_{\varrho 11} & \cdots & e_{\varrho r 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{\varrho 1 r} & \cdots & e_{\varrho r r} \end{matrix} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

regulär ist[91]).

2) Wenn eine *lineare* Gruppe der Ordnung r *algebraisch* ist, so kann man ihre erzeugenden infinitesimalen Transformationen

$$X_\varrho(f) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}^{(\varrho)} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \tag{92}$$

so wählen, dass ihre Koeffizienten *rationale* Funktionen der Parameter werden und dass zugleich ihre Parametergruppe die Form besitzt:

$$a'_\mu = \varphi_\mu(a_1, a_2, \ldots, a_m \mid b_1, b_2, \ldots, b_m) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{93}$$

in der die φ_μ *rationale* Funktionen ihrer Argumente sind[92]).

20. Besondere Arten von endlichen kontinuierlichen Gruppen. Von besonderen Gruppen seien erwähnt:

1) Die $n(n+2)$-gliedrige *projektive Gruppe* in n Variabeln[93]):

$$x'_\nu = \frac{a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \cdots + a_{\nu n} x_n + a_{\nu, n+1}}{a_{n+1,1} x_1 + a_{n+1,2} x_2 + \cdots + a_{n+1,n} x_n + 1} \tag{94}$$

und ihre Untergruppen (2—9)[94]):

2) Die $n(n+1)$-gliedrige *allgemeine lineare* Gruppe[95]):

$$x'_\nu = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \cdots + a_{\nu n} x_n + a_{\nu, n+1}. \tag{95}$$

3) Die n^2-gliedrige *homogene lineare* Gruppe[96]):

$$x'_\nu = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \cdots + a_{\nu n} x_n. \tag{96}$$

---

91) *L. Maurer,* Math. Ann. 39 (1891), p. 435.

92) *L. Maurer,* Münch. Ber. 1888, p. 145; Beweis ib. 1894, p. 297.

Zu dieser Nr. vergleiche man auch noch die Problemstellung *Lie-Engel* 3, p. 812; ferner *E. Cartan,* Par. C. R. 120 (1895), p. 544.

93) *Lie-Engel* 1, Kap. 26; 3, Kap. 2, 5, 9—13; *Lie-Scheffers,* Kap. 1—11; *F. Marotte,* Par. C. R. 129 (1899), p. 580. Vgl. III A 5.

94) Aufzählung aller Untergruppen für $n = 1$ *Lie,* Norw. Arch. 3 (1878), p. 145; für $n = 2$ ib. 10 (1885), p. 90 und p. 101; in integrierter Form, mit Zufügung der charakteristischen invarianten Differentialgleichungen, *W. Fr. Meyer,* Chic. Congr. Pap. 1893 [96], p. 188. Untergruppen für $n = 3$ *Lie,* Norw. Arch. 7 (1882), p. 445; 10 (1885), p. 111; *Lie-Engel* 3, Kap. 12 u. 13. — Dabei werden zwei Gruppen nur dann zu demselben Typus gerechnet, wenn sie durch eine *projektive* Transformation mit einander ähnlich sind. — Vgl. auch die Sätze von *E. Study* bei *Lie-Engel* 3, p. 785.

95) *Lie-Engel* 1, p. 557. Früher gebrauchte *Lie* „*lineare Gruppe*" in dem Sinne, in dem hier „*projektive Gruppe*" gebraucht ist.

96) *Lie-Engel* 1, Kap. 27; *Lie-Scheffers* p. 134, 491. Vgl. I B 2. — Alle ihre Untergruppen für $n = 2$ *Lie,* Norw. Arch. 10 (1885), p. 103; für $n = 3$ ib.

4) Die spezielle lineare Gruppe,
5) Die spezielle lineare homogene Gruppe } bestehend aus denjenigen Transformationen von (2), bezw. (3), deren Determinante $= 1$ ist[97]).

6) Die Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit $F_2(x_1, x_2, .., x_n) = 0$, bestehend aus denjenigen projektiven Transformationen, die diese Mannigfaltigkeit in sich transformieren[98]).

7) Die Gruppe der Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen (Gruppe der Euklidischen Geometrie).

8) Die Gruppe der Bewegungen allein.

9) Die $n(2n+1)$-gliedrige Gruppe, die einen linearen Komplex, d. h. eine schiefsymmetrische bilineare Gleichung $\sum p_{\lambda\mu} x_\lambda y_\mu = 0$ ($p_{\lambda\lambda} = 0$, $p_{\lambda\mu} = -p_{\mu\lambda}$) mit kogredienten Variabeln, oder was dasselbe ist, eine Pfaff'sche Gleichung der Form $\sum a_{\lambda\mu} x_\lambda dx_\mu = 0$ in sich transformiert[99]).

Ausserdem 10) die Gruppe der Transformationen durch reciproke Radien[100]).

11) Die Gruppe der Transformationen, die eine (definite) quadratische Differentialform $\sum f_{ik} dx_i dx_k$ invariant lassen[101]).

Kontinuierliche Gruppen von *Cremona*transformationen hat *F. Enriquez*[102]) untersucht.

21. Gemischte Gruppen. Es giebt auch Gruppen von Transformationen, die den Bedingungen A)—D) von Nr. 2 genügen, ohne durch ein einziges Gleichungssystem der Form (1) darstellbar zu sein. Jede solche Gruppe $\mathfrak{G}$ zerfällt in eine endliche oder unendliche Anzahl von Scharen, von denen jede durch ein solches System dargestellt werden kann, von denen aber nur eine eine Gruppe G ist (Beispiele: die Gruppe alle Bewegungen und Umlegungen; die Gruppe

---

p. 117. In integrierter Form *W. Fr. Meyer*, Chic. Congr. Pap. 1893 [96], p. 195. — Ein Satz über solche Transformationen *Engel*, Leipz. Ber. 1897, p. 249.

97) *Lie-Engel* 1, p. 557.

98) Vgl. I B 2, Nr. 3. Ihre Gliederzahl ist $l(2l+1)$ für $n = 2l+1$, $l(2l-1)$ für $n = 2l$. Bestimmung ihrer grössten Untergruppen: *H. Werner*, Diss. Leipz. 1889 (Math. Ann. 35, p. 113). — Ihre Invarianten: *E. Study*, Leipz. Ber. 1897, p. 443. — Alle Untergruppen für $n = 4$: *Lie-Engel* 3, p. 198.

99) Bestimmung ihrer Untergruppen für $n = 4$: *E. Knothe*, Diss. Leipz. 1892 (Norw. Arch. 15, p. 97).

100) Vgl. III A 7. Die Ähnlichkeit dieser Gruppe mit (10) vermöge einer Berührungstransformation gehört zu *Lie*'s frühesten Entdeckungen: Par. C. R. 71 (1870), p. 579; Christ. Forh. 1871, p. 85; Math. Ann. 5 (1871), p. 145.

101) *Lie*, Norw. Arch. 10 (1885), p. 389, 411. Vgl. III A 1.

102) Linc. Rend. (5) 2^1 (1893), p. 468, 532.

der linearen homogenen Transformationen, deren Determinante eine k^{te} Einheitswurzel; oder eine ganze Zahl; oder eine rationale Zahl ist; die Gruppe der Transformationen einer quadratischen Form in sich). Ist die Anzahl dieser Scharen endlich, so haben sie alle dieselbe Parameterzahl und bestehen aus Transformationen, die G invariant lassen[103]).

Man nennt solche Gruppen *gemischte*[104]), auch wohl *komplexe*[105]) Gruppen.

22. Unendliche kontinuierliche Gruppen. Von *unendlichen* kontinuierlichen Gruppen sind diejenigen untersucht, in deren Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{97}$$

die Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die allgemeinsten Lösungen eines Systems von einer endlichen Anzahl partieller Differentialgleichungen[106]):

$$W_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0 \tag{98}$$

sind. Eine solche Gruppe enthält infinitesimale Transformationen

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_i} \tag{99}$$

und die von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen[107]); dabei sind die Funktionen ξ_i die allgemeinsten Lösungen eines Systems von einer endlichen Anzahl linearer partieller Differentialgleichungen[108]). Umgekehrt definiert ein solches System die infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe, wenn es 1) passiv (II A 5, Nr. 2), 2) kein *Mayer*'sches System ist (ib. Nr. 3) und wenn 3) durch Bildung

---

103) *Lie*, Norw. Arch. 6 (1881), p. 166; *Lie-Engel* 1, p. 310; 3, p. 572; vgl. auch *W. Ahrens*, Leipz. Ber. 1897, p. 368 und Math. Ann. 50 (1897), p. 518. — Aufzählung aller algebraischen gemischten projektiven Gruppen für $n = 1$ *Klein*, Höh. Geom. 2, p. 278.

104) *Klein*, ib. p. 22.

105) *E. Picard*, Traité d'analyse 3, p. 514.

106) *S. Lie*, Christ. Forh. 1889, Nr. 7; Leipz. Ber. 1891, p. 317 (red. von *Engel*).

107) Christ. Forh. 1889, Nr. 7; Leipz. Ber. 1891, p. 317.

108) Leipz. Ber. 1891, p. 358. Ursprünglich hatte *Lie* diesen Satz als „Axiom", bezw. als Definition an die Spitze seiner Untersuchungen gestellt: Christ. Forh. 1883, Nr. 12; Math. Ann. 24 (1884), p. 553 („Definitionsgleichungen der Gruppe"). — Über diese Gleichungen vgl. man auch *Engel*, Math. Ann. 27 (1886), p. 1; Leipz. Ber. 1894, p. 25; *P. Medolaghi*, Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 320.

des Klammerausdrucks (Nr. 5) aus irgend zwei Lösungen immer wieder eine Lösung sich ergiebt[109]). Jede derartige Gruppe besitzt Differentialinvarianten, wenn man genügend viele Hülfsvariable mit hinzunimmt, die von der Gruppe nicht transformiert werden[110]).

Hat eine unendliche Gruppe grösstmögliche Transitivität im Infinitesimalen, so besteht sie entweder aus allen Punkttransformationen, oder aus allen denjenigen, die die Raum- (bezw. Flächen-) Inhalte invariant lassen, oder aus denjenigen, die deren Verhältnisse invariant lassen[111]).

109) Christ. Forh. 1889, Nr. 7; Leipz. Ber. 1891, p. 379.

110) Math. Ann. 24 (1884), p. 539; Leipz. Ber. 1891, p. 371.

111) Leipz. Abh. 21 (1895), p. 81 (von *Engel* redigiert). — Aufzählung aller unendlichen Gruppen von Punkttransformationen für $n = 2$ ib. p. 51; aller primitiven solchen Gruppen für $n = 5$ bei *G. Kowalewski*, Leipz. Ber. 1899, p. 143.

II A 7a. RANDWERTAUFGABEN BEI GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

MAXIME BÔCHER

IN CAMBRIDGE, MASS.

Inhaltsübersicht.

1. Die fundamentalen Fragestellungen und ihre Entstehung aus der mathematischen Physik.
2. Die grundlegende Abhandlung von *Sturm* und das Oscillationstheorem im Falle eines Parameters.
3. Weiteres über den Fall eines Parameters.
4. Ausdehnung der *Sturm*'schen Resultate auf Differentialgleichungen höherer Ordnung.
5. Das Oscillationstheorem im Falle mehrerer Parameter.
6. Exkurs über polynomische Lösungen.
7. Die seit 1890 von partiellen auf gewöhnliche Differentialgleichungen übertragenen Methoden.

Litteratur.

Man vergleiche die bezüglichen Kapitel der folgenden Bücher:

E. Mathieu, Cours de Physique mathématique, Paris 1873.

Lord Rayleigh, Theory of Sound, Lond. 1877, deutsch von *Fr. Neesen*, Braunschw. 1880, 2d ed. revised and enlarged 1894.

F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891.

M. Böcher, Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894.

F. Klein, Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, autographiertes Vorlesungsheft, Gött. 1894.

E. Picard, Traité d'Analyse 3, Paris 1896.

1. **Die fundamentalen Fragestellungen und ihre Entstehung aus der mathematischen Physik.** Es werden uns im folgenden gewöhnliche reelle Differentialgleichungen zweiter Ordnung[1]) beschäftigen. Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung enthält zwei Integrationskonstanten (II A 4 a, Nr. 6), die wir als Parameter ansehen

1) Nur in Nr. 4 kommen Gleichungen höherer Ordnung vor.

wollen. Ausserdem möge die Differentialgleichung selber k Parameter enthalten. Bezeichnen wir also durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ beliebige Lösungen unserer Differentialgleichung, so kommen in denselben $k+2n$ Parameter vor. Fassen wir n Segmente der x-Axe $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ ins Auge, so subsumieren sich die Randwertaufgaben unter die Frage, *ob und auf wie mannigfaltige Weisen diese $k+2n$ Parameter so bestimmt werden können, dass die Lösung y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) innerhalb des Segmentes a_ib_i nebst ihrer ersten Ableitung stetig verläuft, und in den Endpunkten a_i und b_i gewisse Grenzbedingungen erfüllt.*

Das hiermit bezeichnete recht ausgedehnte Feld ist bis jetzt nur zum kleinen Teil bearbeitet. Es sind hier hauptsächlich zwei Fälle, welche schon behandelt sind, die wir mit a) und c) bezeichnen. Seiner grossen Wichtigkeit halber stellen wir aber noch als besonderen Fall b) einen Spezialfall von c) hin.

a) $n = 1$, $k = 0$. Die Grenzbedingungen bestehen darin, dass die Lösung der Differentialgleichung in den Endpunkten des Segmentes willkürlich vorgeschriebene Werte annehmen soll.

b) $n = k = 1$. Die Differentialgleichung wird als linear und homogen vorausgesetzt. Die Grenzbedingungen bestehen darin, dass der Quotient y_1'/y_1 beliebig vorgeschriebenen (vielleicht unendlichen) Werten in den Endpunkten des Segmentes sich nähert[2]).

c) $n = k > 1$. Die Differentialgleichung wird als linear und homogen vorausgesetzt, und die Grenzbedingungen sind dieselben wie in b).

Diese Fragestellungen verdanken ihr Entstehen der mathematischen Physik.

In dem Falle a) ist diese Beziehung zur Physik blos eine indirekte, indem das Problem als Analogon ähnlicher Probleme bei den partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik[3]) in Angriff genommen wurde, und zwar erst in den letzten Jahren von *E. Picard*. Diese Untersuchungen *Picard*'s, sowie auch die Anwendungen derselben, welche er auf die Randwertaufgabe b) machte, werden wir in Nr. **7** besprechen.

Die Aufgabe b) geht in das 18. Jahrhundert zurück. Man hat in der mathematischen Physik häufig von einer Randwertaufgabe bei einer partiellen Differentialgleichung auszugehen. Zur Lösung derselben

---

2) Diese Grenzbedingungen werden in etwas allgemeinerer, sowie auch in modifizierter Form in Nr. **3** besprochen.

3) Als ursprünglicher Ausgangspunkt möge hier die fundamentale (erste) Randwertaufgabe der Potentialtheorie erwähnt werden. Vgl. II A 7b, Nr. **17**.

bildet man zunächst Produkte, welche der partiellen Differentialgleichung genügen und deren Faktoren je nur eine Variable enthalten. Jeder dieser Faktoren genügt dann einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung und es handelt sich hierbei in den einfachsten Fällen gerade um die Randwertaufgabe b)[4]). In komplizierteren Fällen kommt in derselben Weise die Randwertaufgabe c) vor; doch ist *G. Lamé* (1839)[5]) der erste gewesen, der einen solchen Fall behandelt hat.

Diese Methode physikalische Probleme zu behandeln, war schon *L. Euler* in ziemlich allgemeinen Fällen bekannt[6]); doch weder *Euler* noch seine Zeitgenossen, mit Ausnahme von *J. le R. d'Alembert* (s. u.), haben die Notwendigkeit einer Behandlung der sich hier aufdrängenden Fragen erkannt. Es wurde vielmehr von ihnen die Möglichkeit der in b) betrachteten Parameterbestimmung aus physikalischen Gründen, oder gar aus blosser Analogie mit einfacheren Fällen, stillschweigend angenommen. Auch *J. Fourier* (der auf diesem Gebiet als *Euler*'s Nachfolger anzusehen ist) geht nicht viel tiefer, obgleich er in einzelnen Fällen eine analytische Behandlung versucht[7]).

D'Alembert[8]) dagegen, wie oben bemerkt, hat die Notwendigkeit einer analytischen Behandlung erkannt. Derselbe geht von dem Problem einer schwingenden ungleichförmigen Saite aus, welche auf die Gleichung führt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\varphi(x)\cdot y,$$

wo $\varphi(x)$ eine gegebene positive Funktion bedeutet. *D'Alembert* fragt,

4) Es sei noch bemerkt, dass diese Randwertaufgabe bisweilen auch direkt (d. h. ohne Vermittelung einer partiellen Differentialgleichung) auftritt. Als Beispiel hierfür möge die Bestimmung der Gleichgewichtsfiguren einer unhomogenen Saite bei Vernachlässigung der Schwere dienen, welche in einer Ebene liegt, die sich gleichförmig um die Verbindungslinie der festgehaltenen Endpunkte der Saite dreht. Hierbei muss man, um auf eine lineare Gleichung zu kommen, die Länge der Saite als nur wenig grösser als die Entfernung der Endpunkte voraussetzen.

5) J. de math. 4 (1839), p. 126.

6) Vgl. Petrop. N. Comm. 10 (1764) [66], p. 243.

7) So ist z. B. in § 284 der Théorie de la chaleur (Paris 1822) von einer Differentialgleichung die Rede, welche durch Kreisfunktionen gelöst werden kann, aus deren bekannten Eigenschaften die Möglichkeit der Parameterbestimmung sofort folgt. Ferner in § 307 betrachtet *Fourier* einerseits unnötigerweise die imaginären Parameterbestimmungen, welche selbst wenn sie existierten, hier nicht in Betracht kommen würden; andererseits schliesst er auf die Möglichkeit reeller Parameterbestimmungen, wie es scheint, durch die Annahme, eine trauscendente Gleichung habe stets unendlich viele reelle oder imaginäre Wurzeln!

8) Berl. Hist. 1763 [70], p. 244.

ob man den Parameter λ so bestimmen kann, dass diese Gleichung eine Lösung zulässt, welche in a und in b verschwindet ohne identisch zu verschwinden. Um diese Frage zu beantworten führt er die obige Gleichung in eine *Riccati*'sche Gleichung (II A 4b, Nr. 8, 27) über durch Einführung der neuen abhängigen Variablen $z = y'/y$. Indem er diese Gleichung untersucht kommt er zu dem Resultat[9]), dass die gewünschte Parameterbestimmung stets möglich ist, und zwar so, dass die betreffende Lösung y zwischen a und b nicht verschwindet. Dass es aber nur einen solchen Parameterwert giebt, wird nicht erwähnt; ebensowenig ist von den unendlich vielen Parameterwerten die Rede, welche man bekommt, wenn man Nullstellen von y zwischen a und b zulässt.

Mit dieser Ausnahme ist die Randwertaufgabe b) bezw. c) nicht nur nicht in Angriff genommen worden, sondern nicht einmal formuliert bis zum Jahre 1833 bezw. 1881, aus welchen Jahren die Arbeiten von *C. Sturm* bezw. *F. Klein* stammen, welche bezw. in Nr. 2 und 5 besprochen werden sollen. Während aber die Veranlassung zur *Klein*schen Arbeit in der mathematischen Physik lag[10]), ist es nicht so klar, dass dies bei *Sturm* der Fall gewesen ist[11]), obwohl er die Beziehung seiner Resultate zur mathematischen Physik selbstverständlich erkannte, und sehr bald in diesem Sinne in Verbindung mit *J. Liouville* Anwendungen davon machte. Er ist ursprünglich[12]) von endlichen *Differenzen*gleichungen (I E) ausgegangen, und hat erst hinterher die hier gewonnenen (übrigens nicht publizierten) Resultate auf *Differential*gleichungen übertragen.

In noch einer anderen Richtung haben die Entwicklungen des vorigen Jahrhunderts auf unsere Randwertaufgaben b) und c) vorbereitend gewirkt. Es handelt sich um eine Arbeit von *P. S. Laplace*[13]), der, von einem Problem der Attraktionstheorie ausgehend, ein gewisses dreifaches Integral, welches eine Funktion der drei Polarkoordinaten (r, ϖ, ϑ) ist, behandelt (II A 7b, Nr. 21). Dieses Integral entwickelt

9) Die Behandlung enthält eine leicht auszufüllende Lücke.

10) Und zwar in dem Bestreben, durch Betrachtung eines allgemeineren Falles neues Licht auf den Appendix B der Natural Philosophy von *Thomson* und *Tait* zu werfen.

11) Die algebraischen sowie auch die mathematisch-physikalischen Tendenzen *Sturm*'s gehen auf *Fourier* zurück. Wie innig verschmolzen diese zwei Tendenzen bei *Sturm* waren, sieht man aus dessen früheren Arbeiten im Bull. de Férussac 11, 12.

12) Vgl. J. de math. 1 (1836), p. 186.

13) Par. Hist. 1782 [85], p. 113.

er in eine Reihe, von der jedes Glied ein Polynom in $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ als Faktor enthält. Anstatt aber diese Polynome direkt auszuwerthen, wie es in einem einfacheren Falle *A. M. Legendre*[14]) gethan hatte, macht *Laplace* die Bemerkung, dass dieselben Differentialgleichungen genügen, welche, wenn man $\mu = \cos\vartheta$ setzt, die Form haben:

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\frac{d\beta}{d\mu}\right]}{d\mu} - \left[\frac{n^2}{1-\mu^2} - i(i+1)\right]\beta = 0.$$

Hierbei weiss *Laplace* von vornherein, dass die zwei Parameter i und n ganze Zahlen sind, und die Differentialgleichung hat bei ihm nur den Zweck, die Berechnung dieser ganzen rationalen Funktionen von μ und $\sqrt{1-\mu^2}$ zu erleichtern. Von einer Randwertaufgabe ist keine Rede. Es liegt aber nahe, das Laplace'sche und namentlich andere ähnliche Probleme[15]) so in Angriff zu nehmen, dass man n als ganzzahlig voraussetzt, i aber so zu bestimmen versucht, dass die Differentialgleichung eine Lösung besitzt, welche für die Werte $\mu = \pm 1$ (d. h. für die Endpunkte des für μ in Betracht kommenden Intervalles) endlich bleibt, wobei man es mit einer nur wenig modifizierten Randwertaufgabe b) zu thun hat. Hierbei stellt es sich heraus, dass die notwendige und hinreichende Bedingung für eine solche Lösung darin besteht, dass dieselbe eine ganze rationale Funktion von μ und $\sqrt{1-\mu^2}$ ist. Die Randwertaufgabe wird also hier dadurch gelöst, dass wir die Werte von i bestimmen, für welche die Differentialgleichung eine ganze rationale Funktion von μ und $\sqrt{1-\mu^2}$ als Lösung zulässt. Dies sind, wie man durch eine leichte Rechnung bestätigt, die ganzzahligen Werte von i.

An diese Laplace'sche Abhandlung schliessen sich die Untersuchungen von *Lamé*[16]) an über die nach ihm benannte Differentialgleichung. Die darin vorkommenden Parameter sucht *Lamé* so zu bestimmen, dass die Gleichung eine Lösung zulässt, welche, abgesehen von gewissen einfachen irrationalen Faktoren, ein Polynom ist. Das hiermit bezeichnete Problem hat, wie in Nr. 5 näher auseinandergesetzt wird, eine ganz ähnliche Beziehung zur Randwertaufgabe c), wie die soeben besprochene Laplace'sche Arbeit zu b). Diese speziellen Untersuchungen haben dann auf die allgemeineren in Nr. 6 besprochenen geführt.

---

14) Par. sav. [étr.] 10 (1785), p. 411.

15) So z. B. in dem ebenfalls von *Laplace* (Connaissance des tems pour l'an 1823 (1820), p. 249 ff. und Méc. cél. livre XI (oeuvr. 5, p. 82) behandelten Problem der Wärmeleitung in einer Kugel.

16) J. de math. 4 (1839), p. 126.

2. Die grundlegende Abhandlung von Sturm[17]) und das Oscillationstheorem im Falle eines Parameters. *Sturm* geht von der allgemeinen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aus, welche er in der Gestalt schreibt:

$$\frac{d\left(K\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + Gy = 0. \tag{1}$$

Hierbei bedeuten K und G beliebige Funktionen von x und von einem Parameter λ, welche jedoch in dem in betracht gezogenen Intervall $a \leqq x < b$ nicht unendlich werden dürfen. Auch darf K in diesem Intervall nicht verschwinden[18]), und wird also der Einfachheit halber als positiv vorausgesetzt.

Es wird nun eine bestimmte Lösung von (1) dadurch ausgewählt, dass man verlangt, y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ sollen im Punkte a gewissen willkürlich gegebenen Funktionen von λ gleich sein[19]). *Sturm* beschäftigt sich nun mit der Variation der Funktion y mit λ. Insbesondere stellt er sich die folgenden zwei Fragen: 1) Wie variieren die Wurzeln von y mit λ? 2) Wie variiert mit λ das Verhältniss $K\frac{\partial y}{\partial x}/y$, wenn man x als Konstante ansieht? Zur Beantwortung dieser Fragen leitet er aus der Differentialgleichung die auch sonst nützliche Formel ab[20]):

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x y(x, \lambda_1) \cdot y(x, \lambda_2) [G(x, \lambda_2) - G(x, \lambda_1)] dx$$

$$- \int_a^x \frac{\partial y(x, \lambda_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial y(x, \lambda_2)}{\partial x} [K(x, \lambda_2) - K(x, \lambda_1)] dx,$$

wo

$$\Phi(x) = y(x, \lambda_2) K(x, \lambda_1) \frac{\partial y(x, \lambda_1)}{\partial x} - y(x, \lambda_1) K(x, \lambda_2) \frac{\partial y(x, \lambda_2)}{\partial x}.$$

17) September 1833 der Pariser Akademie vorgelesen; J. de math. 1 (1836), p. 106—186 abgedruckt.

18) Vgl. jedoch, was die Endpunkte a und b des Intervalles angeht, p. 108 der Sturm'schen Abhandlung.

19) In den weitaus meisten physikalischen Anwendungen sind diese Funktionen von λ blosse Konstanten. In einigen Problemen ist dies jedoch nicht der Fall, vgl. z. B. *O. Heaviside*, Electrical Papers 1, p. 142 ff.

20) Vgl. z. B. II A 8, wo die Formel zur Bestimmung der Koeffizienten in Reihenentwicklungen, welche nach Lösungen linearer Differentialgleichungen fortschreiten, sich unter die hier gegebene Formel als Spezialfall subsumiert. Es treten derartige Spezialfälle dieser Formel vielfach vor dieser Sturm'schen Abhandlung auf.

Jetzt betrachtet *Sturm* nur den Fall, dass mit wachsendem λ in dem Punkte $x = a$ die Funktion $K\frac{\partial y}{\partial x}/y$ monoton wächst[21]) und dass für jeden in Betracht kommenden Wert von x die Funktion G monoton abnimmt, K aber monoton wächst. Dann folgert er[22]), indem er die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ als unendlich klein annimmt:

1) *dass die Wurzeln von y mit wachsendem λ monoton wachsen;*

2) *dass für jeden in Betracht kommenden Wert von x $K\frac{\partial y}{\partial x}/y$ monoton wächst*[23]).

Durch diese Sätze ist man im Stande, die Lösungen zweier Differentialgleichungen der Form (1), welche keinen Parameter λ enthalten, mit einander zu vergleichen, falls nur die Funktion G der ersten Gleichung nirgends grösser, die Funktion K der ersten nirgends kleiner ist als die entsprechende Funktion der zweiten Gleichung; denn man kann ja offenbar, und zwar auf unendlich viele Weisen, eine Gleichung der Form (1) hinschreiben, welche einen Parameter λ enthält und die sich auf die zwei gegebenen Gleichungen für zwei Werte von λ reduziert, während die Funktionen G und K sich zwischen diesen Werten von λ monoton ändern.

Einfache Sätze werden erhalten, wenn man auf diese Weise die gegebene Gleichung mit einer Gleichung vergleicht, in welcher K und G konstant sind, welche also durch elementare Funktionen gelöst werden kann. Auf diese Sätze gestützt kommt *Sturm* schliesslich auf folgendes sogenannte[24])

Oscillationstheorem[25]): *Lassen wir λ zwischen zwei (endlichen oder unendlichen) Werten λ' und λ'' variieren ($\lambda' < \lambda''$). Hierbei möge mit wachsendem λ die Funktion G monoton abnehmen, K aber monoton wachsen; und zwar möge das Verhältnis G/K von $+\infty$ bis $-\infty$ abnehmen. Seien ferner $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ zwei willkürlich gegebene Funktionen, welche mit λ monoton wachsen. Dann giebt es einen und nur einen Werth $\lambda = \bar{\lambda}$, für welchen die Gleichung* (1) *eine Lösung y besitzt, welche in dem Intervall $a < x < b$ eine beliebig vorgeschriebene*

---

21) Die Ausdrücke „monoton wachsen", „monoton abnehmen" (II A 1, Nr. 11) schliessen die Möglichkeit des Konstantseins nicht aus.

22) *Loc. cit.* p. 116, 117.

23) Diese Sätze leitet *Klein*, wenn auch nur in speziellen Fällen, aus mechanischen Betrachtungen ab; vgl. dessen: Lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, p. 268 ff., 1894.

24) Dieser Name rührt von *Klein* her; vgl. Gött. Nachr. März 1890.

25) Wir sprechen dieses Theorem gleich etwas allgemeiner aus, wie es *Sturm* thut.

Anzahl von Malen verschwindet, und für welche die Funktion $K\frac{\partial y}{\partial x}/y$ *in den Punkten* a *und* b *resp. die Werte* $f_1(\lambda)$ *und* $-f_2(\lambda)$ *annimmt.*

Für gegebene Randbedingungen, d. h. für gegebene Funktionen f_1 und f_2, giebt es also eine unendliche Reihe von Parameterwerten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (sog. *ausgezeichnete Parameterwerte* [*F. Pockels loc. cit.*]), welche man vermittelst des Oscillationstheorems bestimmt, je nachdem man verlangt, die betreffende Lösung der Differentialgleichung solle keinmal, einmal, zweimal u. s. w. im Intervalle verschwinden. Diese Parameterwerte bilden offenbar die Gesamtheit der reellen im Intervalle $(\lambda'\lambda'')$ liegenden Wurzeln einer leicht hinzuschreibenden transcendenten Gleichung. Für einen jeden dieser ausgezeichneten Parameterwerte besitzt die Differentialgleichung, dem Oscillationstheorem zufolge, eine (und abgesehen von einem willkürlich bleibenden konstanten Faktor offenbar nur eine) Lösung, welche in a und b den gewünschten Grenzbedingungen genügt. Dieselben heissen (*F. Pockels*) *ausgezeichnete Lösungen*, und mögen mit $y_0, y_1, y_2, \ldots$ bezeichnet werden, wobei der Index jedesmal die Anzahl der Nullstellen angiebt. Dann beweist *Sturm* den Satz:

Die Wurzeln zweier zu denselben Grenzbedingungen gehörigen aufeinanderfolgenden ausgezeichneten Lösungen y_n *und* y_{n+1} *separieren sich gegenseitig.*

Die hier angeführten Sätze von *Sturm* erschöpfen keineswegs die in dieser Abhandlung gewonnenen Resultate; es sei noch z. B. auf seine Untersuchungen betreffs der Wurzeln des Ausdrucks $K dy/dx + py$ hingewiesen, wobei p eine der Ungleichung $GK + p^2 - K dp/dx > 0$ genügende Funktion von x bedeutet[26]).

3. Weiteres über den Fall eines Parameters[27]). Bald nach dem Erscheinen dieser Sturm'schen Abhandlung sind eine Reihe von Arbeiten von *Sturm* und von *J. Liouville* erschienen[28]), welche

26) Noch andere Resultate dieser Abhandlung sowie auch der sofort zu citierenden Arbeiten von *Sturm* und *Liouville* werden in II A 8 und II B 4 besprochen.

27) Wegen der neuerdings von *Picard* angewandten Methode um einige Resultate *Sturm*'s abzuleiten vgl. Nr. 7.

28) *C. Sturm*, J. de math. 1 (1836), p. 373; *C. Sturm* u. *J. Liouville*, ib. 2 (1837), p. 220; *J. Liouville*, ib. 1 (1836), p. 253, 269; 2 (1837), p. 16, 418, 439. Diese Abhandlungen sind hauptsächlich deshalb von Bedeutung, weil die Reihenentwicklungen nach den ausgezeichneten Lösungen in ihnen zum ersten mal behandelt werden. Vgl. II A 8.

Es möge hier erwähnt werden, dass die Liouville'sche Arbeit 2, p. 439

demselben Gegenstande gewidmet sind. Es wird aber in ihnen, seines grösseren physikalischen Interesses wegen, nur der Fall in Betracht gezogen, in welchem K von λ unabhängig ist, während G die Gestalt hat $\lambda g - l$, wobei g und l positive Funktionen von x allein bedeuten. Auch werden f_1 und f_2 als von λ unabhängig und zwar als positiv angenommen. Bei solchen speziellen Voraussetzungen kann man natürlich die ursprünglichen Sturm'schen Sätze spezifischer gestalten. So z. B. findet man hier durch Anwendung einer Methode von *S. D. Poisson*[29]), dass die obenerwähnte transcendente Gleichung zur Bestimmung der ausgezeichneten Parameterwerte (welche jetzt in λ analytisch ist) keine imaginären Wurzeln besitzt. Es bilden also die ausgezeichneten Parameterwerte, da das Intervall $\lambda'\lambda''$ jetzt mit der ganzen λ-Axe zusammenfällt, die Gesamtheit der Wurzeln dieser Gleichung. Dieselben sind, wie man leicht nachweist, sämtlich positiv; auch sind sie sämtlich einfache Wurzeln[30]). Schliesslich findet man[31]), dass für grosse n sich $\sqrt{\lambda_n}$ asymptotisch durch $n\pi/Z$ [32]) darstellen lässt, wo:

$$Z = \int_a^b \sqrt{g/K}\, dx.$$

Wir wollen noch folgende, allerdings von *Liouville* nicht gemachte Bemerkung hier anknüpfen. Es handelt sich um die Frage, wie sich die ausgezeichneten Parameterwerthe ändern, wenn das Intervall ab unbegrenzt wächst. In dem einfachen Falle, wo man es mit einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu thun hat, häufen sich diese Parameterwerte auf der ganzen positiven Hälfte der λ-Axe in der Weise, dass auf einem beliebigen Stück dieser Axe beliebig

---

eine spezielle *nicht* homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung behandelt, welche freilich durch trigonometrische Funktionen gelöst werden kann.

29) Bull. Soc. Philomath. 1826, p. 145; vgl. auch *Sturm*, J. de math. 1 (1836), p. 384 ff. Dieser Poisson'sche Beweis besteht aus einer einfachen Anwendung der in Nr. 2 gegebenen Integralformel.

30) Man vgl. z. B. den zuletzt citierten Aufsatz von *Sturm*.

31) *J. Liouville*, J. de math. 2 (1837), p. 30.

32) Der Fall, in welchem die ausgezeichneten Lösungen in einem Endpunkte des Intervalles ab verschwinden, in dem anderen aber nicht, bildet eine Ausnahme. In diesem Falle wird $\sqrt{\lambda_n}$ asymptotisch durch die Formel $(n+\frac{1}{2})\pi/Z$ dargestellt.

Eine Näherungsformel anderer Art für die ausgezeichneten Parameterwerte giebt *M. Radaković* (Monatsh. für Math. u. Phys. 5 [1894], p. 228). Dieselbe bezieht sich auf alle Werte von n; dafür aber nur auf den Fall $K = 1$, $l = 0$, $f_1 = f_2 = \infty$, g eine zwischen a und b nur wenig variierende Funktion.

viele Parameterwerte zu liegen kommen. Man möchte vermuten, dass ähnliches in dem allgemeinen Falle gilt. Dass dem aber nicht so ist, hat *W. Wirtinger* zuerst hervorgehoben[33]). Dies kann man vielleicht am einfachsten an einem von *Wirtinger* nicht besprochenen Fall sehen, nämlich dann, wenn das Verhältniss g/K bei zunehmendem x so stark gegen Null konvergiert, dass $\int_a^x \sqrt{g/K}\,dx$ einen endlichen Wert hat. Hier schliesst man aus der oben geschriebenen asymptotischen Darstellung, dass sich die Parameterwerte bei zunehmendem Intervall ab überhaupt nicht häufen[34]). Interessanter aber ist der von *Wirtinger* behandelte Fall: $K = 1$, $l = 0$, $f_1 = f_2 = \infty$, $g =$ einer geraden periodischen Funktion. Hier beweist *Wirtinger*, dass die ausgezeichneten Parameterwerte bei zunehmendem Intervall ab sich freilich häufen, dass sie aber im allgemeinen nur gewisse Stücke der positiven Hälfte der λ-Axe immer mehr ausfüllen, die übrigen Teile der λ-Axe aber ganz leer lassen[35]).

Wir kehren jetzt zur grundlegenden Abhandlung *Sturm*'s zurück. Wie zu jener Zeit üblich war, spricht sich *Sturm* nicht näher über die Natur der in seinen Beweisen vorkommenden Funktionen aus. Dieselben sollen jedoch jedenfalls stetige Funktionen ihrer Argumente sein; und es geht auch aus dem Gange der Beweise hervor, dass sie auch zum Theil als differenziierbar angesehen wurden. Für die Richtigkeit der erhaltenen Sätze ist aber diese letzte Annahme nicht nötig. Andererseits hat die moderne Entwicklung mathematischer Strenge die Beweise von *Sturm* als nicht in allen Punkten einwandsfrei erkennen lassen. Neuerdings[36]) hat Referent es unter-

33) Math. Ann. 48 (1896), p. 387.

34) Um diesen Schluss streng zu gestalten bedarf es noch einer besonderen Überlegung, welche aber, jedenfalls unter gewissen einschränkenden Annahmen, mit Leichtigkeit streng durchgeführt werden kann.

35) Diese Untersuchungen schliessen sich an das Problem der Schwingung einer unendlich langen Saite an, und *Wirtinger* drückt sein Resultat dadurch aus, dass er sagt, die Schwingung würde im allgemeinen in der Ausdrucksweise der Optik einem Bandenspektrum entsprechen.

Diese Frage steht offenbar in engster Beziehung zu dem weiter unten besprochenen Fall, in welchem sich das Intervall ab bis an einen singulären Punkt der Differentialgleichung erstreckt, denn der Punkt $x = \infty$ ist ja im allgemeinen ein singulärer und zwar ein irregulärer Punkt der Differentialgleichung (II B 4).

36) N. Y. Bull., April, Juni und Oktober 1898. Die hier gegebenen Beweise lassen sich zum Teil vereinfachen; vgl. eine vorläufige Mitteilung vom Referenten N. Y. Bull., Dec. 1899, p. 100.

nommen, die Hauptresultate *Sturm*'s auf feste Grundlage zu stellen, wobei sich ergiebt, dass die Methoden von *Sturm* im wesentlichen beibehalten werden können. Bei seiner Behandlung hat Referent sich auf Gleichungen der Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi \cdot y$$

beschränkt (einen Fall, der auch von *Sturm* besondere Berücksichtigung gefunden hatte), denn auf diese Form kann jede Gleichung (1) sowohl durch Änderung der unabhängigen als auch der abhängigen Variablen gebracht werden[37]).

Die Frage, ob die Sturm'schen Sätze noch in dem Falle bestehen bleiben, dass ein Endpunkt (oder beide Endpunkte)[38]) des betreffenden Intervalls singulärer Punkt der Differentialgleichung wird, ist in mehreren Fällen und durch verschiedene Methoden untersucht worden[39]). Wir führen hier nur folgende zwei Hauptsätze an, bei denen man es mit Differentialgleichungen mit *analytischen* Koeffizienten zu thun hat, die in dem Endpunkte a des betreffenden Intervalles einen *regulären singulären Punkt* (vgl. II B 4) mit reellen Exponenten haben. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass der andere Endpunkt b ein nicht-singulärer Punkt ist.

Nimmt man als Grenzbedingung in dem Punkte a an, dass die Lösung der Differentialgleichung zum grösseren Exponenten gehört, so bleiben die Sturm'schen Sätze bestehen[40]).

Nimmt man als Grenzbedingung in dem Punkte a an, dass die Lösung der Differentialgleichung eine beliebig vorgeschriebene lineare Verbindung mit konstanten Koeffizienten der zu den zwei Exponenten gehörigen Lösungen ist, so bleiben die Sturm'schen Sätze bestehen, falls (α) *die Exponentendifferenz in a kleiner ist wie 1;* (β) *die Exponenten von dem Parameter* λ *unabhängig sind*[41]).

---

37) Eine zweite Beschränkung der Allgemeinheit liegt darin, dass die oben durch $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ bezeichneten Funktionen als Konstanten vorausgesetzt werden; doch ist es leicht, von diesem speziellen zum allgemeinen Falle vermittelst der zwei ersten Theoreme des zweiten Aufsatzes überzugehen.

38) Auch die Möglichkeit, dass singuläre Punkte innerhalb des Intervalles auftreten, wird vom Referenten in Betracht gezogen.

39) *L. Schläfli*, Math. Ann. 10 (1876), p. 137; das oben citierte Buch des Referenten, p. 174 ff.; *F. Klein*, Lin. Diff.-Gl. d. 2. Ord. p. 429; *M. B. Porter*, N. Y. Bull., Mai 1897; *E. B. Van Vleck*, N. Y. Bull., Juni 1898; *M. Böcher*, N. Y. Bull., Okt. 1898.

40) Wohl zum ersten mal ausgesprochen von *M. B. Porter*, N. Y. Bull., Mai 1897.

41) *M. Böcher*, N. Y. Bull., Okt. 1898. Wegen einer weiteren Ausdehnung

Zum Schluss kommen wir noch auf die modifizierte Form der Randwertaufgabe b) zu sprechen, wobei anstatt die Werte von y'/y in a und b vorzuschreiben, man verlangt, dass die Gleichungen bestehen:

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$ [42])

Auf diese Fragestellung wurde *Fourier* geführt, indem er das Problem der Wärmeleitung in einem dünnen in sich zurücklaufenden Draht untersuchte[43]). Indem er aber den Draht als gleichförmig voraussetzt, handelt es sich bei ihm um einen von unserem Standpunkte aus trivialen Fall.

Das allgemeine hier bezeichnete Problem scheint nicht behandelt worden zu sein. Der spezielle Fall, in welchem die Koeffizienten der Differentialgleichung in den Punkten $a + \xi$ und $b - \xi$ dieselben Werte besitzen, lässt sich leicht auf die gewöhnliche Randwertaufgabe b) zurückführen[44]). In der That braucht man nur das halbe Segment $a < x < (a + b)/2$ ins Auge zu fassen und entweder in beiden Endpunkten $y = 0$ oder in beiden Endpunkten $y' = 0$ als Randbedingung vorzuschreiben.

In diesem Problem tritt uns zum ersten Mal die Möglichkeit entgegen, dass sog. *zweifache ausgezeichnete Parameterwerte* (*F. Pockels loc. cit.*) auftreten; d. h. Parameterwerte, für welche zwei linear unabhängige und folglich sämtliche Lösungen der Differentialgleichung ausgezeichnete Lösungen sind. Im Falle konstanter Koeffizienten z. B. sind *alle* ausgezeichnete Parameterwerte zweifache.

4. Ausdehnung der Sturm'schen Resultate auf Differentialgleichungen höherer Ordnung. Eine solche Ausdehnung auf gewisse lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung ist schon durch das physikalische Problem der Schwingung elastischer Stäbe und Platten angezeigt, aber nur einige Spezialfälle sind hier behandelt worden[45]). Handelt es sich um die harmonischen Schwingungen eines unhomogenen elastischen Stabes, so hat man es mit der Differentialgleichung:

---

dieser Sätze vgl. man eine vorläufige Mitteilung des Referenten, N. Y. Bull., April 1900.

42) Diese Randwertaufgabe stimmt offenbar mit folgendem Problem überein: *Für welche Werte des Parameters λ besitzt eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten periodische Funktionen von x sind, mindestens eine Lösung mit derselben Periode?* Vgl. p. 462 oben.

43) Théorie de la chaleur, p. 239.

44) Vgl. das oben citierte Buch des Referenten, p. 181 ff.

45) Man findet die meisten dieser Fälle in *Lord Rayleigh*'s Theory of Sound. Vgl. auch *G. Kirchhoff*, Berl. Ber. Okt. 1879 und *F. Meyer zur Capellen*, Ann. Phys. Chem. (2) 33 (1888), p. 661.

$$\frac{d^2 K d^2 y}{dx^4} = \lambda g y$$

zu thun, wo K und g positive von λ unabhängige Funktionen von x bedeuten, und es handelt sich darum, den Parameter λ so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung eine Lösung besitzt, welche in jedem Endpunkte a und b des Stabes eine der drei Grenzbedingungen erfüllt:

festgeklemmtes Ende $\begin{cases} y = 0, \\ \frac{dy}{dx} = 0; \end{cases}$ gehaltenes Ende $\begin{cases} y = 0, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = 0; \end{cases}$ freies Ende $\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \\ \frac{d^3 y}{dx^3} = 0. \end{cases}$

Lord Rayleigh giebt[46]), auf allgemeine mechanische Prinzipien gestützt, einige Resultate hier an, welche enge Analogie mit den Sturm'schen Sätzen besitzen. Neuerdings[47]) ist diese Frage für den Fall $K = \text{Const.}$, durch Anwendung Picard'scher Methoden (vgl. Nr. 7), von *A. Davidoglou* in Angriff genommen.

Eine etwas andere Randwertaufgabe hat *J. Liouville* behandelt[48]), und zwar gleich für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung von der Form:

$$\frac{d \cdot K d \cdot L \cdots d \cdot M d \cdot N dy}{dx^n} + \lambda y = 0,$$

wobei $K, L, \ldots, M, N$ $n-1$ von dem Parameter λ unabhängige *positive* Funktionen von x bedeuten. Er beweist folgendes Oscillationstheorem:

Man kann den Parameter λ auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen, dass die Differentialgleichung eine Lösung besitzt, welche in dem Intervall $a\,b$ eine beliebig vorgeschriebene Anzahl n von Wurzeln besitzt, und in dem Punkte a den Grenzbedingungen:

$$y = A, \quad \frac{N dy}{dx} = B, \ldots, \quad \frac{K dL \cdots dM dN dy}{dx^{n-1}} = D,$$

in dem Punkte b der Grenzbedingung:

46) Theory of Sound 1, § 187.

47) Par. C. R., 12. März u. 7. Mai 1900. Vgl. auch Par. C. R., 12. Febr. 1900, wo gewisse Differentialgleichungen *dritter* Ordnung von demselben Mathematiker behandelt werden.

48) J. éc. polyt., cah. 25 (1837), p. 85; J. de math. 3 (1838), p. 255 u 561. Es handelt sich hier hauptsächlich um die dritte dieser Abhandlungen, von denen die zweite nur eine kurze Voranzeige ist, während die erste als eine Vorarbeit anzusehen ist, indem dort nur die spezielle, durch Exponentialfunktionen lösbare Gleichung $\frac{d^3 y}{dx^3} = \lambda y$ behandelt wird.

$$\alpha y + \beta \frac{N dy}{dx} + \cdots + \nu \frac{K dL \cdots dM dN dy}{dx^{n-1}} = 0$$

genügt. Hierbei bedeuten $A, B, \ldots, D$ sowie auch $\alpha, \beta, \ldots \nu$ positive (oder auch mit Ausnahme von D zum Teil verschwindende) Konstanten.

Bezeichnet man den hiermit bestimmten Parameterwert durch λ_n, so hat man eine unendliche Reihenfolge von ausgezeichneten Parameterwerten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Dieselben sind, wie *Liouville* nachweist, sämtlich positiv und der Grösse nach geordnet. Schliesslich separieren sich die Wurzeln zweier aufeinanderfolgenden ausgezeichneten Lösungen gegenseitig.

Obwohl diese Sätze den Sturm'schen durchaus analog sind, so fand sich *Liouville* jedoch genöthigt eine neue Beweismethode zu ersinnen, denn hier versagt die Integralformel von Nr. 2. Statt dessen bedient sich *Liouville* einer Methode, welche derjenigen ähnlich ist, die beim Beweise des *Fourier*'schen Satzes über reelle Wurzeln algebraischer Gleichungen angewandt wird (I B 3a, Nr. 4). Gerade wie bei *Sturm* stützt sich dieser Liouville'sche Beweis auf die Thatsache, dass für grosse Werte von λ die Lösungen der Differentialgleichung viele Wurzeln in dem Intervall ab besitzen. Dass dem so ist, sieht man in dem Falle, dass $K, L, \ldots, M, N$ Konstanten bedeuten, aus der expliciten Lösung der Differentialgleichung, welche in diesem Fall durch Exponentialfunktionen dargestellt werden kann. Der Übergang von diesem speziellen zum allgemeinen Fall ist aber von *Liouville* in sehr unbefriedigender Weise durchgeführt.

5. Das Oscillationstheorem im Falle mehrerer Parameter[49]). Der in Nr. **1** mit c) bezeichnete Fall ist erst im Jahre 1881[50]) von *Klein* in bewusster und expliciter Weise, wenn auch nur für eine spezielle Differentialgleichung behandelt. Zwar enthalten mehrere Differentialgleichungen, welche schon im vorigen Jahrhundert vorkommen, zwei Parameter[51]); aber hiervon ist stets einer anderswo bekannt[52]), und es handelt sich nur noch darum, den zweiten vermittelst des Sturmschen Oscillationstheorems zu bestimmen. Andererseits haben die Arbeiten *Lamé*'s[53]), wie wir sofort sehen werden, eine ganz ähnliche Beziehung zur hier vorliegenden Frage, wie die in Nr. **1** besprochene Abhandlung *Laplace*'s zum Sturm'schen Oscillationstheorem; denn bei

49) Wegen der Beziehung zur Theorie der Kreisbogenpolygone vgl. II B 4.

50) Math. Ann. 18, p. 410.

51) So z. B. die bei *Laplace* vorkommende Gleichung. Vgl. Nr. **1**.

52) Und zwar oft durch Anwendung des Sturm'schen Oscillationstheorems auf eine andere Differentialgleichung, welche ebenfalls diesen Parameter enthält.

53) Vgl. Nr. II B 4 b, namentlich **33**, **34**, **36**.

Lamé ist überhaupt von keiner Randwertaufgabe die Rede, und doch liefern seine Resultate nebst denjenigen seiner Nachfolger in unmittelbarster Weise die Lösung der Randwertaufgabe c) in einem Spezialfall.

Klein geht in dem soeben citierten Aufsatz von der Lamé'schen Gleichung aus, und zwar im wesentlichen in der Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e_1} + \frac{1}{x-e_2} + \frac{1}{x-e_3}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{Ax+B}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\,y = 0,$$

wo $e_1 < e_2 < e_3$, und betrachtet zwei Segmente der x-Axe a_1b_1 und a_2b_2, von denen jedes in einem, und zwar nicht beide in demselben, der Intervalle e_1e_2, e_2e_3, $e_3\infty$ liegt. Er stellt folgendes Oscillationstheorem auf[54]):

Man kann die reellen Parameter A und B, und zwar nur in einer Weise, so bestimmen, dass die Lamé'sche Gleichung zwei Lösungen y_1 und y_2 besitzt, von denen y_1 in den Punkten a_1 und b_1 verschwindet und zwischen diesen Punkten eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Nullpunkten besitzt, während y_2 in den Punkten a_2 und b_2 verschwindet und zwischen diesen Punkten eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Nullpunkten besitzt.

Dieses Theorem beweist *Klein* durch geometrische Betrachtungen, welche keinen Anspruch auf vollständige Strenge machen. Er betrachtet nämlich die Hilfsgerade $y = Ax + B$, und indem er sein Augenmerk auf das eine Segment a_1b_1 richtet, untersucht er wie diese Gerade sich bewegen kann, damit die gewünschte Lösung y_1 existiert. Er findet, auf gewisse Resultate *Sturm*'s gestützt[55]), dass zu diesem Zweck diese Gerade eine gewisse *Hüllkurve* umhüllen muss, deren Gestalt er näher untersucht. Indem er dann das zweite Segment a_2b_2 in ähnlicher Weise betrachtet, findet er eine zweite Hüllkurve; und aus der Gestalt und gegenseitigen Lage dieser zwei Kurven schliesst er, auf die geometrische Anschauung allein gestützt, dass diese zwei Kurven stets eine und nur eine gemeinsame Tangente besitzen. Die Gleichung dieser Tangente giebt dann die gewünschten Werte von A und B. Der hiermit skizzierte Beweis ist vom Referenten[56]) in analytische Form gesetzt und streng durchgeführt[57]).

---

54) Diese Formulierung wird schon in derselben Abhandlung nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert. Insbesondere dürfen sich die Segmente in den singulären Punkten umbiegen.

55) Auf die Abhandlung von *Sturm* bezieht sich *Klein* nicht, sondern leitet die gewünschten Resultate auf geometrische Weise ab.

56) N. Y. Bull., April 1898, p. 307 ff.

57) Man vgl. auch eine modifizierte Form des Beweises bei *Pockels*: Über

Um an die Lamé'schen Resultate Anschluss zu erhalten lässt *Klein* die zwei Segmente mit den Intervallen $e_1 e_2$ und $e_2 e_3$ zusammenfallen. Bedeuten ferner ε_1, ε_2, ε_3 unabhängig von einander nach Belieben 0 oder 1, so stellt *Klein* sich die Aufgabe, die Parameter A und B so zu bestimmen, dass die Lamé'sche Gleichung zwei Lösungen y_1 und y_2 besitzt, von denen y_1 in den Punkten e_1 und e_2 bezw. zu den Exponenten $\varepsilon_1/2$ und $\varepsilon_2/2$ gehört, während y_2 in den Punkten e_2 und e_3 bezw. zu den Exponenten $\varepsilon_2/2$ und $\varepsilon_3/2$ gehört. Das etwas erweiterte Oscillationstheorem lehrt uns, dass es unendlich viele solche Wertepaare A, B giebt, welche sich durch die Anzahl von Nullstellen der entsprechenden Funktionen y_1 und y_2 in den Intervallen $e_1 e_2$ und $e_2 e_3$ unterscheiden. Andererseits sieht man aber aus einer leichten funktionentheoretischen Überlegung[58]), dass die zwei Funktionen y_1 und y_2 (welche sich nur durch einen imaginären konstanten Faktor unterscheiden) die Gestalt haben:

$$\sqrt{(x-e_1)^{\varepsilon_1}(x-e_2)^{\varepsilon_2}(x-e_3)^{\varepsilon_3}}\,\Phi(x),$$

wo Φ ein Polynom in x bedeutet. Man wird also ebenfalls auf das gewünschte Wertepaar A, B geführt, wenn man diese Parameter so bestimmt, dass die Gleichung eine Lösung von dieser Form besitzt; und hierin besteht gerade die ursprüngliche Fragestellung *Lamé*'s. Insbesondere bemerke man die Beziehung des Oscillationstheorems zu dem kurz vorher ebenfalls von *Klein* gefundenen Satze über die Verteilung der Wurzeln der Lamé'schen Funktionen[59]).

In einer Vorlesung (Wintersem. 1889—90)[60]) hat *Klein* das Oscillationstheorem nach zwei Richtungen hin erweitert: einmal indem er eine verallgemeinerte Form der Lamé'schen Gleichung in Betracht zog, wobei sich keine neuen Schwierigkeiten einstellen; dann aber namentlich dadurch, dass er für Lamé'sche Gleichungen höherer Ordnung[61]) vermutungsweise ein Oscillationstheorem ausspricht, wobei, der grösseren Anzahl von Parametern entsprechend, eine grössere Anzahl von Segmenten vorkommt. In dem einfachsten Falle, wo drei

---

die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, p. 118. Derselbe ist nur zum Teil streng durchgeführt.

Untersuchungen über die asymptotischen Werte der Parameter A, B in dem Falle einer sehr grossen Anzahl von Nullstellen von y_1 sowie auch von y_2 finden sich bei *C. Jaccottet*, Dissertation Göttingen 1895.

58) Vgl. das vorhin citierte Buch des Referenten p. 213.

59) Math. Ann. 18, p. 237 ff. Man vgl. II B 4 b, Nr. **36**.

60) Vgl. Gött. Nachr. 1890, p. 91 ff.

61) Vgl. II B 4 b, Nr. **40**, **42**.

Parameter vorhanden sind, wurde ein geometrischer Beweis gegeben[62]), wobei man mit Hüllflächen an Stelle von Hüllkurven operiert. In den komplizierteren Fällen würde diese Beweismethode auf Räume höherer Dimensionen führen und folglich, da die Anschauung eine wesentliche Rolle spielt, ihre überzeugende Kraft (auf *Strenge* macht sie keinen Anspruch) verlieren.

Etwas später[63]) sprach *Klein* die Vermutung aus, das Oscillationstheorem könne unter gewissen Umständen auf andere überall regulär lineare Differentialgleichungen ausgedehnt werden. Hierzu war er hauptsächlich durch gewisse Resultate von *Stieltjes* veranlasst, welche in einem Spezialfall die Richtigkeit seiner Vermutung darthun, die wir aber erst in Nr. 6 besprechen werden. Wir wollen, um das Klein'sche Theorem auseinanderzusetzen, von der allgemeinen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausgehen, welche überall regulär ist:

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\varkappa_1'-\varkappa_1''}{x-e_1}+\cdots+\frac{1-\varkappa_n'-\varkappa_n''}{x-e_n}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$+\frac{1}{f(x)}\left[\frac{\varkappa_1'\varkappa_1''f'(e_1)}{x-e_1}+\cdots+\frac{\varkappa_n'\varkappa_n''f'(e_n)}{x-e_n}+C_{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_1x+C_0\right]y=0,$$

wo $$f(x)=(x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_n).$$

Wir setzen voraus, dass die Koeffizienten dieser Gleichung für reelle Werte von x reell sind. Dann können wir die Klein'schen Vermutungen folgendermassen als Theorem zusammenfassen:

Betrachten wir die $k+1$ Intervalle $(k\leq n-2)$ a_0b_0, a_1b_1, ..., a_kb_k, welche folgenden drei Bedingungen genügen:

1) $a_0<b_0\leq a_1<b_1\leq a_2\cdots<b_{k-1}\leq a_k<b_k$;

2) *kein singulärer Punkt e_i soll innerhalb, sondern höchstens an dem Ende eines dieser Intervalle liegen;*

3) *die singulären Punkte, welche an den Endpunkten dieser Intervalle liegen, sollen reelle Exponenten haben, deren Differenz dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist.*

Ferner mögen m_0, m_1, ..., m_k beliebige ganze positive Zahlen oder Null bedeuten.

Dann kann man, wenn man die anderen in der Differentialgleichung vorkommenden Grössen als gegeben betrachtet, die Parameter

62) Aber erst später veröffentlicht; vgl. z. B. *Klein*, Lin. Diff.-Gl. p. 403 ff.

63) In seinen Lin. Diff.-Gl. 1894, p. 427 ff. Man vgl. auch das autographierte Heft von 1891 über Differentialgleichungen, welches aber viele von *Klein* nachher als unrichtig erkannte Vermutungen enthält.

$C_0, C_1, \ldots, C_k$ auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen, dass die Gleichung (3) $k+1$ Lösungen $y_0, y_1, \ldots, y_k$ besitzt derart, dass y_i genau m_i mal in dem Intervall $a_i < x < b_i$ verschwindet, und in jedem Endpunkte dieses Intervalls einer beliebig vorgeschriebenen linearen Verbindung der zu diesem Punkte gehörigen Fundamentallösungen[64]) *proportional ist.*

Lässt man in einigen Segmentenendpunkten die Bedingung fallen, dass die in ihnen vorkommenden Exponentendifferenzen dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, so bleibt das Theorem unverändert bestehen, falls man nur in jedem solchen singulären Punkte verlangt, die betreffende Funktion y_i solle derjenigen Fundamentallösung proportional sein, welche zum grösseren Exponenten des betreffenden Punktes gehört.

Dieses Theorem ist vom Referenten bewiesen worden[65]) und zwar als Spezialfall eines ähnlichen Theorems, welches sich auf die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + \{\chi(x) + \psi(x)[C_k x^k + \cdots + C_1 x + C_0]\}\, y = 0$$

bezieht, worin die Funktionen p, χ, ψ nicht einmal analytisch zu sein brauchen, sondern nur gewissen Bedingungen genügen müssen.

6. Exkurs über polynomische Lösungen. Indem *E. Heine* die Resultate *Lamé*'s auf die von ihm eingeführten Lamé'schen Gleichungen höherer Ordnung auszudehnen versuchte, wurde er dazu geführt, folgendes allgemeinere Problem in Angriff zu nehmen[66]):

Es bedeute ψ ein Polynom $(p+1)^{ter}$ Ordnung in x; χ und ϑ aber Polynome in x, deren Ordnungen p bezw. $p-1$ nicht übersteigen. ψ und χ werden als gegeben angesehen und es wird gefragt, ob bezw. auf wie viele Weisen das Polynom ϑ so bestimmt werden kann, dass die Differentialgleichung:

$$\psi \frac{d^2y}{dx^2} + \chi \frac{dy}{dx} + \vartheta y = 0$$

eine polynomische Lösung der n^{ten} Ordnung besitzt.

Diese Frage beantwortet *Heine* durch direktes algebraisches Rechnen. Er findet, dass *im allgemeinen* (d. h. wenn die Polynome ψ und χ in keiner Weise spezialisiert sind) es

---

64) Vgl. II B 4. Es sei noch erwähnt, dass, da die Exponenten eines nicht singulären Punktes 0, 1 sind, diese Bedingung im Falle eines nicht singulären Punktes darauf hinauskommt, dass man dort den Wert des Verhältnisses y'/y beliebig vorschreibt.

65) N. Y. Bull., Mai u. Okt. 1898.

66) Berl. Ber., Jan. 1864; *Heine*'s Kugelfunktionen, Berlin, 2. Aufl. 1 (1878), p. 472 ff. Man vgl. auch *Klein*, Lin. Diff.-Gl. p. 191 ff.

$$[n, p] = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots(p-1)}$$

verschiedene Bestimmungen von ϑ giebt. Um aber diesen Satz auf einen speziellen Fall anzuwenden bedarf es jedesmal des Nachweises, dass durch die eingetretene Spezialisierung die Anzahl der Funktionen ϑ nicht verkleinert worden ist, und einen solchen Nachweis hat in der That *Heine* für den ihn besonders interessirenden Fall der Lamé'schen Gleichungen höherer Ordnung gegeben. Allgemeine Fragen dieser Art, sowie die sich hier anschliessenden Realitätsfragen bleiben bei *Heine* unerörtert.

Diese sämtlichen Fragen hat *T. J. Stieltjes*[67]) unter gewissen einschränkenden Annahmen auf überraschend einfache Weise erledigt. Setzt man nämlich voraus, dass die Polynome ψ und χ reell sind, dass die Gleichung $\psi = 0$ lauter getrennte reelle Wurzeln: $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ hat, und ferner, dass wenn man χ/ψ in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha_0}{x-a_0} + \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_p}{x-a_p},$$

die α sämtlich positiv (nicht Null) sind, so beweist *Stieltjes*, dass *es stets* $[n, p]$ *verschiedene reelle Polynome* ϑ *giebt, für welche die Differentialgleichung ein Polynom* n^{ten} *Grades als Lösung besitzt; dass diese polynomischen Lösungen* n^{ten} *Grades sämtlich reelle Wurzeln haben, die in dem Intervall* $a_0 a_p$ *liegen, und dass sie sich gerade durch die Verteilungsweise dieser Wurzeln in den einzelnen Intervallen* $a_0 a_1$, $a_1 a_2, \ldots$ $a_{p-1} a_p$ *unterscheiden.* Diese polynomischen Lösungen sind von *Klein*[68]) *Lamé'sche*, von *E. B. Van Vleck*[69]) *Stieltjes'sche Polynome* genannt worden.

Stieltjes leitet den Beweis seines Satzes aus der Bemerkung ab, dass die Wurzelpunkte dieser polynomischen Lösungen die Gleichgewichtslagen angeben für ein System von n beweglichen Einheitsmassenpunkten, welche von $p+1$ festen in $a_0, a_1, \ldots, a_p$ liegenden Massenpunkten von den Massen $\alpha_0/2, \alpha_1/2, \ldots, \alpha_p/2$ abgestossen werden, wobei die Abstossungskraft den Massen direkt, der Entfernung umgekehrt proportional ist. Dieser Beweis schliesst sich unmittelbar an die mechanische Anschauung, beruht aber nicht darauf, sondern ist in strenger analytischer Form durchgeführt.

---

67) Acta math. 6 (1885), p. 321.
68) Lin. Diff.-Gl. p. 191.
69) N. Y. Bull., Juni 1898.

Diese Betrachtungen sind vom Referenten[70]) dadurch erweitert, dass auch komplexe Grössen in Betracht gezogen werden, wobei man es mit Punktsystemen in einer Ebene zu thun hat.

Es sei noch eine Ergänzung des Stieltjes'schen Satzes durch *E. B. Van Vleck*[71]) erwähnt, wonach auch die dadurch bestimmten Polynome $\mathfrak{P}$ lauter reelle Wurzeln haben, die in dem Intervall $a_0 a_p$ liegen.

Um nun die Beziehung des Stieltjes'schen Satzes zum Oscillationstheorem auseinanderzusetzen sei bemerkt, dass man es in jenem Satze mit der allgemeinen überall regulären Gleichung zu thun hat, deren singuläre Punkte sämtlich reell sind, während ein Exponent eines jeden solchen Punktes Null, der andere algebraisch kleiner wie 1 ist. Es gehören also die Stieltjes'schen Polynome in allen singulären Punkten zum Exponenten Null, und dieser Exponent ist nur dann der kleinere in dem betreffenden Punkte, wenn in diesem Punkte die Exponentendifferenz < 1 ist. Der *Stieltjes*'sche Satz subsumiert sich also als spezieller Fall unter das *Klein*'sche Oscillationstheorem.

Schliesslich kommen wir auf die Fälle zu sprechen, welche jenseits der sog. *Stieltjes'schen Grenze* liegen, in welchen also einige der Grössen α negativ sind. *Hier gilt im allgemeinen der Stieltjes'sche Satz nicht mehr.* Diese Fälle sind von *E. B. Van Vleck*[72]) untersucht, welcher, indem er von dem *Stieltjes*'schen Falle ausgeht, die Grössen $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ stetig abnehmen lässt und dann zusieht, wie die Wurzeln der betreffenden polynomischen Lösungen sich ändern. Hierbei sind zweierlei Momente zu berücksichtigen:

1) zwei reelle polynomische Lösungen können imaginär werden, aber nur dann, wenn sie vorher identisch geworden sind, und also nur, wenn man sich so weit von dem Stieltjes'schen Fall entfernt hat, dass zwei reelle polynomische Lösungen dieselbe Wurzelverteilung bekommen haben;

2) die Wurzelverteilung von reell bleibenden polynomischen Lösungen kann sich ändern. Dies kann entweder dadurch geschehen,

---

70) Vgl. dessen Buch: Reihenentwicklungen u. s. w. p. 214 ff., sowie auch N. Y. Bull., März 1898. Siehe auch *Klein*, Lin. Diff.-Gl. p. 201 ff.

71) N. Y. Bull., Juni 1898.

72) Diese *Van Vleck*'sche Arbeit ist niemals veröffentlicht worden. Man vgl. aber *Klein*, Lin. Diff.-Gl. 2. Ord., p. 226 ff., wo ein Teil der *Van Vleck*'schen Resultate auf mechanischem Wege abgeleitet ist (*Van Vleck* selber hatte nur analytische Methoden gebraucht). Im Falle $p = 2$ sind die Resultate zum Teil implicite in viel allgemeineren Untersuchungen *Van Vleck*'s (Amer. J. of math. 21 (1899), p. 126) enthalten.

dass eine Anzahl von Wurzeln zusammenfällt (was notwendig in einem der Punkte $a_0, \ldots, a_p, \infty$ geschehen muss) und zum Teil imaginär wird; oder aber dadurch, dass Wurzeln, welche reell bleiben, von einem Intervall in ein anderes übergehen.

Man braucht also zunächst (d. h. so lange die polynomische Lösung reell bleibt) nur zu untersuchen, wann und wie die Wurzeln durch die singulären Punkte $a_0, \ldots, a_p, \infty$ hindurchgehen. Auf diese Weise kann man in den einfachsten Fällen die Wurzelverteilung der polynomischen Lösungen genau bestimmen.

Man bemerke, dass diese Untersuchungen über das Gebiet des *Klein*'schen Oscillationstheorems hinausgehen, und folglich als Vorarbeiten zur Weiterbildung dieses Theorems angesehen werden können.

7. Die seit 1890 von partiellen auf gewöhnliche Differentialgleichungen übertragenen Methoden[73]. Nachdem *E. Picard* die vorher von *H. A. Schwarz*[74]) zu demselben Zweck angewandte Methode der successiven Approximationen dazu benutzt hatte, von der Randwertaufgabe der Potentialtheorie ausgehend, ähnliche Probleme bei gewissen anderen partiellen Differentialgleichungen zu behandeln[75]), bemerkte er, dass dieselben Methoden auch auf die *gewöhnliche* Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{4}$$

angewandt werden können. Die Funktion f möge, so lange $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $|y| \leqq L$, $|y'| \leqq L'$, als eindeutige stetige Funktion ihrer drei unabhängigen Argumente vorausgesetzt werden[76]). Wir führen zunächst folgendes sehr allgemeine Theorem an:

Für ein hinreichend[77]) *kurzes in dem Intervall $\alpha\beta$ gelegenes Intervall ab giebt es eine und (falls man nur den Fall $|y| < L$, $|y'| < L'$ betrachtet) nur eine Lösung von* (4), *welche innerhalb dieses Intervalls nebst ihrer ersten Ableitung stetig verläuft und in den Punkten a und b bezw. die*

---

73) Vgl. insbesondere folgende Arbeiten *Picard*'s: J. de math. (4) 6 (1890), p. 197; (4) 9 (1893), p. 228; Par. C. R., 19. Febr. 1894, 9. April 1894, 23. April 1894, 14. Febr. 1898. Eine zusammenfassende Darstellung findet man in *Picard*'s Traité d'analyse 3 (1896), p. 94 ff.

74) Fenn. Acta 15 (1885), p. 315 = Ges. Abh. 1, p. 244.

75) Vgl. II A 7 c, Nr. 5.

76) Auch andere Bedingungen werden dieser Funktion zum Teil auferlegt, so z. B. die Existenz und Endlichkeit ihrer partiellen Ableitungen nach dem zweiten und dritten Argument.

77) Dieses wird durch drei Ungleichungen näher präzisiert; vgl. Traité d'analyse 3, p. 96, 97.

den Ungleichungen $|A| < L$, $|B| < L$ *genügenden, sonst aber willkürlichen Werte* A *und* B *annimmt.*

Es wird bei der Herleitung dieses Satzes, sowie auch im folgenden, der Algorithmus der successiven Approximationen in folgender Weise angewandt[78]):

Man geht aus von einer Anfangsfunktion y_0 (welche in verschiedenen Fällen verschieden gewählt wird) und berechnet die Approximationen $y_1, y_2, \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = f(x, y_{i-1}, y_{i-1}') \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Eine jede dieser Gleichungen wird so integriert, dass die Lösung in den Punkten a und b die gewünschten Werte A und B annimmt. Kann man nun beweisen, dass sich diese Funktionen y_i einer Grenzfunktion *gleichmässig* (II A 1, Nr. **16**) nähern, so folgt, dass diese Grenzfunktion die gewünschte Lösung von (4) ist[79]).

Dieselbe Methode kann man auf Systeme von Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = f_i(x; y_1, \ldots, y_m; y_1', \ldots, y_m') \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

anwenden, wonach man ein dem soeben ausgesprochenen analoges Theorem bekommt.

---

78) Nach einer Bemerkung von *P. Painlevé*, Bull. soc. math. 27 (1899), p. 150, wären die sämtlichen Picard'schen Resultate (natürlich nur soweit als sie sich nicht explicite auf diese Methode beziehen) dadurch abzuleiten, dass man, statt die Methode der successiven Approximationen zu benutzen, die Cauchy'sche Methode zur Integration reeller Differentialgleichungen benutzt (vgl. II A 4, Nr. **5**); eine Methode, welche nach einer Bemerkung von *Painlevé* (l. c.) und *Picard* (Par. C. R., 5. Juni 1899) den grösstmöglichen Konvergenzbereich besitzt.

Die Methode der successiven Approximationen, welche in anderen Gebieten der Mathematik von jeher angewandt wurde (vgl. z. B. *Fourier*, Théorie de la chaleur § 286, 287), ist zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen wohl zuerst von *J. Liouville* (J. de math. 1 [1836], p. 255) benutzt worden. Wie sie da angewandt wird, hat diese Methode aber keine besondere Beziehung zur Randwertaufgabe, denn die Approximationen werden so bestimmt, dass sie in *einem einzigen Punkte* gewisse Anfangsbedingungen erfüllen. Vgl. II A 4 a, Nr. **9**. In der von uns gebrauchten Gestalt (wo die Approximationen durch Grenzwerte in *zwei Punkten* bestimmt werden) scheint die Methode nur einmal vor den Picard'schen Arbeiten benutzt worden zu sein, nämlich von *J. Liouville*, J. de math. 5 (1840), p. 356.

79) Wir verweisen noch auf ein von *Picard* (Par. C. R. 9. April 1894) gegebenes Theorem, wonach, wenn f eine analytische Funktion von x, y, y' und einem Parameter λ ist, die durch die hier besprochene Methode bestimmte Lösung ebenfalls eine analytische Funktion von λ sein wird.

Des weiteren handelt es sich um Spezialfälle von (4), nämlich:

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x),$$

$$(\beta) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)y,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y).$$

Diese Gleichungen wollen wir der Reihe nach besprechen.

(α) Hier lässt sich die Randwertaufgabe a) von Nr. 1 stets und nur auf eine Weise lösen, und zwar durch die Formel:

$$y = \int_a^x \frac{(b-x)(\xi-a)}{a-b} f(\xi)\,d\xi + \int_x^b \frac{(b-\xi)(x-a)}{a-b} f(\xi)\,d\xi + \frac{A-B}{a-b}(x-a) + A.$$

In dem besonders wichtigen Falle $A = B = 0$ ist diese Formel, wie *H. Burkhardt* bemerkte [80]), mit der Theorie der *eindimensionalen Green'schen Funktion* in Verbindung zu bringen. Unter der Green'schen Funktion $G(x, \xi)$ des Gebietes ab versteht *Burkhardt* nämlich die in a und b verschwindende Funktion von x, welche zwischen diesen Punkten, abgesehen von dem Punkte ξ, nebst ihrer ersten Ableitung eindeutig und stetig verläuft und der Differentialgleichung $d^2y/dx^2 = 0$ genügt, während im Punkte $x = \xi$ die Funktion G stetig ist, dG/dx aber zwei um -1 verschiedene Werte besitzt.

Wenn $f(x)$ zwischen a und b negativ ist, sieht man aus der oben geschriebenen Formel, dass die in a und b verschwindende Lösung von (α) zwischen a und b positiv ist, und dass, wenn f durch eine algebraisch kleinere Funktion ersetzt wird, diese Lösung in jedem Punkte von ab zunehmen wird.

Dieser Fall (α) ist deshalb wichtig, weil die hier gewonnenen Resultate immer wieder zu benutzen sind bei Anwendung der Methode der successiven Approximationen in den Fällen (β) und (γ).

(β) Da wir es hier mit einer linearen Differentialgleichung zu thun haben, so lässt die in Nr. 1 mit a) bezeichnete Randwertaufgabe im allgemeinen eine und nur eine Lösung zu; eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die in a verschwindende Lösung der Differentialgleichung auch in b verschwindet. Dieser Fall kann nicht eintreten, so lange φ in dem ganzen Intervall ab positiv ist. *Wir*

80) Bull. soc. math. 22 (1894), p. 71. *Burkhardt* geht hier insofern über die Picard'schen Arbeiten hinaus, als er für die Gleichung (α) eine allgemeinere Randwertaufgabe, ebenfalls unter Benutzung einer Green'schen Funktion, behandelt.

wollen von nun an φ als negativ voraussetzen. Ferner betrachten wir zunächst nur den Fall, in welchem das Intervall ab so kurz ist, dass die in a verschwindende Lösung von (β) weder zwischen a und b, noch in b verschwindet; oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir beschränken uns auf den Fall, in welchem (β) eine Lösung besitzt, die im ganzen Intervall (mit Einschluss der Endpunkte) positiv ist. *Diese Lösung kann,* wie *Picard* beweist, *durch die Methode der successiven Approximationen dargestellt werden.*

Des weiteren giebt *Picard* im engen Anschluss an die obenerwähnte Schwarz'sche Arbeit ein Kriterium dafür, ob der hier betrachtete Fall eintritt oder nicht. Hierzu betrachtet er die Konstanten:

$$W_n = -\int_a^b \varphi(x) u_n(x) dx,$$

wo $u_0 = 1$ und die successiven nach der oben beschriebenen Methode gebildeten Approximationen $u_1, u_2, \ldots$ in den Punkten a und b verschwinden. Die Quotienten $c_n = W_n / W_{n-1}$ nähern sich bei wachsendem n einem Grenzwert c; *wenn* $c < 1$, *verschwindet die in a verschwindende Lösung von (β) weder zwischen a und b, noch in b; wenn* $c > 1$, *verschwindet diese Lösung zwischen a und b, und wenn* $c = 1$, *verschwindet sie in b, aber nicht zwischen a und b.* Im letzten Falle erscheint diese in a und b verschwindende Lösung als Grenze der Funktionen u_n.

Die Konstante c hängt einerseits von den Werten der Funktion φ, andererseits von der Länge des Intervalls ab ab; und zwar findet man, dass diese Konstante zunimmt einerseits wenn die Funktion φ durch eine algebraisch kleinere Funktion ersetzt wird, andererseits wenn das Intervall ab durch ein grösseres ersetzt wird. Hieraus folgt, dass die Wurzeln der in a verschwindenden Lösung bei algebraisch abnehmendem φ sich sämtlich nach dem Punkte a hin bewegen werden. Hierdurch wird ein Spezialfall eines in Nr. 2 besprochenen Sturm'schen Theorems von neuem bewiesen.

Ersetzt man die Gleichung (β) durch die Gleichung:

$$(\beta') \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda \varphi(x) y,$$

so wird c durch λc ersetzt. Folglich hat (β') für $\lambda = 1/c$, und für keinen anderen Wert von λ, eine Lösung, welche in a und b, nicht aber zwischen diesen Punkten verschwindet. Hierdurch ist also nicht nur die Existenz des in Nr. 2 durch λ_0 bezeichneten aus-

gezeichneten Parameterwertes durch eine ganz neue Methode erwiesen[81]), sondern auch ein Ansatz zur Berechnung dieses Parameterwertes gewonnen.

Bezeichnen wir durch y_a und y_b die Lösungen von (β'), welche bezw. in a und b verschwinden, so fallen dieselben für $\lambda = 1/e$ zusammen. Lassen wir λ über diesen Wert hinaus wachsen, so bewegt sich die Wurzel von y_a, welche ursprünglich in b lag, nach links, während die Wurzel von y_b, welche ursprünglich in a lag, sich nach rechts bewegt. Diese zwei Wurzeln werden sich für einen bestimmten Wert von λ treffen, und hierdurch erhalten wir den zweiten ausgezeichneten Parameterwert λ_1. Auf ähnliche Weise fortschreitend weist *Picard* die Existenz der anderen ausgezeichneten Parameterwerte nach.

Die Lösung von (β'), welche in a und b beliebig vorgeschriebene Werte A und B annimmt (wobei A und B nicht beide verschwinden dürfen), ist in der ganzen Ebene der komplexen λ, abgesehen von den Punkten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, eine eindeutige analytische Funktion von λ. Für diese ausgezeichneten Werte besitzt dieselbe, wie *Picard* nachweist, einfache Pole. Von diesem Umstande ausgehend erhält *Picard* ein Grenzverfahren zur Berechnung dieser ausgezeichneten Parameterwerte[82]).

(γ) Hier wird zunächst vorausgesetzt, dass die in der Differentialgleichung vorkommende Funktion $f(x, y)$ für $a \leq x \leq b$ und für alle Werte von y eindeutig und stetig ist, und dass $f(x, 0) = 0$. Ferner soll $\partial f/\partial y$ in diesem Gebiete existieren und negativ sein. Schliesslich soll diese Ableitung dem absoluten Betrage nach abnehmen, wenn y durch positive Werte wächst oder durch negative Werte abnimmt. Dann beweist *Picard* unter anderen folgende Sätze:

Existiert eine Lösung von (γ), *welche in* a *und in* b *positive Werte annimmt und zwischen* a *und* b *nicht verschwindet, so kann diese Lösung durch die Methode der successiven Approximationen dargestellt werden.*

Wenn die in a *verschwindenden Lösungen der zwei Hilfsgleichungen:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{y=0} \cdot y, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{y=+\infty} \cdot y$$

81) Natürlich nur in dem Falle, dass die entsprechende ausgezeichnete Lösung in a und in b verschwindet.

82) Diese Untersuchungen *Picard*'s über die Gleichung (β) sind von *A. Davidoglou* (Par. C. R. 1900, 12. Febr., 12. März, 7. Mai) auf gewisse lineare Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung übertragen.

in a bezw. β zum ersten mal wieder verschwinden[83]*, und $a < c < \beta$ ist, so giebt es eine und nur eine Lösung von (γ), welche in a und c verschwindet, zwischen diesen Punkten aber positiv bleibt. Diese Lösung kann man durch die Methode der successiven Approximationen erhalten.*

Einige spezielle Resultate, welche sich auf den Fall beziehen, dass die gesuchte Lösung nicht überall positiv ist, übergehen wir. Insbesondere verweisen wir auf die Aufsuchung von *periodischen* Lösungen in dem Falle, dass f eine periodische Funktion von x bedeutet[84]).

Für den Fall, dass in der Gleichung (γ) f eine überall positive Funktion bedeutet, welche mit y zusammen wächst, beweist *Picard* die Sätze:

Es giebt niemals zwei verschiedene Lösungen von (γ), welche in a und in b dieselben Werte annehmen.

Bedeutet M eine positive Konstante, und hat man für negatives y die Ungleichung $|\partial f/\partial y| < M$, so kann man eine Lösung von (γ), welche in a und in b verschwindet[85]*, durch die Methode der successiven Approximationen finden, wenn die Länge des Intervalls ab kleiner ist wie $\pi/\sqrt{M}$.*

Hat man ein längeres Intervall und bildet man die successiven Approximationen $y_1, y_2, y_3, \ldots$, welche in a und in b verschwinden, so werden sich die Approximationen ungerader Ordnung einer Grenze u, die Approximationen gerader Ordnung einer Grenze v gleichmässig nähern[86]). Diese zwei Funktionen stimmen aber, wie *Picard* an einem Beispiel nachweist, nicht immer überein. Sie genügen dann auch nicht der Gleichung (γ), sondern den zwei Gleichungen:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, v), \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = f(x, u).$$

Die Methode der successiven Approximationen ist also nicht immer anwendbar um eine Lösung von (γ) zu finden, welche in a und b verschwindet. Dass aber eine solche Lösung stets existiert, weist *Picard* nach, indem er eine Methode für ihre Berechnung an-

---

83) Wir setzen voraus, dass diese Punkte beide im Intervall ab liegen.

84) Traité d'analyse 3, p. 142. Vgl. auch *H. Poincaré*, Les méth. nouv. de la mécanique cél. 1, Paris 1892, chap. 3.

85) Die Beschränkung auf die Grenzwerte Null in a und b ist keine wesentliche, denn auf diesen Fall wird der allgemeine Fall durch die Substitution $z = y + \alpha x + \beta$ zurückgeführt.

86) Vgl. Traité d'analyse 3, p. 146, sowie wegen der gleichmässigen Konvergenz Par. C. R., 14. Febr. 1898.

giebt, welche der Schwarz'schen Methode des alternierenden Verfahrens[87]) genau nachgebildet ist.

Diese Picard'schen Untersuchungen betreffs der Gleichung (γ) gestatten eine Verallgemeinerung einerseits, wie *H. Burkhardt* bemerkt hat[88]), durch Zulassung allgemeinerer Grenzbedingungen; andererseits, wie *Picard* selbst gezeigt hat, durch Betrachtung von Systemen von Differentialgleichungen.

Wir heben noch ausdrücklich hervor, dass bei den Picard'schen Untersuchungen singuläre Punkte der Differentialgleichung *nicht* auftreten.

87) II A 7 b, Nr. 28.
88) Bull. soc. math. 22 (1894), p. 74.

II A 7b. POTENTIALTHEORIE

(THEORIE DER LAPLACE-POISSON'SCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG)

VON

HEINRICH BURKHARDT und **W. FRANZ MEYER**

IN ZÜRICH. IN KÖNIGSBERG, OSTPR.

Inhaltsübersicht.

1. Definition des Potentials.
2. Die *Laplace-Poisson*'sche Differentialgleichung.
3. Stetigkeit. Verhalten im Unendlichen.
4. Abgeleitete Potentiale.
5. Flächenpotential.
6. Potential einer Doppelschicht.
7. Potential von Linien und Punkten.
8. Logarithmisches Potential.
9. Analytische Fortsetzung.
10. Niveauflächen und Kraftlinien.
11. Verallgemeinerungen des Potentialbegriffs.
12. *Green*'sche Formeln.
13. *Gauss*' allgemeine Lehrsätze.
14. Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen.
15. Potential von Kugel und Ellipsoid.
16. *W. Thomson*'s elektrische Bilder.
17. Randwertaufgaben; Eindeutigkeits- und Existenztheorem.
18. *Green*'sche Funktion.
19. Die *Poisson*'schen Integrale.
20. Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen.
21. Entwicklung nach Kugelfunktionen.
22. Allgemeinere Entwicklungen.
23. *Gauss*' Versuch, das Existenztheorem zu beweisen.
24. *Thomson-Dirichlet*'sches Prinzip.
25. Kritik desselben.
26. Methode der Approximation durch Polygone bezw. Polyeder.
27. Methode des arithmetischen Mittels.
28. Kombinatorische Methoden.
29. Spezielle Methode für analytische Randkurven.
30. Hülfssätze zu Konvergenzbeweisen.
31. Die Balayagemethode.

Litteratur.

Lehrbücher.

John H. Pratt, Treatise on attraction, Laplace's functions and the figure of the earth. 3. ed. Cambr. and Lond. 1865.

R. Clausius, Die Potentialfunktion und das Potential, Leipz. 1859, 4. Aufl. 1885; franz. von **E. Folie,* Brux. 1870.

E. Betti, Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, Pisa 1865.

B. Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, hsg. von *K. Hattendorff,* Hann. 1875. 2. Ausg. 1880.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte, hsg. von *F. Grube,* Leipz. 1876, 2. Aufl. 1887.

E. Betti, Teorica delle forze Newtoniane, Pisa 1879; dtsch. mit Zusätzen u. d. Titel: Potentialtheorie und ihre Anwendungen von *W. Fr. Meyer,* Stuttgart 1885.

E. Mathieu, Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme, Paris 1885/86; dtsch. von *H. Maser,* Berl. 1890.

F. Neumann, Potential und Kugelfunktionen, hsg. von *C. Neumann,* Leipz. 1887.

R. O. Peirce, The Newton Potential Function, Boston 1888.

**J. A. Bonifacio,* Theoria da funcção potencial e do potencial, Porto 1890.

P. Appell, Attraction et fonction potentielle, réd. par *Charliat,* Paris 1892.

**A. J. da Silva Bastos,* Sobre a equação de Laplace a tres variaveis, Coimbra 1895.

H. Poincaré, Théorie du potentiel Newtonien [1894/95], réd. par *E. le Roy* et *G. Vincent,* Paris 1899.

A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Berl. 1899.

Ausserdem vgl. man die Lehrbücher der bestimmten Integrale (*Dirichlet, Kronecker*), der Kugelfunktionen (*Heine* 2, *Ferrers, Byerly*), der Funktionentheorie (*C. Neumann, Picard* 1 u. 2, *Forsyth*), der Mechanik (*Somoff* 2, *Schell* 2, *Kirchhoff*), speziell der Statik (*Routh* 2, *Minchin* 2), der mathematischen Physik (*Thomson* und *Tait* 1^2, *von Lang, Voigt* 1, *Resal* 2), der physischen Astronomie (*Resal, Tisserand* 2), der Geodäsie (*Helmert*), endlich der einschlägigen einzelnen physikalischen Disziplinen.

Monographien.

O. Schlömilch, Der Attraktionskalkül, Halle 1851.

G. Lamé, Les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes, Paris 1857.

G. Lamé, Les coordonnées curvilignes et leur diverses applications, Paris 1859.

C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipz. 1877 [vgl. den Auszug, Math. Ann. 13 (1878), p. 255]; citiert: „C. Neumann 1877".

A. Harnack, Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales, Leipz. 1887.

E. Häntzschel, Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berl. 1893.

M. Böcher, Reihenentwicklungen der Potentialtheorie (m. Vorwort von *F. Klein*), Leipz. 1894 (weitere Ausführung einer Gött. Preisschrift, 1893).

Die mit * bezeichneten Werke sind den Verfassern nicht zugänglich gewesen.

C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Prinzip der Fernewirkungen, Leipz. 1896.

Für die ältere *Geschichte* vgl. man die Excerptensammlung von *J. Todhunter:* History of attraction and the figure of the earth, 2 vol., Lond. 1873.

Neuere Bibliographie: *M. Bacharach,* Abriss der Geschichte der Potentialtheorie, Gött. 1883.

1. Definition des Potentials. Dass die Komponenten der auf einen Punkt wirkenden Kraft nach drei rechtwinkligen Koordinatenaxen sich in vielen Fällen als Differentialquotienten einer und derselben Funktion nach den Koordinaten dieses Punktes darstellen lassen, war schon vor *W. R. Hamilton* [1]) bekannt, der für eine solche Funktion den Namen *Kräftefunktion* eingeführt hat. Insbesondere gilt das, wie *J. Lagrange* [2]) zuerst bemerkt hat, für die Komponenten der Anziehung, die ein endliches System von Massenpunkten m_i nach dem Newtonschen Gesetze auf einen andern Punkt μ ausübt; die zu differentiierende Funktion ist hier, bei geeigneter Wahl der Einheiten:

$$\Omega = \frac{m_1 \mu}{r_1} + \frac{m_2 \mu}{r_2} + \cdots, \tag{1}$$

unter r_i die Entfernung des anziehenden Punktes m_i vom „Aufpunkt“ [3]) μ verstanden. *Lagrange* [2]) hat diesen Satz sogleich auch auf den Fall ausgedehnt, dass die anziehenden Massen *kontinuierlich* [4]) im Raume verteilt sind; ist dann dm ein Massenelement, d. h. das Produkt aus einem Volumenelement $d\tau$ in eine gegebene Funktion der Koordinaten, die *Dichtigkeit* [5]) ϱ, so tritt an die Stelle von (1) das (über alle von Massen eingenommenen Raumteile zu erstreckende) Integral:

$$\Omega = \int\int\int \frac{\mu \, dm}{r} = \mu V. \tag{2}$$

1) Lond. Trans. 144 (1834[1]), p. 249. *Hamilton* hat übrigens dort nur Anziehungs- und Abstossungskräfte zwischen materiellen Punkten im Auge.

2) Par. sav. [étr.] 7, 1773 (Oeuvr. 6, p. 349). Vgl. *A. S. Hathaway,* N. Y. Bull. 1 (1891), p. 66. — Die Funktion Ω tritt schon bei *D. Bernoulli,* Berl. Hist. 1748 [50], p. 361 in der Energiegleichung auf.

3) Ein kurzer Name für den Punkt, in welchem der Wert des Potentials gerade betrachtet wird, ist wünschenswert. *L. Boltzmann* (z. B. Vorl. über Maxwell's Theorie 1, Leipz. 1891, p. 113) sagt *Aufpunkt*; *E. Beltrami* (Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 52): „*punto potenziato*“.

4) Über die Bedeutung dieser Ausdrucksweise äussern sich vom atomistischen Standpunkt aus *J. Boussinesq*, J. de math. (3) 6 (1880), p. 89; *H. Poincaré,* Amer. J. of math. 12 (1890), p. 284; vom entgegengesetzten *L. Kronecker,* Vorlesungen 1, p. 286, 290; *Korn* p. 9. Vgl. auch *Heine* 2, p. 31.

5) In der Gravitationstheorie ist dieselbe stets $\geqq 0$, in der Elektrostatik

Für dies V hat *G. Green*[6]) den Namen *Potentialfunktion*, *C. F. Gauss*[7]) den Namen *Potential* eingeführt.

Ω ist auch gleich der *Arbeit*, die aufgewendet werden müsste, um den Aufpunkt aus seiner Lage ins Unendliche zu bringen[8]); insofern steht das Potential in naher Beziehung zur *potentiellen Energie*. Das *Potential zweier Massen auf einander*, $\iiint V d\mu$, ist die Arbeit, die erforderlich wäre, um die eine Masse entgegen der Anziehung der andern ins Unendliche zu bringen[9]).

Die Definition von V bezw. Ω behält auch dann noch einen bestimmten Sinn, wenn der Aufpunkt dem Integrationsgebiet selbst angehört; es sind auch dann noch die Ableitungen von Ω gleich den Kraftkomponenten. Dass beide Behauptungen eines besonderen Beweises bedürfen, hat wohl *Gauss* zuerst bemerkt[10]).

2. Die Laplace-Poisson'sche Differentialgleichung. *P. S. Laplace*[11]) hat zuerst angegeben, dass V als Funktion der Polarkoordinaten des Aufpunkts der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$(3) \qquad r\frac{\partial^2(Vr)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0;$$

später[12]) giebt er auch die entsprechende Gleichung für rechtwinklige Koordinaten:

---

und der Lehre vom Magnetismus kann sie > 0 oder < 0 sein. — Das Vorzeichen von Ω wird verschieden gewählt.

6) Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham 1828; abgedr. J. f. Math. 39, 44, 47 (1850—54); Papers (London 1871), p. 22; dtsch. von *A. Wangerin*, Ostwalds Klass. Nr. 61.

7) Allgemeine Lehrsätze über ... Anziehungs- und Abstossungskräfte (Beob. d. magn. Vereins f. 1839, Leipz. 1840), art. 3 (ges. Werke 5, p. 200; Ostwalds Klass. Nr. 2; franz. J. de math. 7 (1842); engl. *Taylor's* scientif. mem., Apr. 1842).

8) *C. F. Gauss*, Allgem. Theorie des Erdmagnetismus (Beob. d. magn. Vereins für 1838, Leipz. 1839), art. 6 (Werke 5, p. 129); *Clausius* versteht unter Potential diese Arbeitsgrösse, unter Potentialfunktion das V.

9) *Clausius* § 63. Dort auch § 64 Erläuterung des Begriffs des Potentials einer Masse auf sich selbst.

10) Allg. Lehrsätze [Fussn. 7] art. 6 (Werke 5, p. 202). Neuerdings *O. Hölder*, Diss. Tüb. 1882, p. 6; *J. Weingarten*, Acta math. 10 (1887), p. 303; *C. Neumann*, Leipz. Ber. 42 (1890), p. 327; *G. A. Maggi*, Lomb. Rend. (2) 22 (1889), p. 647; N. Cim. (3) 33 (1893), p. 79, 106; *L. Kronecker*, Vorlesungen 1 (1894), p. 274.

11) Par. Hist. 1782 [85], p. 135 (oeuvr. 10, p. 302).

12) ib. 1787 [89], p. 252 (oeuvr. 11, p. 278). Die Transformation der Gleichung in beliebige krummlinige Koordinaten giebt *P. G. Lamé*, J. éc. polyt. cah. 23

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{4}$$

die seinen Namen behalten hat. Ihre linke Seite stellt eine gegenüber orthogonaler Transformation der Koordinaten invariante Funktion, einen *Differentialparameter*[13]) vor, wie wohl *G. Lamé*[14]) zuerst ausgesprochen hat. Für dieselbe sind die Bezeichnungen DV (*Fourier*), δV (*Poisson*), ΔV (*Murphy*), $\Delta_2 V$ (*Lamé*), $\Delta^2 V$ (*Betti*), $-\nabla^2 V$ (*Tait*), $\nabla^2 V$ (*Gibbs*) in Gebrauch.

Die Gleichung (4) tritt auch in andern Teilen der mathematischen Physik auf; es genügt ihr das Geschwindigkeitspotential[15]) der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten; ferner die Temperaturverteilung in einem Körper ohne Wärmequellen, falls sie stationär ist[16]); endlich die Verteilung stationärer galvanischer Ströme in einem körperlichen Leiter[17]). Für eine innerhalb eines bestimmten Gebietes eindeutige und stetige Lösung derselben haben *W. Thomson* und *P. G. Tait* den Namen *„vollständige harmonische Funktion dieses Gebietes“* vorgeschlagen[18]); neuerdings wird „vollständige“ vielfach weggelassen[19]). *C. Neumann*[20]), *H. A. Schwarz*[21]) und *E. B. Christoffel*[22]) haben die Stetigkeitseigenschaften näher präcisiert, die man für weitere Schlüsse (Nr. 12 ff.) voraussetzen muss.

Gleichung (4) gilt nur, wenn der Aufpunkt ausserhalb der an-

(1834), p. 260; einfacher *W. Thomson*, Cambr. Math. J. 4. 1843 (math. phys. papers 1, p. 25). Vgl. auch *Dirichlet-Grube* § 18; *W. Franz Meyer*, Math. Ann. 26 (1886), p. 509 und Zusatz 1 zu *Betti*; *H. Petrini*, Diss. Upsala 1890, sowie Fussn. 159.

13) *Differentialinvariante der orthogonalen Gruppe* nach *S. Lie*'s Terminologie [I B 2, Nr. 22; II A 6, Nr. 13].

14) Coord. curvil. p. 5.

15) Vgl. z. B. *J. Lagrange*, Misc. Taur. 3 (1762/65), Nr. 42 (Oeuvr. 1, p. 444). Der *Name* eingeführt von *H. Helmholtz*, J. f. Math. 55 (1858), (ges. Abh. 1, p. 101).

16) *J. Fourier*, Théorie anal. de la chaleur (Par. 1822), art. 123 (Oeuvr. 1, p. 101).

17) *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 75 (1848), p. 189 (Ges. Abh. p. 36).

18) Treatise on natural philosophy (Cambr. 1873, 2. ed. 1886), App. B, b (zunächst für die Kugel).

19) *G. Lamé* (fonctions inverses, p. 5) sagt: „paramètre thermométrique“; *C. Neumann*, Unters. 1877: „kanonische Potentialfunktion“, Vorl. über Abel'sche Integrale (2. Aufl. 1884), sowie Leipz. Abh. 14 (1888), p. 565: „Fundamentalfunktion“.

20) Math. Ann. 3 (1870), p. 325.

21) Zür. Viert. 15 (1870), p. 114 (abgedr. J. f. Math. 74, p. 220; Ges. Abh. 2, p. 177).

22) Gött. Nachr. 1871, p. 445. — Vgl. *Korn* p. 180, 215, 403.

ziehenden Massen liegt (da nur dann die Differentiationen unter dem Integralzeichen vollzogen werden dürfen). Innerhalb der Masse gilt an ihrer Stelle die *Poisson'sche Gleichung*:

$$\Delta_2 V = -4\pi\varrho, \tag{5}$$

in der ϱ die Dichtigkeit im Aufpunkt bedeutet; das hat *S. D. Poisson* [23]) am Fall der Kugel konstanter Dichte erkannt, *Gauss* [24]) zuerst einwandfrei [25]) bewiesen. In der Hydrodynamik (analog in der Wärme- und der Elektricitätslehre) bedeutet (5) das Vorkommen von „Quellen" oder „Senken".

Geht man nicht von Fernkräften zwischen Punkten, sondern von Spannkräften in einem kontinuierlichen Medium aus, so sind die Differentialgleichungen dieser Nr. das Primäre; ϱ ist dann durch Gleichung (5) definiert, die Integraldarstellung (2) wird aus ihr abgeleitet [26]).

3. Stetigkeit. Verhalten im Unendlichen. Wenn die Funktion ϱ in verschiedenen Gebieten verschiedenen Gesetzen gehorcht, stellt auch V in diesen Gebieten verschiedene analytische Funktionen (II A 1, Nr. 12), bezw. Stücke von solchen vor. Aber die Werte dieser verschiedenen Funktionen schliessen sich längs der Grenzflächen stetig an einander an, und Gleiches gilt auch noch von den Werten ihrer ersten Ableitungen nach den Koordinaten; die zweiten Ableitungen dagegen erleiden in den Grenzflächen endliche Stetigkeitssprünge [27]).

Erstrecken sich die anziehenden Massen nicht ins Unendliche d. h. ist ausserhalb einer Kugel von genügend grossem Radius überall $\varrho = 0$, so bleiben:

---

23) N. Bull. philom. 3 (1813), p. 388.

24) Allg. Lehrs. (vgl. Fussn. 7), Art. 9, 10.

25) Wenn ϱ differentiierbar ist. Spätere Beweise haben allgemeinere Voraussetzungen; vgl. ausser den bei *Bacharach* p. 8—11 angeführten noch *O. Hölder*, Diss Tübingen 1882, p. 10; *H. Morera*, Lomb. Rend. (2) 20 (1887), p. 302; *C. Neumann*, Leipz. Ber. 1890, p. 327; *G. A. Maggi*, N. Cim. (3) 33 (1893), p. 249; *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1891, p. 881; Vorlesungen 1 (1894), p. 279; *H. Petrini*, Par. C. R. 130 (1900), p. 233. Bei *Kronecker* p. 289 auch ein entsprechender Satz für das Potential zweier Massen auf einander.

26) Vgl. *Cl. Maxwell*, Cambr. Trans. 10 [1855/56], p. 27 (Scient. pap. 1, p. 155; dtsch. von *Boltzmann*, Ostw. Klass. Nr. 69).

27) *Gauss*, Allg. Lehrsätze (Fussn. 7), Art. 6—9; er giebt die Sätze übrigens nicht als neu. Den Begriff der analytischen Funktion und überhaupt die schärferen Definitionen der neueren Funktionentheorie hat *H. Bruns* (Diss. Berol. 1871) hier eingeführt.

$$xV,\ yV,\ zV,\ x^2\frac{\partial V}{\partial x},\ y^2\frac{\partial V}{\partial x},\ z^2\frac{\partial V}{\partial x},\ \ldots$$

unterhalb endlicher Grenzen, wenn der Aufpunkt ins Unendliche rückt[28]).

4. Abgeleitete Potentiale. Lässt man zwei Punkte von entgegengesetzt gleicher Masse in bestimmter Richtung l einander unendlich nahe rücken und gleichzeitig die Masse in geeigneter Weise ins Unendliche wachsen, so erhält man als Grenzwert ihres Potentials:

$$\mu\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) = \mu\left\{\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, \tag{6}$$

unter μ eine Konstante, unter α, β, γ die Neigungswinkel der Richtung l gegen die Koordinatenaxen verstanden. Man stellt durch ein solches Potential die Wirkung einer *magnetischen Molekel* von der „Axe" l und dem „Moment" μ dar[29]).

Wiederholung derselben Operation führt zu *höheren abgeleiteten Potentialen*[30]); solche treten in der Theorie der Pyro- und der Piezoelektrizität auf[31]).

Wie in Nr. 1 führt Integration derartiger Potentiale von Molekeln zu gleichartigen Potentialen ausgedehnter Körper.

5. Flächenpotential. In der Elektrostatik ist man veranlasst anzunehmen, dass freie Elektrizität nur auf den Oberflächen der Leiter vorhanden ist. Aus den sich hierauf beziehenden Untersuchungen *Poisson*'s[32]) hat *Green*[33]) den Begriff des Flächenpotentials:

$$V = \iint\frac{\varrho\, d\omega}{r} \tag{7}$$

entwickelt; $d\omega$ bedeutet darin das Flächenelement, r dessen Abstand vom Aufpunkt, ϱ die Flächendichtigkeit. Seine Werte zu beiden Seiten der Fläche schliessen sich stetig an einander an; dasselbe gilt auch von den Werten seiner Ableitungen nach in der Tangentialebene liegenden Richtungen[34]). Dagegen weisen die Ableitungen nach

---

28) *P. G. Lejeune-Dirichlet,* J. f. Math. 32 (1846), p. 80 (Werke 2, p. 10), wo diese Sätze aber nicht als neu gegeben werden. Daselbst auch die Umkehrung dieser Sätze in Gestalt eines auf den ganzen Raum bezogenen Eindeutigkeitstheorems (Nr. 17); vgl. dazu *A. Tauber,* Monatsh. 9 (1898), p. 86.

29) *S. D. Poisson,* Par. mém. 5 (1821/22) [26], p. 265 [lu 2. 2. 1824].

30) *Cl. Maxwell,* Treatise on electricity and magnetism, Oxf. 1873 (deutsch von *Weinstein,* Berl. 1883), Art. 129.

31) Vgl. z. B. *W. Voigt,* Theor. Physik 1, p. 165.

32) Par. mém. 1811 [12], p. 1 [lu mai/aout 1812].

33) Essay [Fussn. 6], Art. 4.

34) *Poisson,* Par. mém. 1811 [12], p. 33; *Gauss,* Allg. Lehrsätze, Art. 13—18; vgl. Fussn. 27.

der Normale in der Fläche einen Stetigkeitssprung auf: sind nämlich n_1, n_2 die Normalen beider Flächenseiten, beide von der Fläche weg gerichtet, so ist in jedem Punkt der Fläche:

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = -4\pi\varrho. \tag{8}$$

Diese Gleichung heisst die *Coulomb-Poisson*'sche; in der That hat *Ch. A. Coulomb*[35]) gezeigt, dass der eine der beiden Differentialquotienten (Kraftkomponenten) Null ist, wenn der andere zu ϱ proportional ist. Allgemein wurde der in ihr enthaltene Satz von *Poisson*[36]) formuliert, von *Laplace*[37]) (nicht streng) und *A. Cauchy*[38]) bewiesen; die vorstehende Form hat ihr *Green*[39]) gegeben.

Die Diskontinuitäten der zweiten Ableitungen von (7) hängen von der mittleren Krümmung (III D 2) der Fläche ab. Die von $\partial^2 V/\partial n^2$ hat *Green*[40]) für Niveauflächen (vgl. Nr. **10**) gefunden und *P. Paci*[41]) von da auf beliebige Verteilungsgesetze übertragen; die der übrigen hat *C. Neumann*[42]) bestimmt.

6. Potential einer Doppelschicht. Denkt man sich eine Fläche, statt wie in Nr. **5** mit nach dem Newton'schen Gesetze anziehenden Massen, mit magnetischen Molekeln belegt, deren Axen überall in die Flächennormale fallen, so erhält man das von *H. Helmholtz*[43]) als

---

35) Par. Hist. 1788 [1791], p. 676.

36) Par. mém. 1811 [12], p. 30.

37) An der eben citierten Stelle von *Poisson* mitgeteilt. Das Prinzip des Beweises für den Fall der Kugelfläche schon bei *Lagrange*, Misc. Taur. 1 (1759), p. 142 (in einer Note zu einer Abhandlung von *Daviet de Foncenex*; oeuvr. 7, p. 591).

38) Bull. soc. philom. 1815, p. 53.

39) Essay [Fussn. 6], Art. 4. — Neuere Beweise bei *O. Hölder*, Diss. Tüb. 1882, p. 41; *G. Morera*, Lomb. Rend. (2) 20 (1887), p. 543; *G. A. Maggi*, Lomb. Rend. (2) 24 (1891), p. 87, 220, 960; N. Cim. (3) 33 (1893), p. 251; 34 (1893), p. 22; *Poincaré* p. 104; *Korn* p. 44. — Eine unter allgemeineren Bedingungen gültige Formulierung bei *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Berl. Ber. 1846, p. 211 (ges. Werke 2, p. 19); vgl. *A. M. Ljapunoff*, J. de math. (5) 4 (1898), p. 255.

40) Essay Art. 8.

41) Giorn. di mat. 15 (1877), p. 289.

42) Math. Ann. 16 (1880), p. 432; Beweise von *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 59; *Th. Horn*, Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 145; *G. A. Maggi*, Lomb. Rend. (2) 22 (1891), p. 785; für die Ebene *C. Neumann*, Leipz. Abh. 14 (1888), p. 615. — Neuerdings *Poincaré* p. 232; *Korn* p. 49. — Die dritten Ableitungen bei *P. Paci*, Gen. Atti 1892, p. 593; Pal. Rend. 8 (1894), p. 33.

43) Ann. Phys. Chem. 89 (1853) (ges. Abh. 1, p. 491). — Übrigens treten Integrale der 2. und 3. Form (9) (für $\mu = 1$) schon bei *Gauss* auf, Werke 5, p. 9 (a. d. J. 1813), solche der ersten Form bei *Green*, Essay [Fussn. 6], Art. 7. —

selbständiges Element in die Theorie eingeführte Potential einer Doppelschicht:

$$(9) \qquad W = \iint \mu \frac{\partial (r^{-1})}{\partial n} d\omega = \iint \mu \frac{\cos \vartheta}{r^2} d\omega = \iint \mu (d\omega)_x;$$

ϑ bedeutet den Winkel zwischen der Normale und der Richtung nach dem Aufpunkt, $(d\omega)_x$ die scheinbare Grösse des Elementes $d\omega$, vom Aufpunkt aus gesehen. Ein solches Potential kommt demnach einer normal zu ihren Oberflächen magnetisierten Schale zu; auch die an der Berührungsfläche zweier verschiedenen elektrischen Leiter auftretende Potentialdifferenz, sowie die elektromagnetische Wirkung eines geschlossenen Stroms lassen sich so darstellen[43]).

Wählt man den Aufpunkt auf der Fläche selbst, so ist das Integral W ein uneigentliches, konvergiert aber unter geeigneten Voraussetzungen über μ und ϑ unbedingt (II A 2, Nr. 15)[44]). Von dem so erhaltenen Wert W_ω und von einander sind die Grenzwerte $W_{a\omega}$, $W_{i\omega}$ verschieden, welchen W zustrebt, wenn der Aufpunkt von der einen (a) oder der andern Seite (i) her dem betreffenden Flächenpunkt sich nähert; es ist nämlich (für nicht-singuläre Flächenpunkte):

$$(10) \qquad W_{a\omega} - W_\omega = W_\omega - W_{i\omega} = -2\pi\mu,$$

wenn die Normale von i nach a positiv gerechnet wird[46]). Der Differentialquotient von W nach der Normale ändert sich beim Durchgang durch die Fläche stetig[47]), die Differentialquotienten nach andern Richtungen nicht[47]).

C. Neumann hat (unter Voraussetzung gewisser Stetigkeitseigen-

---

Für $\mu = 1$ stellt das Integral die scheinbare Grösse der Fläche, vom Aufpunkt aus geseben, dar (*Gauss* a. a. O.).

44) Vgl. *Poincaré* p. 69, 104, 218.

45) *H. Helmholtz* (vgl. Fussn. 43), ges. Abh. 1, p. 490. — Die für singuläre Flächenpunkte eintretenden Modifikationen hat für $\mu = 1$ *Gauss*, Allg. Lehrsätze (Fussn. 7), Art. 22, für allgemeine μ *C. Neumann*, 1877, p. 135 angegeben.

46) *Helmholtz*, Ges. Abh. 1, p. 489. Über die Stetigkeitsbedingungen, unter denen der Satz richtig ist, sowie über die andernfalls eintretenden Modifikationen vgl. man *C. Neumann* [Fussn. 43]; *G. A. Maggi*, N. Cim. (3) 34 (1893), p. 85; *A. Tauber*, Monatsh. 8 (1897), p. 79; 9 (1898), p. 77; *A. M. Ljapunoff*, Par. C. R. 125 (1897), p. 694; Chark. Mitt. (2) 6 (1897), p. 129; J. de math. (5) 4 (1898), p. 266.

47) *R. Lipschitz*, J. f. Math. 58 (1861), p. 8; vgl. die Fussn. 42 citierten Schriften. Neuerdings *G. A. Maggi*, N. Cim. (3) 33 (1892), p. 85; *Poincaré* p. 252; *Korn* p. 49; bei letzterem p. 52 auch die Diskontinuitäten der 2. Ableitungen.

schaften der Fläche und der Funktionen ϱ und μ) die Ableitungen der über eine geschlossene Fläche erstreckten Integrale V (Glchg. 7) und W (Glchg. 9) nach den Koordinaten als Summen von Potentialen je einer einfachen und einer Doppelschicht dargestellt[48]; *E. Beltrami* hat die für ungeschlossene Flächen zutretenden Randintegrale angegeben[49]).

7. Potential von Linien und Punkten. Wie vom Körper- zum Flächenpotential, kann man von diesem zum Linien-[50]) und zum Punktpotential herabsteigen und so zum Ausgangspunkt (Nr. 1) zurückkehren. Zur Untersuchung von Linienpotentialen geben „lineare" galvanische Ströme Veranlassung. *E. B. Christoffel*[51]) hat die allgemeinen Eigenschaften der Funktionen untersucht, die sich als Summen von Potentialen aller vier Arten darstellen lassen.

8. Logarithmisches Potential. Aus den Potentialen von parallelen geraden Linien, bezw. von cylindrischen Flächen und Körpern entstehen, wenn man dieselben beiderseits ins Unendliche sich ausdehnen lässt, durch einen geeigneten Grenzübergang[52]) Funktionen, welche von nur zwei Koordinaten abhängen und Differentialgleichungen der Form:

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2\pi\varrho \tag{11}$$

genügen. Sie treten bei verschiedenen physikalischen Problemen auf, wenn von der Abhängigkeit der vorkommenden Grössen von der dritten Koordinate abgesehen werden darf[53]). Eine solche Funktion wird dargestellt durch das über einen Teil der xy-Ebene erstreckte Integral:

48) Math. Ann. 16 (1880), p. 435; ausführlicher [für das logarithmische Potential, Nr. 8] Leipz. Abh. 14 (1888), p. 606.

49) Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 46.

50) So schon *Green*, Essay (Fussn. 6), Art. 12. Vgl. *Clausius* § 37, 38.

51) J. f. Math. 64 (1865), p. 321. Vgl. *Korn* p. 21.

52) *P. S. Laplace*, Mécanique céleste 1, Par. 1799, II 13 (Oeuvr. 1, p. 161). Über Potentialtheorie im *ein*dimensionalen Gebiet vgl. man *H. Burkhardt*, Bull. soc. math. 22 (1894), p. 71; *I. Schütz*, Deutsche M.-V. 7 (1899), p. 117.

53) Z. B. bei galvanischen Strömen in unendlich dünnen, ebenen, leitenden Platten, vgl. *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 64, 1845 (ges. Abh. 1, p. 1). Die Differentialgleichungen analoger Strömungen auf krummen Flächen haben *G. Kirchhoff*, Berl. Ber. 1875, p. 487; *C. Neumann*, Math. Ann. 10 (1876), p. 567; *A. Töpler*, Ann. Phys. Chem. 160 (1877), p. 375 aufgestellt; vgl. dazu *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 329. *F. Klein* (Riemann's Theorie, Leipz. 1882) macht von solchen Strömungen Gebrauch, um algebraische Funktionen komplexen Arguments und ihre Integrale zu konstruieren (II B 2, Nr. **14**). — Ein

$$u = \int\int \varrho \log \frac{1}{r}\, d\omega, \tag{12}$$

in welchem ϱ eine Funktion der Koordinaten (Dichtigkeit einer fingierten Masse), $d\omega$ ein Flächenelement, r die Entfernung desselben von der durch den Aufpunkt gelegten Parallelen zur z-Axe bedeutet. Sie kann als das Potential angesehen werden, das einer Anziehung umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung entspricht. Mit *C. Neumann*[54]) bezeichnet man ein solches Potential als *logarithmisches* (das in Nr. **1**—**7** betrachtete dann als *Newton*'sches).

Das logarithmische Potential von auf Kurven ausgebreiteten einfachen und Doppelbelegungen ist analog wie in Nr. **5**, **6** zu definieren[55]). Die Stetigkeitseigenschaften dieser Potentiale sind denen der entsprechenden Newton'schen analog; nur werden sie im Unendlichen nicht Null, sondern logarithmisch unendlich. Auch ist zu beachten, dass r^{-1} stets > 0 ist, $\log r$ sein Zeichen wechseln kann[56]).

In einem Gebiete, in welchem $\varrho = 0$ ist, ist wegen Gleichung (11):

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

ein vollständiges Differential (II A 2, Nr. **43**); infolge dessen existiert dort eine (bis auf eine additive Konstante bestimmte) *„zu u konjugierte harmonische Funktion"*:

$$v = \int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right), \tag{13}$$

und es ist $u + iv$ eine analytische Funktion des komplexen Arguments $x + iy$ [II B 1][57]). Von hier aus haben die der „Funktionentheorie" geläufigen Fragestellungen auf die Potentialtheorie zurückgewirkt.

9. Analytische Fortsetzung. So ist die dort geläufige Frage nach der analytischen Fortsetzung eines zunächst nur innerhalb eines begrenzten Gebietes definierten Funktionszweiges auch auf die *New-*

---

anderer Übergang zu Funktionen von nur zwei Variabeln bei *E. Beltrami*, Lomb. Rend. 1878; Bol. Mem. (4) 2 (1881), p. 461; (4) 4 (1883), p. 211.

54) J. f. Math. 59 (1861), p. 335.

55) *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 13, 117.

56) ib. p. 72.

57) *B. Riemann*, Diss. Gött. 1851 (Werke, p. 15). — Dass $u + iv = f(x \pm iy)$ sein muss, wenn $u\,dx - v\,dy$ und $u\,dy + v\,dx$ gleichzeitig exakte Differentialien werden sollen, hat wohl zuerst *J. L. d'Alembert* gefunden, Essai .. de la résistance des fluides, Par. 1752, p. 60.

ton'schen Potentialfunktionen übertragen worden. *R. Lipschitz*[58]) fand zunächst für das homogene Ellipsoid den Satz: Die Fläche der Fokalellipse eines solchen kann so mit Masse belegt werden, dass deren Potential (Nr. 5) ausserhalb des Ellipsoids mit dem Potential desselben übereinstimmt, folglich innerhalb diejenige analytische Fortsetzung dieses Potentials darstellt, welche auf Wegen gewonnen wird, die die Fläche der Fokalellipse nicht schneiden. Dabei sind, wie schon Gleichung (8) zeigt, die zu beiden Seiten dieser Fläche auftretenden Funktionswerte, obwohl sie in der Grenze übereinstimmen, nicht unmittelbar analytische Fortsetzungen von einander durch die Fläche hindurch. Man gelangt daher durch weitere Fortsetzung dahin, die Funktion als eine unendlichwertige anzusehen; die Fokalellipse ist ihre Verzweigungslinie in demselben Sinne, in welchem man bei Funktionen eines komplexen Arguments von Verzweigungspunkten spricht (II B 1, Nr. 11). Irgend eine in ihr ausgespannte Fläche kann dazu dienen, einen Zweig dieser unendlichwertigen Funktion eindeutig festzulegen, indem man dem Aufpunkt verbietet sie zu überschreiten; die Fläche der Fokalellipse ist unter diesen Flächen insofern als *„natürliches Diaphragma“*[59]) ausgezeichnet, als an ihr der durch sie isolierte Funktionszweig beiderseits gleiche Werte annimmt.

W. Stahl[60]) und *H. Bruns*[61]) haben auf Anregung von *K. Weierstrass* weitere Fälle untersucht; *Bruns* hat den allgemeinen Satz, dass die Fortsetzung des äusseren Potentials eines homogenen Körpers überall da möglich ist, wo die Oberfläche desselben regulär ist[62]).

Physikalische Bedeutung hat diese Mehrwertigkeit der Fortsetzung von Potentialfunktionen einmal bei Geschwindigkeitspotentialen in mehrfach zusammenhängenden Räumen[63]); dann auch in Fällen wie der folgende: Eine von galvanischem Strom durchflossene Spirale kann durch zwei magnetische Platten an ihren Enden ersetzt werden; diese geben dasselbe Potential im Aussenraum, aber einen andern Zweig im Innenraum des Cylinders, auf dem die Spirale liegt.

---

58) J. f. Math. 61 (1863), p. 22. Die Ausdrucksweise von *Lipschitz* ist im Text durch die in der Funktionentheorie jetzt allgemein übliche ersetzt.

59) *F. Klein* bei *Th. Glauner*, Diss. Gött. 1894, p. 15, 26. *Lipschitz* sagt „Potentialfläche“, *Th. Kötteritzsch*, Elektrostatik (Leipz. 1872) I § 11 „Kardinalfläche“.

60) Diss. Heidelb. 1870; J. f. Math. 79 (1875), p. 265.

61) Diss. Berol. 1871; J. f. Math. 81 (1876), p. 349.

62) Vgl. dazu *S. v. Kowalewski*, Acta math. 15 (1891), p. 45, sowie *P. Painlevé*, Toul. Ann. 2 (1887), p. 77.

63) *H. Helmholtz*, J. f. Math. 58, 1858 (ges. Abh. 1, p. 105). Vgl. übrigens *J. d'Alembert*, Opuscules math. 5, Paris 1768, p. 13.

Von endlichwertigen Potentialfunktionen hat *P. Appell*[64]) ein Beispiel, *A. Sommerfeld*[65]) eine systematische Darstellung gegeben.

10. Niveauflächen und Kraftlinien. Die Flächen, längs welcher das Potential je einen konstanten Wert hat, treten bei *C. Maclaurin*[66]) als „level surfaces", bei *A. Clairaut*[67]) als *surfaces de niveau* auf (gelegentlich der Untersuchungen über die Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, deren Teilchen sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen). Die aus dem Potential resultierende Anziehungskraft ist in jedem Punkt einer solchen Fläche zu ihr normal und hat den Wert $\partial V/\partial n$, ist also dem Abstand des Punktes von „der unendlich benachbarten" Niveaufläche umgekehrt proportional[68]). Die orthogonalen Trajektorien (III D 2) der Niveauflächen haben folglich die Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte die Kraftrichtung mit der Tangente zusammenfällt; man nennt eine solche Linie nach *M. Faraday* Kraftlinie[69]). Versteht man unter V ein Geschwindigkeitspotential (Nr. 2) einer stationären Strömung, so ist die Strömung überall zu den Niveauflächen senkrecht; die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen werden Stromlinien, $\partial V/\partial n$ giebt die Geschwindigkeit der Strömung. Legt man durch alle Punkte einer geschlossenen Kurve Kraft-, bezw. Stromlinien, so erhält man eine *Kraft-*, bezw. *Stromröhre*[70]); eine der letzteren heisst Einheitsstromröhre, wenn durch ihren Querschnitt in der Zeiteinheit die Einheit der Flüssigkeitsmenge strömt. — Statt von der Anzahl der Einheitsröhren, die

64) Math. Ann. 30 (1887), p. 155.

65) Lond. math. Proc. 28 (1897), p. 395. Vgl. auch *H. S. Carslaw*, ib. 30 (1899), p. 121.

66) Treatise on fluxions (Edinb. 1742) Art. 640.

67) Figure de la terre (Par. 1743, 2. Abdr. 1808), Kap. 5. — *Gauss*, Allg. Lehrs. (vgl. Fussn. 7) Art. 4, sagt: Gleichgewichtsfläche.

68) *M. Chasles*, J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 305. *Chasles* leitet aus diesem Satz die „natürliche Belegung" [Fussn. 152] für jede Fläche ab, die als Niveaufläche des Potentials irgend einer Massenverteilung bekannt ist [Par. C. R. 8 (1839), p. 209]. — Eine Art Umkehrung giebt *J. Bertrand*, ib. 107 (1888), p. 985. — Die Bedingung dafür, dass ein Flächensystem als ein System von Niveauflächen angesehen werden kann, giebt *G. Lamé*, Par. sav. [étr.] 5 (1838), p. 175, [J. de math. 2 (1837), p. 147].

69) Zuerst Lond. Trans. 141 (1831), p. 2 (Nr. 114). Mathematisch formuliert wurden *Faraday*'s Vorstellungen von *W. Thomson*, Cambr. math. J. 1, 1842 (anonym), abgedr. Philos. Mag. (4) 7 (1854), p. 502 und Papers on electr. p. 1. Vgl. auch *M. Chasles*, J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 366 und Connaiss. des temps 1845 [1842], p. 24; *Cl. Maxwell*, Cambr. Trans. 10 (1856), p. 27 [s. Fussn. 26].

70) Canal orthogonal bei *Chasles* tube of force bei *Faraday*.

etwa eine Fläche treffen, spricht *Faraday*[71]) von der „Anzahl der Strom-, bezw. Kraftlinien".

Beim logarithmischen Potential vertauschen sich Niveaukurven und Kraftlinien, wenn man zum konjugierten Potential (Gleichung 13) übergeht. Beide Systeme zusammen „teilen die Ebene in unendlich kleine Quadrate"[72]).

11. Verallgemeinerungen des Potentialbegriffs. Auf mehrfach ausgedehnte Räume ist die Potentialtheorie schon von *Green*[73]), auf nichteuklidische von *E. Schering*[74]) übertragen worden. Ein allgemeiner Potentialbegriff kommt zu Stande, wenn man die Kraft einer beliebigen Funktion der Koordinaten von Aufpunkt und Kraftcentrum gleichsetzt[75]); speziell erwähnt sei das „zweite Potential" *G. Lamé*'s[76]), das einer Anziehungskraft direkt proportional der Entfernung entspricht.

Setzt man in Gleichung (2) statt der „skalaren Ortsfunktion" ϱ einen variabeln Vektor und versteht die Summationen geometrisch (III B 3), so entsteht ein *Vektorpotential*[77]).

Neuere Physiker haben die Bezeichnung „Potential" auf die verschiedensten Funktionen übertragen, deren Ableitungen in den Differentialgleichungen physikalischer Probleme auftreten (kinematisches, thermodynamisches u. s. w. Potential); diese bleiben hier ausser Betracht, da sie andern mathematischen Gesetzen gehorchen.

12. Green'sche Formeln. Eine Reihe fundamentaler Sätze der Potentialtheorie beruhen auf der Umformung von Raumintegralen in Oberflächenintegrale. Von solcher hat *Gauss* schon 1813[78]) vielfach

---

71) Z. B. Lond. Trans. 161 (1851), Nr. 3117, 3122.

72) Diese Ausdrucksweise scheint aus der *Weierstrass*'schen Schule zu stammen. Vgl. z. B. *G. Holzmüller*, Isogonale Verwandtschaften (Leipz. 1882, p. 80). Vgl. auch III D 3.

73) Cambr. Trans. 1835 (Papers p. 190).

74) Gött. Nachr. 1870, p. 311; 1873, p. 149. — Weitere Litteratur beider Fragestellungen bei *Bacharach* p. 75—78; neuerdings *L. Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 268; *A. Gutzmer*, Diss. Halle 1893; *H. Poincaré*, Acta math. 22 (1898), p. 104.

75) *J. Boussinesq*, Application des potentiels (Paris 1885), p. 264 Fussn.; *C. Neumann*, Unters. 1895.

76) Elasticité des corps solides, Par. 1852, § 27. Vgl. auch *E. Mathieu*, J. de math. (2) 14 (1869), p. 378; Potentiel 1, p. 77, sowie *A. Gutzmer*, Diss. Halle 1893.

77) *Cl. Maxwell*, Treatise [Fussn. 26] 2, Art. 404.

78) Gött. Comm. rec. 2, 1813 (Werke 5, p. 1). — Vgl. auch *J. L. Lagrange*, Misc. Taur. 2, 1760/61, Art. 45 (Oeuvres 1, p. 263).

Gebrauch gemacht; systematisch ist sie von *Green*[79]) angewendet, dessen beide Grundformeln bereits II A 2, Nr. 47 angegeben sind. Genügen U, V beide der Laplace'schen Differentialgleichung, so folgt:

$$\iint \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\omega = 0 . \tag{14}$$

Setzt man andererseits $U = 1$ und versteht unter V das Potential von Massen, die innerhalb des betrachteten Raumes liegen, so erhält man:

$$\iint \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = 4\pi M , \tag{15}$$

wenn unter M die Gesamtmasse verstanden und die Normale positiv nach Innen gerechnet wird[80]). Setzt man $U = V$ gleich dem Potential von Massen ausserhalb des betrachteten Raumes, so folgt:

$$-\iint V \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau . \tag{16}$$

Sind U, V oder ihre Ableitungen in dem betrachteten Raume nicht überall stetig, so sind die Umgebungen der Unstetigkeitsstellen aus dem Gebiete, auf das die Raumintegrale sich beziehen, auszuscheiden und die Oberflächenintegrale über die zu dieser Ausscheidung dienenden Flächen mit zu erstrecken. Wird speziell[81]) U in einem Punkte (a, b, c), dem *Pol*, unendlich wie r^{-1}, wo:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (c-z)^2} ,$$

so ist dieser Punkt durch eine Kugel auszuscheiden. Lässt man den Radius dieser Kugel unendlich klein werden, so erhält man die *„modifizierte Green'sche Formel“*[82]):

---

79) Essay [Fussn. 6] art. 3. — Man vgl. auch die doch wohl von *Green* unabhängigen Entwicklungen bei *J. M. C. Duhamel*, J. éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 69 und *G. Lamé*, ib. p. 204 [prés. 8. 5. 1829]. Unter Benutzung krummliniger Koordinaten leitet *E. Beltrami* diese Sätze ab, Bol. mem. (4) 6 (1885), p. 408.

80) Die Gleichungen (15) und (16) sind von *Gauss* [Fussn. 7] gegeben; die zweite ist dort ganz ebenso bewiesen, wie *Green* seine allgemeine Formel beweist. Gleichung (15) auch bei *M. Chasles*, Conn. des temps 1845 [1842], p. 26. Ableitung der Gauss'schen Formeln aus den Green'schen bei *Fr. Neumann*, Vorl. p. 198; Untersuchung des gegenseitigen Verhältnisses der *Gauss*'schen und der *Green*'schen Formeln bei *E. Beltrami*, Bol. mem. (3) 9 (1878), p. 456. — Durch Anwendung der Formeln (15) auf Kraftröhren gelangt man von den Differentialgleichungen zu den Fernkräften zurück (vgl. den Schluss von Nr. 2).

81) D. h. wenn $U - r^{-1}$ in der Umgebung des Poles die Stetigkeitsbedingungen (Fussn. 18) erfüllt und $\lim (U - r^{-1}) = 0$ wird bei jeder Art der Annäherung des Aufpunktes an den Pol.

82) Essay Art. 3, Gleich. 3.

$$\iiint U\Delta_2 V\,d\tau + \iint U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega = \iiint V\Delta_2 U\,d\tau + \iint V\frac{\partial U}{\partial n}\,d\omega - 4\pi V_0, \tag{17}$$

in der V_0 den Wert von V im Pol bedeutet. Genügen U, V beide der Laplace'schen Differentialgleichung, so folgt[83]):

$$4\pi V_0 = \iint \Big(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\Big)d\omega; \tag{18}$$

speziell für $U = r^{-1}$ selbst[84])

$$4\pi V_0 = \iint \Big(V\frac{\partial (r^{-1})}{\partial n} - r^{-1}\frac{\partial V}{\partial n}\Big)d\omega, \tag{19}$$

sodass eine beliebige harmonische Funktion eines Gebietes (Nr. 2) als Summe der Potentiale einer einfachen (Nr. 5) und einer Doppelschicht (Nr. 7) sich darstellen lässt. Aus diesen Gleichungen folgt, dass jede harmonische Funktion eines Gebietes im ganzen *Innern* (II A 1, Nr. 21) desselben eine *analytische* Funktion (ib. Nr. 12) der Koordinaten des Aufpunktes ist[85]).

Für mehrwertige Potentialfunktionen mehrfach zusammenhängender Bereiche erfordern die Green'schen Gleichungen Zusatzglieder, auf deren Notwendigkeit *H. Helmholtz*[86]) aufmerksam gemacht und die dann *W. Thomson*[87]) angegeben hat.

Für das logarithmische Potential sind die entsprechenden Sätze von *B. Riemann*[88]) entwickelt worden.

13. Gauss' allgemeine Lehrsätze. Mit dem Green'schen Essay decken sich zum Teil die „allgemeinen Lehrsätze" von *Gauss*[7]). Er geht (Art. 19) aus von der unmittelbar ersichtlichen allgemeinen Formel:

$$\sum m_i V_i = \sum M_\varkappa v_\varkappa, \tag{20}$$

in der V_i den Wert des Potentials der Massen M im Punkte m_i, $v_\varkappa$ den des Potentials der Massen m im Punkte $M_\varkappa$ bedeutet. Indem

83) ib. Art. 5.

84) ib. Art. 7; vgl. auch *E. Beltrami*, Bol. mem. (3) 9 (1878), p. 469.

85) *B. Riemann*, Diss. Gött. 1851, Art. 10 (Werke p. 21) für zwei Variable; *H. Bruns*, J. f. Math. 81 (1876), p. 349 für drei.

86) J. f. Math. 55 (1858), p. 29, 31 (ges. Abh. 1, p. 105, 108).

87) Edinb. Trans. 25 (1869), p. 239.

88) Diss. Gött. 1851 [also bald nach dem Abdruck des Hauptteils von *Green*'s Essay (Fussn. 6) im J. f. Math.] Art. 7—10 (Werke p. 12 ff.); vgl. dazu *C. Neumann*, J. f. Math. 59 (1862), p. 335 und Abel'sche Integrale, 1. Aufl. (Leipz. 1865), p. 53; *G. Simart*, Par. thèse 1882.

er dieselbe, bezw. die entsprechende Integralformel auf den Fall anwendet, dass das zweite Massensystem mit der konstanten Dichtigkeit 1 auf einer Kugelfläche vom Radius R ausgebreitet ist, findet er (Art. 20):

$$\iint V d\omega = 4\pi(RM^0 + R^2 V^0); \tag{21}$$

V bedeutet dabei das Potential irgend welcher Massen, V^0 den von ausserhalb der Kugel gelegenen Massen erzeugten Bestandteil desselben, M^0 die Summe der innerhalb gelegenen Massen. Für $M^0 = 0$ folgt insbesondere (Art. 21):

$$V_0 = \frac{1}{4R^2\pi}\iint V d\omega, \tag{22}$$

d. h. der Wert, den das Potential irgend welcher ausserhalb der Kugel gelegenen Massen im Kugelmittelpunkt besitzt, ist das arithmetische Mittel aus seinen Werten an der Kugeloberfläche („*Gauss'scher Satz des arithmetischen Mittels*“)[89]. Aus dieser Formel leitet *Gauss* den ebenfalls häufig nach ihm benannten Satz ab[90]: Das Potential von Massen, die ausserhalb eines zusammenhängenden Raumes liegen, kann nicht in einem Teil dieses Raumes einen konstanten, in einem andern einen davon verschiedenen Wert haben. Es folgen die hier mit (15) und (16) bezeichneten Gleichungen; die letztere führt (Art. 25) zu der Folgerung: Wenn in allen Punkten der Grenzfläche eines begrenzten, von Massen freien Raumes das Potential einerlei Wert hat, so gilt dieser Wert auch für sämtliche Punkte dieses Raumes selbst; — sowie zu einem analogen, wenn auch nicht ganz so einfachen Satz für einen ins Unendliche sich erstreckenden Raum (Art. 26)[91].

14. Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen. (Vgl. II B 4 b.) Fasst man in der Entwicklung des Potentials nach Potenzen der Koordinaten mit positiven ganzzahligen Exponenten, die nach Nr. **12** möglich ist, sobald der Ursprung ausserhalb der anziehenden Massen

89) *Gauss* schliesst aus Gleichung (22), dass das Potential ausserhalb der anziehenden Massen weder Maximum noch Minimum, also ein Punkt unter dem Einfluss dieser Massen nirgends in stabilem Gleichgewicht sein kann. In der letzteren Form war der Satz 1839 von *S. Earnshaw* (Cambr. Trans. 7, p. 97) gegeben worden.

90) Art. 22. Der Beweis von *Gauss* schliesst nicht jeden Zweifel aus; der Satz folgt daraus, dass jede harmonische Funktion analytisch ist (Nr. **12**). Vgl. *C. Neumann*, 1877, p. 9.

91) Das sind also „Eindeutigkeitssätze“ in dem unter Nr. **17** zu besprechenden Sinne.

liegt, die Glieder gleicher Dimension zusammen, so erhält man eine Entwicklung der Form:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \tag{23}$$

in der jedes einzelne Glied V_n, das eine homogene rationale ganze Funktion n^{ten} Grades der rechtwinkligen Koordinaten des Aufpunktes ist, für sich der *Laplace*'schen Differentialgleichung (Nr. 2) genügt. Man nennt eine solche Funktion eine *räumliche Kugelfunktion* n^{ter} *Ordnung*[92]. Führt man räumliche Polarkoordinaten ϱ, ϑ, φ ein, so erscheint V_n als Produkt aus ϱ^n in eine Funktion $Y_n(\vartheta, \varphi)$ von ϑ und φ allein, die *Kugelflächenfunktion*[93] (gewöhnlich einfach Kugelfunktion) n^{ter} Ordnung genannt wird; die allgemeinste solche Funktion enthält $2n+1$ Konstanten linear und homogen[94]. Es genügt dann auch $\varrho^{-n-1} Y_n(\vartheta, \varphi)$ der Laplace'schen Differentialgleichung und ist die allgemeinste Lösung dieser Gleichung, die gleich dem Produkt aus ϱ^{-2n-1} in eine homogene rationale ganze Funktion der rechtwinkligen Koordinaten ist[95]. Infolge dessen treten in der Entwicklung des Potentials nach fallenden Potenzen von ϱ ebenfalls die Y_n als Koeffizienten auf:

$$V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \varphi)}{\varrho^{n+1}}. \tag{24}$$

Die einzelnen Glieder dieser Entwicklung entstehen aus ϱ^{-1} durch Anwendung des Verfahrens von Nr. 4.[96].

Ist V_n das Potential gegebener Massen, so drücken sich die Y_n durch die über die Massen genommenen Integrale:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \iiint \mu P_n(\cos\gamma) \varrho'^{n+2} \sin\vartheta' d\varrho' d\vartheta' d\varphi' \tag{25}$$

92) Spherical harmonic bei *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Treatise [Fussn. 16], 1^1, appendix B, a.

93) ib. b.

94) ib. j.

95) ib. g.

96) *Cl. Maxwell*, Treatise [Fussn. 26] Art. 130; Beweis bei *J. J. Sylvester*, Phil. Mag. (5) 2 (1876), p. 305; *Thomson* und *Tait*, a. a. O. Art. j (der 2. Auflage). – In der Theorie des logarithmischen Potentials entsprechen den Entwicklungen (23) und (24) die Entwicklungen von Funktionen komplexen Arguments nach steigenden, bezw. fallenden Potenzen desselben; die Gegenüberstellung z. B. bei *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 8.

97) In dieser Form ist die Entwicklung von *P. S. Laplace* gegeben worden, Par. Hist. 1782 [85], p. 136; p. 140 auch die Entwicklung (23) (oeuvr. 10, p. 364, 370).

aus, in welchen P_n das n^{te} Legendre'sche Polynom (II B 4 b, Nr. 2) bedeutet und:

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')$$

ist[97]). Die Entwicklung konvergiert, wenn der Aufpunkt weiter vom Ursprung entfernt ist, als irgend ein Punkt der anziehenden Massen, unter Umständen auch noch darüber hinaus.

Dabei ist $Y_0 = M$ (gleich der Summe der anziehenden Massen); ferner, wenn der Ursprung in den Schwerpunkt der anziehenden Massen verlegt ist:

$$Y_1 = 0, \qquad Y_2 = \tfrac{1}{2}(A + B + C - 3J), \tag{26}$$

unter A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Massensystems, unter J sein Trägheitsmoment um die durch den Aufpunkt gehende Axe verstanden[98]).

Ist die Masse auf einer Kugelfläche verteilt und nimmt man an, dass die Entwicklungen (23) und (24) auch noch auf dieser konvergieren und dort gliedweise differentiiert werden dürfen, so liefert die Coulomb-Poisson'sche Gleichung (8) die Entwicklung der Dichtigkeit — also einer vorgegebenen Funktion des Ortes auf der Kugel — nach Kugelfunktionen[99]).

15. Potential von Kugel und Ellipsoid. Dass eine *homogene Kugelschale* auf einen in ihrem inneren Hohlraum gelegenen Punkt keine Wirkung ausübt, auf einen äusseren dieselbe, wie wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, hat schon *Newton* gezeigt[100]). Das Interesse der Astronomie forderte weiter die Bestimmung des Potentials, bezw. der Anziehung eines homogenen Ellipsoids; das Problem blieb ein beliebter Kräftemesser der wetteifernden

---

98) In dieser Form bei *J. Mac Cullagh*, Dubl. Trans. 22, 1855 [53] (Coll. works p. 360).

99) In ähnlicher Weise hat *P. S. Laplace* diese Entwickelbarkeit gefunden, Par. Hist. 1782 [85], p. 145 (oeuvr. 10, p. 373); er benutzt eine Gleichung zwischen V und $\frac{\partial V}{\partial r}$. Dass seine Entwicklungen auf verschiedenen unbewiesenen Voraussetzungen beruhen, hat schon *J. Ivory*, Lond. Trans. 122 (1812), p. 1; 132 (1822), p. 19 bemerkt; vgl. auch *Taegert*, Progr. Gymn. Cöslin 1871. Die entsprechende Ableitung der Fourier'schen Reihe bei *W. Voigt*, Linc. rend. (5) 8^1 (1899), p. 93.

100) Principia I, sect. 12. Dass der erste Teil des Satzes *nur* für das *Newton*'sche Gesetz gilt, ist für die Elektrizitätslehre fundamental (*H. Cavendish*, Lond. Trans. 61^1, 1771 [72], p. 592 [Researches p. 8]).

Methoden, auch nachdem dem ursprünglichen Interesse durch Gleichung (26) genügt war. Die Anziehung auf einen innern Punkt hatte *P. S. Laplace*[101]) durch einfache Integrale ausgedrückt; auch hatte er den gewöhnlich nach *Maclaurin*[102]) genannten Satz, der in der jetzt üblichen Terminologie so lautet: „Die Potentiale konfokaler Ellipsoide auf einen und denselben äusseren Punkt verhalten sich wie ihre Massen", allerdings auf einem Umweg[103]), bewiesen und dadurch das äussere Problem auf das „innere" zurückgeführt. Dieselbe Reduktion hat *J. Ivory*[104]) mit Hülfe eines andern Satzes (III C 4) ausgeführt; dagegen giebt er für die Lösung des „inneren" Problems noch Reihenentwicklungen ohne Beweis ihrer Konvergenz. *C. F. Gauss*[105]) transformiert zunächst die dreifachen Integrale, welche die Anziehungskomponenten geben, in Oberflächenintegrale [Potentiale von einfachen (teor. III) und von Doppelschichten (teor. VI)]; Einführung geeigneter Koordinaten auf der Fläche[106]) giebt eine zur weiteren Behandlung taugliche Form dieser letzteren; Vergleichung der Werte für zwei konfokale Ellipsoide giebt das genannte *„Maclaurin'sche"* Theorem und damit die Reduktion der Doppelintegrale auf einfache (elliptische) Integrale[107]).

M. Chasles hat dann in Verallgemeinerung von Sätzen, deren erster Ursprung auf *Newton* zurückgeht, gezeigt, dass für das Potential einer von zwei konzentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzten, unendlich dünnen homogenen Schicht die äussere Begrenzungsfläche und alle zu ihr konfokalen äusseren Ellipsoide

101) Théorie du mouvement et de la figure des planètes, Paris 1784, p. 89; vgl. auch Par. Hist. 1782 [85], p. 120 (oeuvr. 10, p. 349).

102) *C. Maclaurin* hatte Spezialfälle dieses Satzes bewiesen und die näherungsweise Richtigkeit desselben für wenig von der Kugel abweichende Ellipsoide behauptet; vgl. *F. Grube*, Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 261; Progr. Gymn. Schleswig 1883 und 1888, sowie *Todhunter*, Art. 259.

103) Théorie du mouvement (Fussn. 101), p. 83 ff. Er sagt (p. 85): „ce résultat seroit très-difficile à démonstrer à priori". Vgl. auch Par. Hist. 1782 [85], p. 127 (oeuvr. 10, p. 357), wo die inzwischen eingeführte Bezeichnung der Kugelfunktionen benutzt wird. Genau genommen fehlt der Beweis, dass die benutzten Reihen bis an die Oberfläche heran konvergieren.

104) Lond. Trans. 119 (1809), p. 345. Der *Ivory*'sche Satz gilt auch bei andern Kraftgesetzen, *S. D. Poisson*, Bull. soc. philom. 3 (1812), p. 180.

105) Gott. Comm. rec. 2 (1813) (ges. Werke 5, p. 1).

106) Derselben, deren sich auch *Ivory* bedient hatte.

107) *J. Somoff* hat nach der Methode von *Gauss* das Potential selbst bestimmt, St. Petersb. Bull. 19 (1873), p. 215, und Mechanik 2, p. 192; vgl. übrigens *Gauss*' Werke 5, p. 296 (a. d. Nachlass).

Niveauflächen (Nr. **10**) sind[108]), und einen neuen geometrischen Beweis des „Maclaurinschen“ Satzes gegeben[109]). Damit war die Reduktion auf ein einfaches Integral ebenfalls erreicht[110]).

G. Lejeune-Dirichlet bediente sich eines *diskontinuierlichen Faktors* (II A 2, Nr. **42**), um die Integration statt über das Ellipsoidvolumen über den ganzen Raum erstrecken zu können[111]).

Das Resultat ist für einen inneren Punkt:

$$(27a)\quad V = \frac{3}{4} M \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+s} - \frac{y^2}{\beta^2+s} - \frac{z^2}{\gamma^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}},$$

für einen äusseren:

$$(27b)\quad V = \frac{3}{4} M \int_\sigma^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2+s} - \frac{y^2}{\beta^2+s} - \frac{z^2}{\gamma^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}};$$

dabei bedeuten x, y, z die Koordinaten des Aufpunktes, α, β, γ die Halbaxen des Ellipsoids, M seine Masse, σ die (einzige) positive Wurzel der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} - 1 = 0.$$

Das Potential zweier Ellipsoide auf einander hat *F. Mertens*[112]) bestimmt.

---

108) J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 254 und 266; vgl. Rapport sur les progrès de la géométrie en France (Par. 1870), p. 101. Der erste Theil des Satzes für ein wenig von der Kugel abweichendes Ellipsoid schon bei *S. D. Poisson*, Par. mém. 1811 [12], p. 25.

109) Par. C. R. 5 (1837), p. 842; J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 257; Par. sav. [étr.] 9 (1846), p. 629. Vgl. den Rapport von *Poisson*, Par. C. R. 6 (1838), p. 808.

110) Im Zusammenhang hat *Chasles* seine Untersuchungen J. de math. 5 (1840), p. 465 dargestellt.

111) Par. C. R. 8, p. 156; J. de math. 4, p. 169; Berl. Ber. p. 18; Berl. Abh. p. 61 (1839) (ges. Werke 1, p. 375, 381, 391). Vgl. auch die Darstellungen in den von *F. Grube* und von *G. F. Meyer* herausgegebenen Vorlesungen *Dirichlet*'s über Potentialtheorie und über bestimmte Integrale. — Der Nachweis der Zulässigkeit der von *Dirichlet* vorgenommenen Vertauschungen der Integrationsreihenfolge bringt Umständlichkeiten mit sich; vgl. *Kronecker*, Vorl. 1, p. 322. — *Dirichlet* hat auch die fertigen Formeln mit Hülfe seines Eindeutigkeitssatzes verifiziert, vgl. Fussn. 28.

Die Abhandlungen von *Laplace*, *Ivory*, *Gauss*, *Chasles* und *Dirichlet* sind von *A. Wangerin* deutsch herausgegeben worden, Ostw. Klass. Nr. 19.

Weitere Angaben über die sehr ausgedehnte Litteratur der Frage bei *Bacharach*, p. 61 und bei *W. Schell*, Mechanik 2, Leipz. 1880, p. 309, 320.

112) J. f. Math. 63 (1864), p. 360, nach Andeutungen von *Dirichlet*, Berl. Abh. 1839 p. 78 (ges. Werke 1, p. 409).

16. W. Thomson's elektrische Bilder. Befinden sich in zwei Punkten Massen von entgegengesetzten Vorzeichen, so ist unter den Niveauflächen des von ihnen erzeugten Potentials eine Kugel. Sind m_1, m_2 die Massen beider Punkte, r_1, r_2 ihre Entfernungen vom Kugelmittelpunkt, a der Kugelradius, so ist:

$$r_1 r_2 = a^2, \quad m_1 : m_2 = r_1 : a = a : r_2.$$

W. Thomson, der diese Theorie zuerst entwickelt hat[113]), nennt die beiden Punkte „elektrische Bilder" von einander, die geometrische Verwandtschaft zwischen ihnen ist die der *„reciproken Radienvektoren"* (III A 7). Aus den für diese geltenden geometrischen Sätzen folgt dass die von „korrespondierenden Massensystemen" auf „korrespondierende Punkte" ausgeübten Potentiale sich wie die Quadratwurzeln aus den Abständen dieser Punkte vom Kugelcentrum verhalten, dass also, wenn $V(r, \vartheta, \varphi)$ eine Potentialfunktion ist, $\frac{a}{r} V\left(\frac{a^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ ebenfalls eine solche ist. Durch diesen Satz hat *Thomson* eine Reihe scheinbar schwieriger Aufgaben der Potentialtheorie auf andere zurückgeführt, deren Lösung auf der Hand liegt.

Der entsprechende Satz in der Theorie des *logarithmischen* Potentials gestaltet sich nicht ganz so einfach, wenn man von Potentialen gegebener Massenverteilungen ausgeht[114]); redet man aber nur von Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\Delta_2 V = 0$, so lautet er kurzweg: mit $V(r, \varphi)$ zugleich ist auch $V(a^2 r^{-1}, \varphi)$ eine solche Lösung. Er erscheint dann als Spezialfall des allgemeinen Satzes:

Eine Aufzählung der zahlreichen andern Bestimmungen des Potentials gegebener Massenverteilungen ist hier nicht möglich; vgl. die in Fussn. 111 erwähnten Litteraturzusammenstellungen.

Für das Potential eines von der Kugel wenig abweichenden Körpers hat *P. G. L. Dirichlet* eine einfache Formel gegeben, Berl. Abh. 1850, p. 114 (ges. Werke 2, p. 87).

Den *„Körper grösster Anziehung"* hat *G. de St. Jaeques de Silvabelle*, Par. sav. [étr.] 1 (1750), p. 175 (a. d. J. 1745) bestimmt; vgl. auch *J. Playfair*, Edinb. Trans. 6 (1812) [1807], p. 187* und *Th. Knight*, Lond. Trans. 122 (1812), p. 283. Neuerdings *A. Sella*, Linc. Rend. (5) 1^1 (1892), p. 350; 2^1 (1893), p. 90; 3^1 (1894), p. 436; 3^2 (1894), p. 47; *N. Pierpaoli*, ib. 2^1 (1893), p. 130; 3^1 (1894), p. 173; *A. Ragnoli*, sui corpi di massima attrazione, Spoleto 1895*; *E. Lampe*, Berl. Phys. Ges. 15 (1896), p. 84.

113) J. de math. 10 (1845), p. 368; 12 (1847), p. 256; Papers on electr. and magn. p. 144; treatise [Fussn. 16] 1^2, art. 510. — Unabhängig von *Thomson* bei *C. Neumann*, Lösung des allg. Problems etc., Halle 1861. — Für homogene Koordinaten (Potential/*formen*) *F. Klein* bei *F. Pockels*, $\Delta u + k^2 u = 0$ (Leipz. 1891), p. 197 und bei *Böcher*, p. 17.

114) *C. Neumann*, Unters. 1877, Anhang.

mit $V(x, y)$ zugleich ist auch $V(\xi, \eta)$ eine Lösung von $\Delta_2 V = 0$, wenn $\xi + i\eta$ eine analytische Funktion eines der beiden komplexen Argumente $x \pm iy$ ist[115]).

17. Randwertaufgaben; Eindeutigkeits- und Existenztheorem. Die Green'schen Formeln (18), (19) stellen den Wert, den eine harmonische Funktion (Nr. 2) eines Bereiches in irgend einem Punkte desselben annimmt, durch die Werte von V und $\partial V/\partial n$ auf der Begrenzung des Bereiches dar. Bei willkürlicher Annahme dieser *„Randwerte"* geben jene Formeln zwar immer eine harmonische Funktion, diese nimmt aber auf der Begrenzung andere als die vorgeschriebenen Werte an. Dagegen führten physikalische Erfahrungen zu der Überzeugung, dass es genügt, V allein vorzuschreiben, wenn man noch bestimmte Stetigkeitseigenschaften fordert. Wirken z. B. auf einen zur Erde abgeleiteten Konduktor äussere elektrische Massen, so stellt sich auf seiner Oberfläche eine bestimmte Verteilung der Elektrizität her, deren Potential in allen inneren Punkten dem der einwirkenden Massen entgegengesetzt gleich ist[116]); d. h. mathematisch ausgedrückt: sind auf einer geschlossenen Fläche die Werte eines Potentials äusserer Massen vorgeschrieben, so giebt es stets eine und nur eine harmonische Funktion des von der Fläche umschlossenen Bereiches, deren Randwerte jenen Werten entgegengesetzt gleich sind. Hier sind die vorgegebenen Randwerte die eines Potentials äusserer Massen, woraus über den Grad ihrer Willkürlichkeit zunächst nichts folgt.

Andererseits zeigt die Erfahrung, dass in einem Körper, dessen Oberfläche auf nach der Zeit konstanter, mit dem Ort variabler Temperatur gehalten wird, eine stationäre Temperaturverteilung sich einstellt[117]). Das giebt denselben mathematischen Satz; die Randwerte erscheinen aber jetzt als ganz willkürlich.

Man kam so zu den beiden Sätzen[118]):

---

115) *C. Neumann*, J. f. Math. 59 (1861), p. 348; 1877, Kap. 2. — Von dem Übergang von $f(x+iy)$ zu $f(x-iy)$ (allgemeines Prinzip der Spiegelung) haben *B. Riemann*, Gött. Abh. 13 (1867) (ges. Werke Nr. 17, Art. 5, 12), *H. A. Schwarz*, Bestimmung einer speziellen Minimalfläche, Berl. 1867 (ges. Abh. 1, p. 9), *F. Klein* und *H. Poincaré* (vgl. II B 6c) vielfach Gebrauch gemacht.

116) Dieser Satz ist von *C. A. Coulomb* (Par. Hist. 1786 [88], p. 67; 88 [91], p. 671) experimentell gefunden, von *S. D. Poisson* (Par. mém. 1811 [12] p. 3) an die Spitze seiner Elektrizitätstheorie gestellt worden. Vgl. *Green*, essay [Fussn. 6] Art. 8.

117) *J. Fourier*, vgl. Fussn. 14.

118) Die nicht immer scharf auseinander gehalten worden sind. Der Ge-

I. *(Eindeutigkeitssatz): Eine harmonische Funktion eines begrenzten*[119] *Bereiches ist eindeutig bestimmt durch die Werte, die sie auf der Begrenzung annimmt.*

II. *(Existenzsatz): Diese letzteren Werte können willkürlich vorgegeben werden; es gibt dann jedesmal eine zugehörige harmonische Funktion.*

Es entstand die Aufgabe, diese zunächst nur durch die Erfahrung approximativ gegebenen Sätze zu *beweisen*, bezw. die Voraussetzungen über a) die Stetigkeit der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen; b) die Natur des Bereichs; c) die gegebenen Randwerte zu präzisieren, unter denen der Beweis sich führen lässt.

Die Angabe von Methoden, die in geeigneten Fällen die Berechnung der gesuchten Funktion mit der erforderlichen Genauigkeit gestatten, also die wirkliche Lösung der *„Randwertaufgabe“*[120], ist dann ein weiteres Problem, für das noch verhältnismässig wenig geschehen ist.

Physikalische Probleme führen noch auf zwei weitere Randwertaufgaben und die zugehörigen Eindeutigkeits- und Existenztheoreme. Soll die stationäre Strömung in einem Gebiet bestimmt werden, wenn die in jedem Moment durch jedes Oberflächenelement einströmende Flüssigkeitsmenge gegeben ist, so heisst das: eine harmonische Funktion des Bereiches zu finden, wenn die Randwerte von $\partial V/\partial n$ gegeben sind [natürlich so, dass $\iint \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = 0$ ist, vgl. Gleichung 15] — *zweite Randwertaufgabe*[121]. Soll die stationäre Temperaturverteilung in einem Körper bestimmt werden, der nach dem Newton'schen Erkaltungsgesetze Wärme an eine Umgebung abgiebt, deren Temperatur nach der Zeit konstant, nach dem Ort veränderlich ist, so heisst das es sind die Randwerte von $V + h \frac{\partial V}{\partial n}$ vorgeschrieben (h eine [positive] Konstante) — *dritte Randwertaufgabe*[122].

danke, Sätze, die in einem Anwendungsgebiet der Differentialgleichung $\Delta_2 V = 0$ physikalisch evident sind, auf die andern zu übertragen, ist von *W. Thomson* (Fussn. 62) bestimmt formuliert und vielfach verwendet worden. Doch tritt er auch schon bei *M. Chasles* auf, vgl. z. B. J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 297.

119) Bei ins Unendliche sich erstreckenden Bereichen sind noch Voraussetzungen über das Verhalten der Funktion im Unendlichen zu machen.

120) Der Name *„problème de Dirichlet“* ist historisch nicht zu rechtfertigen; viel eher noch *„Green's problem“* (*Thomson* und *Tait*, treatise [Fussn. 16], 2, Nr. 499).

121) *W. Thomson*, vgl. Fussn. 69; *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 75, (1848), p. 192 (ges. Abh. p. 39); *Riemann-Hattendorff*, p. 226.

122) *J. Fourier*, Théorie analytique de la chaleur (Par. 1822), Art. 146 ff.

18. Green'sche Funktion. *Green* hat die allgemeine erste Randwertaufgabe mit Hülfe seiner Gleichung (18) auf einen speziellen Fall derselben reduziert. Gelingt es nämlich, U so zu bestimmen, dass es auf der ganzen Begrenzung Null wird, so giebt die entstehende Gleichung[123]:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\iint V \frac{\partial U}{\partial n}\, d\omega \tag{29}$$

den Beweis des Eindeutigkeitssatzes und einen Ansatz zum Beweis des Existenzsatzes[124]). Die Existenz der Funktion U erschliesst *Green* physikalisch: sie ist gleich dem Potential einer in (a, b, c) befindlichen Masse 1 plus dem Potential der Belegung, die dieser Punkt auf der Oberfläche induziert, wenn sie zur Erde abgeleitet ist. Sie heisst *Green'sche Funktion* des Bereichs[125]); andere Autoren[126]) gebrauchen diesen Namen für $G = U - r^{-1}$, d. h. für das Potential jener Belegung, der *Green'schen Belegung*[127]), allein. Beide Funktionen bleiben ungeändert, wenn man Pol und Aufpunkt vertauscht[128]).

Für das logarithmische Potential gelten analoge Sätze[129]), ausserdem noch der folgende: Ist U_1 das zu der Green'schen Funktion U konjugierte Potential (Nr. 8), so vermittelt $e^{-U-U_1 i}$ die konforme Abbildung (II B 1, Nr. 6, 18) des gegebenen Bereichs auf die Fläche des Einheitskreises in der Weise, dass das Bild des Pols in den Nullpunkt fällt[130]).

Auch für die zweite und dritte Randwertaufgabe sind *„Green'sche Funktionen"* angegeben, bezw. postuliert worden[131]).

(oeuvr. 1, p. 122). Dabei ist $h > 0$ vorauszusetzen; für $h < 0$ gilt das Eindeutigkeitstheorem nur bei Ausschluss gewisser (für jeden Bereich in unendlicher Anzahl vorhandener) ausgezeichneter Werte von h; *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 5 (1873), p. 333; allgemeiner *F. Pockels*, $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipz. 1891, p. 185.

123) Essay [Fussn. 6] Art. 5. Man erinnere sich, dass U den Punkt 0 zum Pol haben sollte.

124) Auf diesem Ansatz beruhen Methoden zur Integration anderer Differentialgleichungen; vgl. II A 7 c, Nr. 4.

125) *B. Riemann*, Vorl. § 23; *Fr. Neumann* (Vorl. p. 239) sagt: *charakteristische Funktion.*

126) *C. Neumann*, Allgem. Lösung des Problems etc., Halle 1862, p. 82.

127) *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 345.

128) *Green*, Essay [Fuss. 6] Art. 6.

129) Vgl. die Gegenüberstellung bei *C. Neumann*, Unters. 1877, Kap. 1.

130) *B. Riemann*, Diss. Art. 21 (ges. Werke p. 39).

131) *R. Lipschitz*, J. f. Math. 58 (1861), p. 7 (mit Hülfe der Schlussweise von *Gauss* [Nr. 23]); *C. A. Bjerknes*, Skand. Forh. 1868; Christ. Forh. 1871, p. 350; *E. Beltrami*, Bol. mem. (3) 1870/73; Principii dell' idrodinamica razionale,

Man kann Gleichung (29) übrigens so deuten, dass jedem Randpunkt ein Elementarpotential zugewiesen und von allen diesen die Summe gebildet wird[132]).

19. Die Poisson'schen Integrale. Für die Kugel, bezw. den Kreis erlaubt die Methode von *W. Thomson* (Nr. **16**) die Green'sche Funktion sofort anzugeben, man findet

$$\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r'}, \text{ bezw. } \log\frac{1}{r} - \log\frac{a^2}{r'},$$

wenn a der Kugel-(Kreis-)Radius, r, r' die Entfernungen des Aufpunktes vom Pol und von dessen Bildpunkt sind. Man erhält damit als *Lösung der ersten Randwertaufgabe für Kugel und Kreis* die Poisson'schen Integrale:

$$(30) \qquad V = \frac{1}{4\pi}\iint \overline{V}\,\frac{a^2-\varrho^2}{ar^3}\,d\omega, \qquad V = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}\,\frac{a^2-\varrho^2}{ar^2}\,d\sigma,$$

die *S. D. Poisson*[133]) ursprünglich durch die Methode der Reihenentwicklungen (Nr. **20**, **21**) gefunden hat; in ihnen bedeutet ϱ die Entfernung des Aufpunktes vom Kugel-, bezw. Kreismittelpunkt, $\overline{V}$ den für $d\omega$, bezw. $d\sigma$ vorgegebenen Randwert. Für das zweite hat *C. Neumann*[134]) die Formen gegeben:

$$(31) \quad V = \frac{1}{\pi}\int \overline{V}\left(\frac{\cos\vartheta}{r} - \frac{1}{2a}\right)d\sigma = \frac{1}{\pi}\int \overline{V}\,(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}\,(d\sigma)_c,$$

ϑ der Winkel zwischen r und der Normalen des Elements $d\sigma$, $(d\sigma)_x$ und $(d\sigma)_c$ die scheinbaren Grössen von $d\sigma$, vom Aufpunkt, bezw. Kreismittelpunkt aus gesehen; *H. A. Schwarz*[135]) giebt die Form:

$$V = \frac{1}{2\pi}\int \overline{V}\,d\sigma',$$

---

*Bologna 1873, p. 370; *U. Dini*, Linc. mem. (2) 3 (1876), p. 129; *Fr. Neumann*, Vorl. p. 272; *F. Klein* bei *Fr. Pockels*, $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipz. 1891, p. 253.

132) Man vgl. die entsprechende Auffassung anderer Integraldarstellungen bei *W. Thomson*, Encyclop. Britann. 1880 (math. phys. papers 2, p. 44).

133) Für zwei Variable in noch nicht ganz derselben Form J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 422; für drei ib. 19 (1823), p. 150; später noch öfter. Das erste Integral (30) kommt bereits bei *J. Lagrange* [ib. 15 (1809), p. 63 (oeuvr. 7, p. 363)] gelegentlich der Untersuchung der Anziehung eines nahezu kugelförmigen Körpers vor; auch sein Grenzwert für $\varrho = a$ wird dort bestimmt (durch partielle Integration, p. 65). Es steht auch in naher Beziehung zu der Fussn. 99 erwähnten Formel von *Laplace*.

134) Abel'sche Funktionen, 2. Aufl. (Leipz. 1884), p. 410.

135) Bei *L. Schläfli*, Progr. Univ. Bern 1874, p. 10; (vgl. *Schwarz*, ges. Abh. 2, p. 360).

$d\sigma'$ die Projektion von $d\sigma$ vom Aufpunkt auf den gegenüberliegenden Bogen des Kreises.

Den Beweis der Richtigkeit seiner Formel für beliebig vorgegebene stetige Randwerte hat *Poisson* im wesentlichen schon selbst geführt, ihn auch gegen Einwendungen *J. Ivory*'s[136]) aufrecht erhalten[137]). Auch wenn der Aufpunkt einem Randpunkt in beliebiger Weise sich nähert, konvergiert das Integral gegen den vorgeschriebenen Randwert[138]). Der Fall einzelner Stetigkeitssprünge in den Randwerten lässt sich durch Subtraktion einer Summe von Arcustangens-Funktionen auf den Fall stetiger Randwerte zurückführen[138]).

20. Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen. Die Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis (vom Radius 1) kann auch dadurch geschehen, dass man die Randwerte, sofern das möglich ist, in eine trigonometrische Reihe entwickelt[139]):

$$\overline{V} = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi); \tag{32}$$

es ist nämlich dann:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}{}' r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{33}$$

Die Koeffizienten a_n, b_n bestimmen sich durch Integrale (II A 8):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}{}' \overline{V} d\varphi, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi}{}' \overline{V} \cos n\varphi \, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi}{}' \overline{V} \sin n\varphi \, d\varphi;$$

aus *Poisson*'s Untersuchungen geht hervor, dass die mit diesen Integralen gebildete Reihe (33) auch in solchen Fällen konvergiert und die Aufgabe löst, in denen die Reihe (32) nicht konvergiert[140]).

---

136) Phil. Mag. (2) 1 (1827), p. 324.

137) ib. (2) 2 (1827), p. 11.

138) *F. E. Prym*, J. f. Math. 73 (1871), p. 380; *H. A. Schwarz*, Zürich. Viert 15 (1870), p. 113 [J. f. Math. 74 (1872), p. 220; ges. Abh. 2, p. 186; vgl. die Nachträge p. 360]; *P. du Bois-Reymond*, Darb. Bull. (2) 3 (1879), p. 351; *C. Neumann*, Leipz. Abh. 14 (1888), p. 591. Vgl. auch *W. Veltmann*, Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 4; *A. Harnack*, Grundlagen p. 101, 129; *J. Riemann*, Par. thèse (Ann. éc. norm. (3) 5 (1888), p. 26); *L. Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 86. — Man kann sich zum Beweise des erstgenannten Satzes auch eines Lemmas von *P. Painlevé* bedienen, Toul. Ann. 2 (1889), p. 19.

139) *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 433; *Fourier*, Théorie de la chaleur (Fussn. 14), Kap. 3 und 7, behandelt in dieser Weise zahlreiche Beispiele von rechtwinklig begrenzten Körpern unter speziellen Randbedingungen.

140) Diese von *Poisson* wiederholt, z. B. J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 422,

Es wird also hier eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta_2 V = 0$ von einem gewissen Grad der Allgemeinheit dargestellt durch eine Reihe, deren einzelnes Glied selbst dieser Gleichung genügt und dabei ein Produkt aus einer Funktion von r allein und einer Funktion von φ allein ist.

21. Entwicklung nach Kugelfunktionen. Soll in analoger Weise, unter r, ϑ, φ Polarkoordinaten im Raume verstanden, der Gleichung $\Delta_3 V = 0$ durch ein Produkt aus einer Funktion $R(r)$ und einer Funktion $Y(\vartheta, \varphi)$ genügt werden, so muss $R = \alpha r^n + \beta r^{-n-2}$, Y eine Kugelflächenfunktion n^{ter} Ordnung (Nr. **14**) sein[140a]). Innerhalb der Einheitskugel überall eindeutig und stetig ist dieses Produkt, wenn n eine positive ganze Zahl, $\beta = 0$ und $r^n Y_n$ eine rationale ganze Funktion der rechtwinkligen Koordinaten, also eine vollständige räumliche Kugelfunktion ist. Gelingt es dann, eine gegebene Oberflächenfunktion in eine nach den Kugelflächenfunktionen fortschreitende Reihe $\sum Y_n$ zu entwickeln, so ist $\sum r^n Y_n$ die Lösung der zugehörigen ersten Randwertaufgabe[141]), $\sum \frac{r^{n+1}}{n+1} Y_n$ die der zweiten[142]); $\sum \frac{n r^n}{h+n} Y_n$ die der dritten[143]).

Für Körper, die von je zwei Flächen eines jeden der drei orthogonalen Systeme $r = \text{Const.}$, $\varphi = \text{Const.}$, $\vartheta = \text{Const.}$ begrenzt sind, haben *Thomson* und *Tait* den entsprechenden Ansatz angedeutet[144]). Unter diesen allgemeinen Ansatz subsumieren sich zahlreiche vorher und nachher — meist unabhängig von ihm — ausgeführte Spezialuntersuchungen[145]).

---

betonte Auffassung ist neuerdings von *A. Sommerfeld* (Diss. Königsb. 1891) und *E. Le Roy*, Par. thèse 1898 (J. éc. norm. (3) 16, 1899), p. 152, Nr. 60 wieder hervorgehoben worden.

140a) *Poisson*, Par. mém. 5 (1821/22 [26], p. 306, Nr. 22.

141) *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 150.

142) *F. Neumann*, Vorl. p. 273.

143) *U. Dini*, vgl. Fussn. 122.

144) Treatise [Fussn. 16], 1, appendix B, litt. f, g, m, o, e′.

145) Vgl. *Bacharach*, p. 61 ff.; *Böcher*, p. 239 ff. Von den hierher gehörigen Spezialfällen sei wegen seiner Wichtigkeit für die Anwendungen der von *zwei Kugeln* erwähnt; vgl. z. B. *F. Neumann*, Vorl. p. 277 oder *Riemann-Hattendorff*, p. 189. Er ist zuerst von *S. D. Poisson* behandelt, Par. mém. 1811 [12] p. 34. Vergleich der Methoden von *Poisson* und *Riemann* bei *Th. Kötteritzsch*, Elektrostatik, Leipz. 1872, p. 177. — Das Problem *dreier* Kugeln hat *E. Neumann* in Angriff genommen, Leipz. Ber. 1896, p. 634; J. f. Math. 120 (1899), p. 60.

22. Allgemeinere Entwicklungen. In allgemeineren Fällen kommt es zunächst auf Einführung zweckmässiger Koordinaten von der Beschaffenheit an, dass längs jenes Teiles der Begrenzung je eine derselben konstant ist, und dass ausserdem $\Delta_2 V$ sich einfach in ihnen ausdrückt und durch ein Produkt von Faktoren befriedigt werden kann, deren jeder nur von *einer* Koordinate abhängt[146]). In diesem Sinne hat *G. Lamé*[147]) die elliptischen Koordinaten (III C 4) und die Laméschen Polynome (II B 4) zur Integration der Laplace'schen Gleichung für das Ellipsoid verwendet. Das ist dann nach verschiedenen Richtungen verallgemeinert worden[148]).

Für einen Körper beliebiger Gestalt hat *H. Poincaré*[149]) „fonctions fondamentales" (die dann nicht mehr wie bei *Lamé* in Faktoren zerfallen) durch Minimumseigenschaften (analog den in Nr. 24 zu besprechenden) definiert und nach ihnen fortschreitende Reihenentwicklungen postuliert.

Die Existenz jener Funktionen und die Konvergenz dieser Entwicklungen sind dann von *E. Le Roy* bewiesen worden[149a]).

23. Gauss' Versuch, das Existenztheorem zu beweisen. Einen Beweis des Existenztheorems (Nr. 17) für beliebig gestaltete Körper hat zuerst *Gauss* zu geben versucht[150]): Sei eine Masse M so über die Oberfläche des Körpers verteilt, dass auf jedes Element $d\omega$ von ihr die Masse $m\,d\omega$ $(m > 0)$ kommt; sei V das Potential dieser Verteilung, U eine gegebene Funktion auf der Oberfläche. Es wird dann „offenbar" — sagt *Gauss* — unter allen möglichen Verteilungsarten eine geben, für welche ein Minimum des Integrals:

$$\Omega = \iint (V - 2U) m\, d\omega \tag{34}$$

stattfindet. Giebt man das zu, so kann man mit *Gauss* ohne Schwierigkeit zeigen:

---

146) Eine etwas allgemeinere Bedingung bei *A. Wangerin*, Berl. Ber. 1878, p. 153.

147) Par. sav. [étr.] 5 (1838), p. 174 = J. de math. 2 (1837), p. 147; ib. 4 (1839), p. 351. Vgl. die angeführten Monographien *Lamé*'s.

148) Vgl. *Bacharach*, p. 61, sowie die Monographie von *Häntzschel*. Die Untersuchungen *F. Klein*'s über das allgemeinste hierher gehörige dreifach orthogonale Flächensystem, das der konfokalen Cykliden, sind von *M. Böcher* (s. Litteratur) dargestellt und ergänzt worden.

149) Acta math. 20 (1896), p. 118, 124; vgl. *Poincaré*, Potentiel, p. 348.

149a) Ann. éc. norm. (3) 14, 1897 (Par. thèse 1898, p. 131). Vgl. auch *W. Stekloff*, Par. C. R. 126 (1898), p. 1022; 128 (1899), p. 279, 588, 808, 984; *Renaux*, ib. 129 (1899), p. 545; *S. Zaremba*, J. de math. (5) 6 (1900), p. 47.

150) Allg. Lehrs. [Fussn. 7] Art. 29 ff.

1) dass bei solcher Verteilung die Differenz $V - U$ in allen denjenigen Teilen der Fläche, die wirklich mit Masse belegt sind, einen konstanten Wert hat;

2) dass in dem speziellen Fall $U = 0$ kein Teil der Fläche unbelegt bleiben kann, dass es also eine Verteilungsart giebt, die keinen Teil der Fläche frei lässt[151]) und aus der ein auf der ganzen Fläche konstantes Potential hervorgeht[152]);

3) dass man durch Zufügung eines Multiplums der zweiten Verteilung die Konstante des ersten Satzes zu Null machen kann, sodass man eine Verteilung erhält, deren Potential V auf der ganzen Oberfläche $= U$ ist.

Damit würde also nicht nur der Existenzsatz bewiesen, sondern auch gezeigt sein, dass die gesuchte harmonische Funktion sich als Potential einer einfachen Oberflächenschicht (Nr. 5) darstellen lässt.

24. Thomson-Dirichlet'sches Prinzip. Des Schlusses auf die Existenz des Minimums eines Integrals bedient sich auch *W. Thomson*[153]) zum Beweis der Existenz der Lösung der zweiten Randwertaufgabe (Nr. 17): sie wird gelöst durch die Funktion, die das über den Körper erstreckte dreifache Integral

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \tag{35}$$

unter der Nebenbedingung

$$\iint V \frac{\partial V}{\partial n}\, d\omega = A \tag{36}$$

(bei geeigneter Bestimmung der Konstanten A) zu einem Minimum macht. Ebenso stützt *P. G. L. Dirichlet*[154]) seinen Beweis der Existenz einer Lösung der *ersten* Randwertaufgabe auf den Ausspruch: es ist

---

151) Zu diesem Satz vgl. man auch *E. Picard*, Traité d'analyse 1, p. 180.

152) Eine solche Verteilung stellt sich auf einem mit Elektrizität geladenen und dann sich selbst überlassenen Konduktor ein; *C. Neumann* 1877, p. 71, 343 nennt sie „*natürliche Belegung*". Vgl. *G. Robin*, Ann. éc. norm. (3) 3 (1886), Suppl. — *M. Chasles* nahm noch 1839 (Par. C. R. 8, p. 211) an, es gebe mehrere solche Belegungen.

153) In einem Zusatz zu der französischen Übersetzung [J. de math. 12 (1847), p. 496] einer in Cambr. Dubl. math. J. 3 (1848), p. 84 erschienenen Abhandlung (die selbst von einer andern Differentialgleichung handelt); Papers on electr. and magnetism p. 143. Vgl. übrigens *G. Green*, Cambr. Trans. 5 (1835), p. 401 (Papers p. 192).

154) Zuerst veröffentlicht von *L. Natani*, Math. Wörterbuch 5, Berlin 1866, p. 602; dann von *Hattendorff* und von *Grube*; neuerdings *Weierstrass*, ges. Werke 2, p. 49.

„einleuchtend", dass unter allen Funktionen V, die im Innern einer geschlossenen Fläche sich nebst ihren ersten Derivierten überall stetig ändern und auf der Oberfläche die vorgeschriebenen Werte annehmen, es eine (oder mehrere) geben muss, für die das über den ganzen Innenraum erstreckte Integral (35) seinen kleinsten Wert erhält. In England wird diese Schlussweise als *Thomson'sches Prinzip*[155]) bezeichnet; *B. Riemann*[156]) hat sie als *Dirichlet'sches* auf die Theorie des logarithmischen Potentials und die mit ihr eng verknüpfte Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments übertragen und zugleich auf Funktionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten ausgedehnt. In der That gelang es ihm (vgl. II B 2, Nr. **12**), aus diesem Prinzip die Existenz algebraischer Funktionen und ihrer Integrale auf beliebig vorgegebener Riemann'scher Fläche abzuleiten und überhaupt zur Untersuchung ausgedehnter Funktionsklassen von ihren Eigenschaften aus den Weg zu bahnen.

25. Kritik des Thomson-Dirichlet'schen Prinzips. Aber eben diese Erfolge veranlassten zur Prüfung des Fundaments: die von *K. Weierstrass* vorgenommene Revision der Grundlagen der Variationsrechnung (II A 9, Nr. **9**) ergab die Unhaltbarkeit desselben in der vorliegenden Form[157]). Man kann nicht ohne weiteres behaupten, dass es eine *den Stetigkeits- und Oberflächenbedingungen genügende* Funktion geben müsse, für die ein Integral, dessen Elemente alle positiv sind, ein *Minimum* ist; man kann zunächst nur behaupten, dass es für ein solches Integral eine *untere Grenze* (I A 3, Nr. **16**) giebt, der es beliebig nahe kommen kann, die aber entweder überhaupt niemals wirklich erreicht wird oder doch nur, sofern man auf

155) Zuweilen wird jedoch unter diesem Namen das Prinzip der elektrischen Bilder (Nr. **16**) verstanden.

156) Diss. Art. 16 (ges. Werke p. 30); J. f. Math. 54 (1857) (ges. Werke p. 97). — Übrigens wird in der funktionentheoretischen Litteratur (auch schon bei *Riemann* selbst) unter Dirichlet'schem Prinzip häufig der Existenzsatz selbst, zuweilen auch der Eindeutigkeitssatz mit verstanden.

157) Seit dem Ende der 50er Jahre. Im *Druck* scheint die erste Andeutung darüber bei *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 70 (1869), p. 120 (ges. Abh. 2, p. 83), die erste präzise Auseinandersetzung bei *H. Bruns* (Diss.. Berol. 1870, p. 12) vorzuliegen. Vgl. auch die Note von *E. Heine*, Gött. Nachr. 1871, p. 375 [Math. Ann. 4 (1870), p. 626]. Eine von *Weierstrass* 1870 in der Berl. Akad. gelesene Note ist erst 1895 in ges. Werke 2, p. 49 veröffentlicht worden. — Auch *Dirichlet* soll *Steiner*'s geometrischen Untersuchungen über Maxima und Minima gegenüber schon ähnliche Bedenken geäussert haben (*E. Lampe*, Bibl. math. (3) 1, p. 134).

eine der Nebenbedingungen (Stetigkeit, stetiger Anschluss an die Randwerte) verzichtet[158]).

Übrigens bleibt von dem Thomson-Dirichlet'schen Prinzip der vielfach[159]) nützliche Satz bestehen, dass die Lösung der Randwertaufgabe, *wenn* sie existiert und einen endlichen Wert des Integrals liefert[159a]), das Integral (36) zu einem Minimum macht.

Erst ganz neuerdings hat *D. Hilbert*[159b]) mitgeteilt, dass es ihm gelungen sei, die Existenz stetiger Lösungen für zahlreiche Probleme der Variationsrechnung, insbesondere auch für die hier in Frage stehenden, zu beweisen.

26. Methode der Approximation durch Polygone bezw. Polyeder. Nach der Beseitigung des Dirichlet'schen Prinzips hat den ersten Beweis für einen speziellen Fall des Existenzsatzes (in der Ebene) *H. A. Schwarz*[160]) gegeben. *Christoffel*[161]) und *Schwarz*[162]) selbst hatten die allgemeine Form der Funktionen gefunden, die die konforme Abbildung geradlinig begrenzter Polygone auf die Kreisfläche vermitteln, und *Weierstrass* hatte *Schwarz* einen Beweis[163]) dafür mitgeteilt, dass es stets möglich sei, die in diese allgemeine Form eingehenden Konstanten so zu bestimmen, dass man die Abbildung eines gegebenen Polygons erhält. Darauf gestützt beweist *Schwarz* die *Existenz der Green'schen Funktion* für jedes einfach zu-

158) Mit der unteren Grenze statt des Minimums ist für die weiteren Schlüsse nichts anzufangen; wenn man nur weiss, dass der Wert eines Integrals kleiner gemacht werden kann als jede angebbare Grösse, so kann man daraus allein über die Werte der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion nichts schliessen.

159) Z. B. für die Einführung anderer Koordinaten in die Differentialgleichung, *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 36 (1848), p. 115 (ges. Werke 2, p. 196). Auch für Konvergenzbeweise z. B. bei *Poincaré*, Acta math. 20 (1896), p. 69, sowie *E. Le Roy*, Ann. éc. norm. (3) 16 (1899) (Par. thèse 1898, p. 107).

159a) Ein Beispiel, in dem letzteres nicht zutrifft, giebt *F. E. Prym*, J. f. Math. 73 (1871), p. 361.

159b) Deutsche M.-V. 8 (1899), p. 184.

160) Progr. polyt. Schule Zürich f. 1869/70 (mit unwesentlichen Änderungen ges. Abh. 2, p. 108).

161) Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 1; vgl. Gött. Nachr. 1870, p. 288, 359.

162) J. f. Math. 70 (1869), p. 107 (ges. Abh. 2, p. 80).

163) Dieser Beweis ist nicht veröffentlicht worden; *Schwarz* hat sich später den Beweis durch Anwendung der kombinatorischen Methoden (Nr. 28) geführt gedacht, ges. Abh. 2, p. 140, 146, 167. Neuerdings hat *E. Phragmén* einen von *L. Schläfli*, J. f. Math. 78 (1873), p. 63, gegebenen Ansatz zu einem direkten Beweis vervollständigt, Acta math. 14 (1890), p. 229. Für das Dreieck vgl. man *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 70 (1869), p. 130 (ges. Abh. 2, p. 97).

sammenhängende, ganz im Endlichen liegende Gebiet, das die Ebene nirgends mehrfach überdeckt und dessen Begrenzung überall nach aussen konvex ist, indem er der Reihe nach zeigt: dass ein solches Gebiet durch eine Folge von Polygonflächen approximiert werden kann, deren jede der vorhergehenden ganz angehört; dass die Green'schen Funktionen dieser Polygone für einen bestimmten im Innern des Gebietes liegenden Punkt als Pol in allen inneren Punkten desselben [gleichmässig, II A 1, Nr. 17] gegen eine Grenzfunktion konvergieren; dass diese Grenzfunktion die Green'sche Funktion des gegebenen Bereiches ist.

A. Harnack[164]) hat auch nicht-konvexe Bereiche der Methode zugänglich gemacht, indem er das Gebiet durch Polygonflächen approximiert, deren jede der *folgenden* ganz angehört; auch giebt er an[165]), wie man die Methode auf den Raum (und auf mehrdimensionale Gebiete) ausdehnen kann, wenn der Fall des Polyeders durch die in Nr. 27 und 28 zu besprechenden Untersuchungen vorher erledigt ist.

Die konforme Abbildung des gegebenen Bereiches auf eine Kreisfläche verlangt ausser der Kenntnis der Green'schen Funktion noch die der zu ihr konjugierten; die bei nichtanalytischer Begrenzung hier auftretenden Schwierigkeiten[166]) haben *A. Harnack*[167]), *P. Painlevé*[168]), *C. Neumann*[169]) und *Fr. von Dalwigk*[169a]) behandelt.

27. Die Methode des arithmetischen Mittels. Ein zweiter Ansatz zum Beweis des ersten Existenztheorems, und zwar direkt für den allgemeinen Fall, weist zurück auf einen älteren Ansatz von *A. Beer*[170]), der seinerseits an die Gauss'sche Fassung des Problems (Nr. 23) anknüpft. *Beer* schreibt zunächst die Green'sche Formel (19):

---

164) Leipz. Ber. 1886, p. 152 (Math. Ann. 35, p. 24); Grundlagen p. 116. Man vgl. auch die Untersuchungen von *E. Ritter* über die Stetigkeit der Green'schen Funktion bei stetigen Abänderungen des Bereiches, Math. Ann. 45, 1894, insbes. p. 480.

165) Leipz. Ber. 1886, p. 164 (Math. Ann. 35, p. 37).

166) Ähnliche Schwierigkeiten treten auf, wenn man von der Lösung des im Text besprochenen speziellen Falles der Randwertaufgabe mit Hülfe der Gleichung (29) zu der des allgemeinen Falles übergehen will. Man vgl. darüber *H. A. Schwarz*, Zürich. Viert. 15 (1870), p. 116 [J. f. Math. 74 (1872) p. 224 = ges. Abh. 2, p. 183, 184] (für den Fall des Kreises); *A. Harnack*, Leipz. Ber. 1885 (Math. Ann. 35, p. 32); Grundlagen p. 121—139; sowie Fussn. 180.

167) Grundlagen p. 148.

168) Par. C. R. 112 (1891), p. 653.

169) Leipz. Abh. 14 (1888), p. 662. — 169a) Habilit.-Schrift, Marburg 1897.

170) Ann. Phys. Chem. 98 (1856), p. 187; Elektrostatik (Braunschweig 1865), p. 455. Vgl. *C. Neumann*, 1877, Kap. 6.

$$V_0 = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + V_1, \tag{37}$$

wo:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\iint V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \tag{38}$$

selbst eine harmonische Funktion ist. Für sie ist also analog:

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial V_1}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + V_2$$

u. s. w.; man erhält schliesslich durch die Gleichung:

$$V = -\iint \frac{H}{r}\, d\omega \tag{39}$$

V dargestellt als Potential einer einfachen Oberflächenschicht von der Dichtigkeit

$$H = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}(V + V_1 + V_2 + \cdots). \tag{40}$$

Die Konvergenz dieser Entwicklung hat *Beer* nicht dargethan[171]); auch verlangt sie Kenntnis der Oberflächenwerte von V (in 38) *und* $\partial V/\partial n$ (in 40), sodass der Beweis der Existenztheoreme durch sie nicht erbracht werden kann[172]).

C. Neumann's Methode des arithmetischen Mittels[173]) verfährt in gewissem Sinne umgekehrt wie *Beer*: statt bei jedem Schritt denjenigen Teil der Green'schen Formel, der als Potential einer Doppelschicht dargestellt ist, auf den nächsten Schritt hinauszuschieben, behält er diesen bei und schiebt den andern hinaus, sodass die Lösung der ersten Randwertaufgabe schliesslich in der Gestalt des Potentials einer Doppelschicht erscheint. Er bildet, von den gegebenen Randwerten ausgehend, der Reihe nach die Funktionen[174]):

---

171) Für konvexe und nicht „zweisternige" Flächen giebt *C. Neumann* den Konvergenzbeweis, 1877, p. 230.

172) Abgesehen von dem Fall, dass die gegebenen Oberflächenwerte die eines Potentials äusserer Massen sind, sodass man nicht nur die V, sondern auch die $\partial V/\partial n$ kennt. Bei elektrostatischen und magnetischen Problemen ist das in der That der Fall; vgl. *C. Neumann*, 1877, p. 243.

173) Leipz. Ber. 1870, p. 50 (Math. Ann. 11, p. 264); 1877, Kap. 5; Leipz. Abh. 13 (1887), p. 707.

174) ω bedeutet einen Punkt der Oberfläche, f_ω den Wert der Funktion f in diesem Punkt (vgl. Glchg. 10), $d\omega$ ein in ω gelegenes Flächenelement, $(d\omega)_x$ seine scheinbare Grösse vom Aufpunkt aus gesehen, C eine durch die Methode selbst definierte Konstante ($\lim_{n=\infty} W_\omega^{(n)}$). Im Falle des Auftretens von Kanten oder Ecken sind die Formeln etwas zu modifizieren, vgl. *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 179. *C. Neumann* giebt gleichzeitig die Formeln für den Aussenraum eines

$$(41)\quad \begin{aligned} W &= -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int U_\omega (d\omega)_x, \qquad W' = -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int W_\omega (d\omega)_x, \\ W'' &= -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int W'_\omega (d\omega)_x, \quad \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

und erhält dann die gesuchte Funktion dargestellt durch die unendliche Reihe:

$$(42)\quad \begin{aligned} &-C + (W - W') + (W'' - W''') + \cdots = \\ &-C - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int \left\{ U_\omega - W_\omega) + (W'_\omega - W''_\omega) + \cdots \right\} (d\omega)_x . \end{aligned}$$

In der That gelingt es ihm zu beweisen, dass diese Reihe im Innern des betrachteten Bereiches konvergiert, eine harmonische Funktion vorstellt und bei Annäherung des Aufpunktes an die Oberfläche stetig in die vorgegebenen Randwerte übergeht; vorausgesetzt, dass die Fläche überall konvex und nicht „zweisternig", d. h. nur aus zwei Kegelmänteln zusammengesetzt ist. *H. Poincaré*[175]) hat den Konvergenzbeweis, unter Voraussetzung der Existenz der gesuchten Funktion, auch für nicht überall konvexe stetig gekrümmte Flächen geführt.

Nahe verwandt mit der Neumann'schen Methode, jedoch mit ihr und unter einander nicht identisch, sind die Methoden von *G. Kirchhoff*[176]), *G. Robin*[177]) und *W. Stekloff*[178]).

Will man die gesuchte harmonische Funktion als Potential einer *einfachen* Schicht darstellen (vgl. Nr. 23), so sind noch Untersuchungen über das Verhalten ihrer Ableitungen bei Annäherung an die Begrenzung erforderlich[179]); ebenso, wenn man die Existenz der Green'schen

konvexen Bereiches; er führt ferner auch die Lösung der „zweiten" Randwertaufgabe auf Grund einer Bemerkung von *H. Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 89 (1853), p. 230 (ges. Abh. 2, p. 481) auf seine Lösung der ersten zurück. (Vgl. auch *W. Stekloff*, Par. C. R. 130 (1900), p. 480).

175) Acta math. 20 (1896), p. 59. Für den Fall, dass im Innern der Fläche ein Punkt existiert, für den alle $(d\omega)_x$ dasselbe Zeichen haben, hat *A. Korn* p. 235 den Poincaré'schen Beweis von der erwähnten Voraussetzung befreit. Ein Verfahren, durch das man sich auch von dieser letzten Beschränkung noch befreien kann, deutet *Ch. Noble* nach *D. Hilbert*, Gött. Nachr. 1896, p. 191, an, ein anderes *W. Stekloff*, Par. C. R. 130 (1900), p. 396, 826 (vgl. dazu: *A. Korn*, ib. p. 557, 1238).

176) Acta math. 14 (1890), p. 180.

177) Par. C. R. 104 (1887), p. 1834; vgl. *Picard*, Analyse 1, p. 188; *Korn*, p. 344; *A. M. Ljapunoff*, J. de math. (5) 4 (1898), p. 241; *W. Stekloff*, Par. C. R. 128 (1899), p. 580.

178) Par. C. R. 125 (1897), p. 1026.

179) *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 295; Leipz. Ber. 1878, p. 48; Leipz.

Funktion auf diesem Wege nachgewiesen hat und nun Gleichung (29) zur Lösung der Randwertaufgabe für allgemeinere Fälle benutzen will[180]).

Auf das logarithmische Potential ist die Methode von *C. Neumann* selbst, auf mehrdimensionale Gebiete von *E. Riquier*[181]) übertragen worden.

Im Falle der Kugel, resp. des Kreises unterscheiden sich die W_ω nur um eine konstante Differenz von den U_ω, sodass schon die beiden ersten Glieder der Reihe die (natürlich mit dem Poisson'schen Integral, Nr. **19**, zusammenfallende) Lösung geben.

28. Kombinatorische Methoden. Die Lösung der Randwertaufgaben für kompliziertere Bereiche kann aus den als bekannt vorausgesetzten Lösungen derselben für einfachere Bereiche vermittelst *kombinatorischer* Methoden erhalten werden. Eine solche hat bereits *R. Murphy*[182]) für das Newton'sche Potential benutzt; sie ist dann von *R. Lipschitz*[183]) auf allgemeinere Probleme angewandt worden. Soll z. B. eine harmonische Funktion gefunden werden, welche auf einer Fläche α gegebene Werte $\bar{u}$, auf einer andern β den Wert 0 hat und ausserhalb der von diesen beiden Flächen begrenzten Körper

---

Abh. 14 (1888), p. 644; *W. Stekloff*, Par. C. R. 125 (1897), p. 1026; *A. M. Ljapunoff*, J. de math. (5) 4 (1898), p. 299, 305; *Korn*, p. 340, 410. Das Problem einer solchen Darstellung ist von *G. Robin*, Ann. éc. norm. (3) 3 (1886), suppl. p. 16 direkt in Angriff genommen worden; seine Entwicklungen konvergieren für Körper, die von der Kugel hinlänglich wenig abweichen.

180) *A. Harnack*, Leipz. Ber. 1886 (Math. Ann. 35, p. 32); *J. Riemann*, Par. thèse 1888 (Ann. éc. norm. (3) 5, p. 72); *C. Neumann*, Leipz. Abh. 14 (1888), p. 675; *S. Zaremba*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 257; *A. M. Ljapunoff*, J. de math. (5) 4 (1898), p. 307. Über das Verhalten der Potentialfunktionen beim Auftreten von Stetigkeitssprüngen der Randwerte in Ecken oder Spitzen der Randkurve vgl. man *H. A. Schwarz*, Berl. Ber. 1870 (ges. Abh. 2, p. 153); *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 301; *Harnack*, Grundl. p. 131, 141; *J. Riemann*, p. 53.

181) Par. thèse, 1886.

182) Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions, 1, Cambr. 1823, p. 93. Auch *W. Thomson* hat an sein „Prinzip der elektrischen Bilder" (Nr. **16**) kombinatorische Methoden angeschlossen, Philos. magaz. 1853 (papers on electr. p. 86); vgl. treatise [Fussn. 16] 2.

183) J. f. Math. 61 (1863), p. 12; vgl. dazu *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 312, und Abel'sche Funktionen, Leipz. 1884, Kap. 18. Der Beweis ist nur für den an der zuletzt genannten Stelle allein behandelten Fall einwandfrei, dass eine der beiden Flächen (Kurven) α, β eine Kugel (ein Kreis) ist. — Eine andere Methode hat *Th. Kötteritzsch* gegeben, Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 125 und Elektrostatik, Leipz. 1872, p. 224.

den Stetigkeitsbedingungen genügt, so bestimme man der Reihe nach diejenigen harmonischen Funktionen: u_1, $u_2 \cdots$ des Aussenraumes $\mathfrak{A}$ von α und v_1, $v_2 \cdots$ des Aussenraumes $\mathfrak{B}$ von β, welche durch die Randwerte:

$$\begin{array}{lll} \text{auf } \alpha\colon & u_1 = \bar{u}; & \text{auf } \beta\colon \quad v_1 = -u_1 \\ & u_2 = -v_1 & \qquad\quad v_2 = -u_2 \\ & u_3 = -v_2 & \qquad\quad v_3 = -u_3 \\ & \vdots & \qquad\quad \vdots \end{array}$$

definiert sind; dann ist:

$$u = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \cdots \tag{43}$$

die Lösung. Der Konvergenzbeweis[183]) beruht darauf, dass u_n, v_n für $\lim n = \infty$ gleichmässig (II A 1, Nr. 17) gegen 0 konvergieren.

Im Falle des logarithmischen Potentials modifiziert sich das insofern, als hier nicht u_n und v_n selbst, sondern nur die Schwankungen (II A 1, Nr. 6) dieser Funktionen mit wachsendem n unbegrenzt abnehmen. Infolge dessen ist u (43) noch nicht selbst die gesuchte Funktion, sondern seine Werte auf $\mathfrak{A}$ unterscheiden sich von den vorgeschriebenen um eine Konstante, und es bedarf noch eines besonderen, von *C. Neumann*[184]) angegebenen Kunstgriffs, um diese zu beseitigen.

Weiter sind (gleichzeitig von *C. Neumann*[185]) und *H. A. Schwarz*[186]) auch Fälle in Betracht gezogen worden, in welchen die Begrenzungen der Bereiche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich schneiden und nun übergegangen werden soll zu einem Bereich, der aus allen Punkten besteht, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichzeitig angehören (*Neumann*) oder aus allen, die $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ oder beiden angehören (*Schwarz*).

Dieselben Methoden lassen sich auch auf die analogen Aufgaben im Raume anwenden[187]).

In Verbindung mit der Methode des arithmetischen Mittels[188]) erlauben die kombinatorischen Methoden den Existenzsatz für jede

184) Leipz. Ber. 1870, p. 264 f., insbes. p. 304.

185) Leipz. Ber. 1870, p. 360.

186) Zürich. Viert. 15 (1870), p. 113, 272 (ges. Abh. 2, p. 133); Berl. Ber. 1870, p. 767 (ges. Abh. 2, p. 160). *Schwarz* nennt die Methode „*Grenzübergang durch alternierendes Verfahren*“. Vgl. auch *J. Riemann*, Par. thèse 1888 (Ann. éc. norm. (3) 5, p. 327).

187) *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 313; ausgeführt von *Korn*, p. 299.

188) Für die in der Theorie der algebraischen Funktionen auftretenden Aufgaben (II B 2, Nr. 15) reicht das Poisson'sche Integral aus.

Fläche, bezw. für jeden Körperraum[189]) zu beweisen, deren Begrenzung mit jeder Geraden nur eine endliche Anzahl einzelner Punkte oder Strecken gemein hat.

29. Spezielle Methode für analytische Randkurven. In der *Ebene* kann man die Anwendung der kombinatorischen Methoden auch durch einen von *H. A. Schwarz*[190]) gegebenen Ansatz vorbereiten, wenn die Begrenzung des Bereiches, für den die Randwertaufgabe gelöst werden soll, aus einer endlichen Anzahl regulärer Kurvenbogen besteht. Ein solcher Bogen wird analytisch dargestellt durch zwei Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, in denen φ und ψ analytische Funktionen (II A 1, Nr. 12) der Hülfsvariabeln t bedeuten, deren Ableitungen nicht gleichzeitig Null werden. Werden dann in der Gleichung:

$$x + iy = \varphi(t) + i\psi(t) \tag{44}$$

dem t auch komplexe Werte beigelegt, so vermittelt sie die konforme Abbildung eines in der t-Ebene gelegenen, einerseits von der Axe der reellen t begrenzten Kreisabschnitts auf ein bestimmtes, einerseits von jenem Bogen begrenztes Stück der $(x + iy)$-Ebene. Bildet man noch den Kreisabschnitt auf eine volle Kreisfläche ab, so hat man damit (Nr. 18) die Green'sche Funktion für jenes Stück der $(x + iy)$-Ebene und kann also die Randwertaufgaben für dasselbe lösen. Indem man dies für jedes Stück der Randkurve ausführt und die etwa übrig bleibende Fläche mit Kreisen überdeckt, besitzt man die Vorbedingung zur Anwendung der kombinatorischen Methoden.

30. Hülfssätze zu Konvergenzbeweisen. Aus den Schlüssen, mittelst deren *Schwarz* und *Neumann* die Konvergenz ihrer Approximationen (Nr. 26—28) beweisen, hat *A. Harnack* zwei allgemeine Sätze formuliert:

Sei eine unendliche Folge harmonischer Funktionen eines Bereiches gegeben, $u_1, u_2, u_3, \ldots$, die bei Annäherung an die Begrenzung gleichmässig stetig (II A 1, Nr. 22) in Randwerte $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$ übergehen. Konvergiert dann die Reihe $u_1 + \bar{u}_2 + \cdots$ auf der ganzen Begrenzung gleichmässig (II A 1, Nr. 17) gegen eine Grenzfunktion u, so konvergiert die Reihe $\bar{u}_1 + u_2 + \cdots$ im ganzen Bereiche gleichmässig gegen eine harmonische Funktion u, die an der Begren-

189) Vgl. auch *F. Klein* bei *Pockels* [Fussn. 122], p. 262; *Korn*, p. 299.
190) Berl. Ber. 1870, p. 172 (ges. Abh. 2, p. 149).

zung gleichmässig stetig in $\bar{u}$ übergeht, und darf gliedweise beliebig oft differentiiert werden[191]).

Konvergiert eine Reihe *positiver* harmonischer Funktionen eines Bereiches in irgend einem Punkt im Innern desselben, so konvergiert sie im ganzen Innern gleichmässig gegen eine harmonische Funktion[192]).

31. Die Balayagemethode. Während die in Nr. 26—28 besprochenen Methoden die gesuchte Funktion jedesmal durch eine Folge von Näherungsfunktionen approximieren, die alle der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ genügen und von denen jede besser als die vorhergehende die Rand- oder die Stetigkeitsbedingungen erfüllt, benutzt *H. Poincaré*'s *„méthode du balayage“*[193]) Näherungsfunktionen, die alle die Randbedingungen befriedigen und von denen jede besser als die vorhergehende der Gleichung $\Delta_2 u = 0$ genügt. Er konstruiert zu diesem Zwecke eine abzählbare (I A 5, Nr. 2) Reihe von Kugeln $C_1, C_2, C_3, \ldots$, die ganz im Innern des betrachteten Bereiches S liegen und ihn in der Weise ausfüllen, dass jeder Innenpunkt von S im Innern mindestens einer dieser Kugeln liegt. Er geht dann aus von irgend einer Funktion V_0, die in einer S umschliessenden Kugel T gewissen Stetigkeitsbedingungen genügt und auf der Oberfläche von S die vorgeschriebenen Werte besitzt. Ist dann $\Delta_2 V_0$ überall ≤ 0, so betrachtet er $\varrho = -\frac{1}{4\pi}\Delta_2 V_0$ als Dichtigkeit einer Verteilung positiver Massen. Ist W_0 deren Potential (Nr. 1), so ist $W_0 - V_0$ eine innerhalb T harmonische Funktion. Nun wird die Kugel C_1 „ausgekehrt“, d. h. die in ihr vorhandenen Massen werden so auf ihrer Oberfläche verteilt, dass das Potential ausserhalb C_1 nicht geändert wird; dadurch wird es innerhalb C_1 verkleinert. In dieser Weise werden der Reihe nach die Kugeln $C_1 C_2 C_1 C_2 C_3 C_1 C_2 C_3 C_4 C_1, \ldots$ ausgekehrt; ist $W_\varkappa$ das Potential nach der $\varkappa^{\text{ten}}$ Operation, so wird gezeigt, dass $V_0 - W_0 + \lim_{\varkappa=\infty} W_\varkappa$ die Aufgabe löst. — Der Fall, dass $\Delta_2 V_0$ nicht überall ≤ 0

191) Leipz. Ber. 1886, § 1 (Math. Ann. 35, p. 22). Vgl. übrigens *C. Neumann*, Unters. 1877, p. 201, 306; Leipz. Ber. 1878, p. 73; Leipz. Abh. 13 (1887), p. 818; *P. Painlevé*, Par. thèse 1887 (Toul. Ann. 2, p. 12). Der Satz hängt enge mit einem funktionentheoretischen Satz von *Weierstrass* (II B 1, Nr. 6) zusammen. — Die bei *Poincaré*, Théorie p. 212 zugefügte Einschränkung, dass die u alle positiv sein müssten, ist bei *diesem* Satz überflüssig.

192) Leipz. Ber. 1886 (Math. Ann. 35, p. 23).

193) Par. C. R. 104 (1887), p. 44; Amer. J. of math. 12 (1890), p. 216; vgl. Théorie, p. 260. Eine etwas modifizierte, für den Raum wie für die Ebene gültige Darstellung bei *E. Le Roy*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 434 (Par. thèse 1898).

ist, wird auf den eben besprochenen durch geeignete Superposition zurückgeführt.

Auf das *logarithmische* Potential ist die Methode von *A. Paraf*[194]) übertragen worden. —

Wie die in den letzten Nummern dargestellten Methoden sich auch für andere Differentialgleichungen fruchtbar erwiesen haben, wird im folgenden Artikel darzustellen sein.

---

194) Par. thèse 1892 (Toul. Ann. 6, II).

II A 7c. RANDWERTAUFGABEN IN DER THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

A. SOMMERFELD

IN AACHEN.

Inhaltsübersicht.

1. Abgrenzung des Gegenstandes.

I. Allgemeine Theorie der Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variabeln.

2. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der elliptische, hyperbolische und parabolische Typus.
3. Der *Green*'sche Satz und die *Green*'schen Funktionen.
4. Eindeutigkeitsfragen, vornehmlich bei elliptischen Differentialgleichungen.
5. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des elliptischen Typus für hinreichend kleine Gebiete. Die Methode der successiven Approximationen.
6. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des elliptischen Typus für beliebige Gebiete. Alternierende Methode, Methode der ringförmigen Gebietserweiterung, Auskehrungsmethode etc.
7. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des hyperbolischen Typus.
8. Über den analytischen Charakter der durch partielle Differentialgleichungen definierten Funktionen

II. Randwertaufgaben bei besonderen Differentialgleichungen.

9. Die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$.
10. Die Existenz der ausgezeichneten Lösungen. Exakter Nachweis derselben bei *H. A. Schwarz* und *H. Poincaré*.
11. Die Gleichung $\Delta u - k^2 u = 0$.
12. Die Gleichung $\Delta u = k e^u$.
13. Die Gleichung der schwingenden Saite und ihre Verallgemeinerungen.
14. Die Wärmeleitungsgleichung.

15. Schlussbemerkungen betr. die Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung und mehr als zwei unabhängigen Variabeln.

Litteratur.

Ein zusammenfassendes *Lehrbuch* über die hier gemeinte Theorie der partiellen Differentialgleichungen giebt es einstweilen nicht; doch ist zu hoffen, dass *E. Picard's* Cours d'analyse (Bd. 1 1891, Bd. 2 1893, Bd. 3 1896, Paris), wenn vollständig erschienen, ein solches darstellen wird. Als *Monographieen* kommen namentlich in Betracht:

G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie. 1. Aufl. Paris 1795, 5. Aufl. (herausg. von J. Liouville) Paris 1850 („Appl.“).

J. B. Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822 (oeuvr. 1; deutsch v *R. Weinstein*, Berl. 1884; engl. von *A. Freeman*, Cambr. 1878).

S. D. Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.

G Lamé, Leçons sur la théorie de la chaleur. Paris 1861.

P. du Bois-Reymond, Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen. Leipzig 1864 („Beiträge“).

B. Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, herausgeg. von *K. Hattendorff*, 1869, 3. Aufl. Braunschw. 1882.

Lord Rayleigh, The Theory of Sound. 1. Aufl. London 1877, 2. Aufl. 1894. In's Deutsche übersetzt von *F. Neesen*, Braunschw. 1880.

F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig 1891.

H. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895.

---

1. Abgrenzung des Gegenstandes. Dass es im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung mit der Aufsuchung des sogenannten allgemeinen, mit willkürlichen Funktionen behafteten Integrals (II A 5) nicht gethan ist, sondern dass daneben die Frage nach der Anpassung des Integrals an gewisse Rand- oder Grenzbedingungen eines besonderen eingehenden Studiums wert ist, wurde vor allem durch das Erscheinen von *Fourier's* Théorie de la chaleur (1822) in überzeugender Weise dargethan. Ausgesprochen findet sich dieser Gedanke z. B. bei *Riemann*[1]); in der neueren Litteratur wird er namentlich durch wichtige Arbeiten von *H. A. Schwarz*, *E. Picard* und *H. Poincaré* vertreten.

Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung unter vorgegebenen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen wird in diesem ebenso wie in den vorangehenden Artikeln als *Randwertaufgabe* bezeichnet. Die ergiebigste Quelle solcher Probleme ist die mathematische Physik, mit der die zu besprechenden Theorieen der Mehrzahl nach zusammenhängen. Dabei erweist sich die physikalische Fragestellung besonders deshalb als fruchtbar, weil sie neben

1) In der Selbstanzeige seiner Abhandlung: Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen bei endlicher Schwingungsweite, Gött. Nachr. 1859, Nr. 19 = ges. Werke, 2. Aufl. p. 176, Leipzig 1892.

dem Probleme selbst meist auch einen Fingerzeig über seine Möglichkeit und über den Weg, auf dem die Lösung zu suchen ist, liefert. Indessen kann es sich im vorliegenden Artikel nur um die *abstrakt mathematische Seite* der Theorie handeln. Auf ihre *physikalische Bedeutung* wird nur insofern eingegangen werden, als dies für das Verständnis erforderlich ist.

Für die Zwecke der physikalischen Anwendung geht man natürlich auf solche Randwertaufgaben aus, welche sich in einer *numerisch* befriedigenden Weise lösen lassen. Dieses Ziel, wenngleich auch bei der theoretischen Behandlung stets im Auge zu behalten, lässt sich einstweilen nur in sehr speziellen Fällen erreichen. Die Methode, welche hierbei in der Regel eingeschlagen wird, besteht in der Herstellung besonderer, dem jeweiligen Problem angepasster Reihenentwickelungen. Wir werden das allgemeine Prinzip dieser Methode in Nr. **13** und **14** zur Sprache bringen. Alle Einzelausführungen müssen aber teils den Bänden IV und V der Encyklopädie, teils dem folgenden Artikel überlassen bleiben, der speziell von Reihenentwicklungen handelt. Der Gesichtspunkt der numerischen Ausführbarkeit wird daher, dem vorläufigen Stande der Theorie entsprechend, in diesem Referate mehr als an sich wünschenswert zurücktreten.

Dieselben Fragen, wie für eine einzelne, hat man (besonders im Hinblick auf die Anwendungen) für *Systeme von partiellen Differentialgleichungen* zu stellen. Da indessen eine allgemeine Theorie solcher Systeme vom Standpunkte der Randwertaufgaben noch nicht vorliegt, werden wir uns hier im wesentlichen auf die einzelne Differentialgleichung beschränken. Wegen der Systeme der Elastizitätstheorie und der Maxwell'schen Gleichungen muss gleichfalls auf die Bände IV und V verwiesen werden.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass gerade in der Physik neben den eigentlichen Randwertaufgaben vielfach Probleme von etwas allgemeinerem Charakter auftreten. Eine Randwertaufgabe im gewöhnlichen Sinne wird sich ergeben, wenn irgend ein physikalischer Zustand, der z. B. durch eine lineare partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten reguliert wird, in einem begrenzten Körper untersucht werden soll und dabei der Zustand auf der Oberfläche vorgeschrieben ist. In Wirklichkeit spielt nun aber auch meist die ganze Umgebung des Körpers mit. In dieser wird der Zustand durch eine (z. B. nur in den Konstanten abgeänderte) zweite Differentialgleichung bestimmt. Berücksichtigt man aber die Umgebung, so ist der Zustand auf der Oberfläche nicht mehr willkürlich vorzuschreiben, sondern muss gemäss gewissen Oberflächen-

bedingungen (Beziehungen zwischen dem Zustande ausserhalb und innerhalb der Oberfläche) selbst erst ermittelt werden. Die Aufgabe besteht dann in folgendem: Gegeben für ein gewisses Gebiet des Raumes eine, für ein anderes eine zweite Differentialgleichung; gesucht zwei Lösungen dieser beiden Gleichungen, welche sich längs der Grenze beider Gebiete den Oberflächenbedingungen gemäss an einander schliessen.

Auch diese Formulierung würde noch weiter zu modifizieren sein, wenn man, wie man es in der Physik gerne thut[2]), die Trennung verschiedener Medien als keine ganz scharfe ansieht, sondern einen kontinuierlichen Übergang der Eigenschaften von dem einen zu dem anderen Medium voraussetzt. Dann hat man für den ganzen unendlichen Raum nur *eine* Differentialgleichung mit Koeffizienten zu integrieren, die variabel sind und insbesondere an der Trennungsfläche zweier verschiedener Medien rapid wechseln. Diese vom physikalischen Standpunkte einfachere Formulierung bedeutet aber mathematisch eine erhebliche Erschwerung. Jedenfalls liegt sie ausserhalb des uns im folgenden gesteckten Gesichtskreises.

Über die *Randwertaufgaben der Potentialtheorie* wurde bereits im vorhergehenden Artikel berichtet. Aufgabe des gegenwärtigen Artikels ist es hauptsächlich, darüber zu berichten, inwieweit sich die für die Differentialgleichung des Potentials seit lange bekannten Sätze auf allgemeinere Differentialgleichungen übertragen lassen. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf die *Frage nach der Existenz der Lösungen* zu richten sein. Diese Frage kommt für die Zwecke der physikalischen Anwendungen ja kaum in Frage, zumal da die partiellen Differentialgleichungen der Physik vom Standpunkte der Molekulartheorie aus vielfach nur als bequeme Abkürzungen für partielle Differenzengleichungen[3]) anzusehen sind, für welche letztere die Existenzfrage trivial ist. Dagegen bildet sie vom reinmathematischen Standpunkte aus den Kern oder wenigstens die Grundlage der ganzen Theorie.

Die Existenz der Lösungen partieller Differentialgleichungen ist bereits in Artikel II A 5 zur Sprache gekommen, jedoch von einem wesentlich anderen Gesichtspunkte aus. Dort handelte es sich lediglich um die *analytischen* Lösungen *analytischer* Differentialgleichungen. Die Methode bestand, im Anschlusse an *Cauchy*, in der Aufstellung von Potenz-

2) Vgl. z. *B. H. Hertz*, Ges. Werke II, 220. Leipzig 1892.

3) Diese Auffassung bildet bei den älteren Autoren meist den Ausgangspunkt. Vgl. z. B. *Fourier*, Par. Mém. 5, 1821/22 [26] (oeuvr. 2, p. 94). Neuerdings wird sie besonders nachdrücklich betont von *L. Boltzmann*, Ann. Phys. Chem. 60 (1897), p. 231; 61 (1897), p. 791. — Vgl. auch I E, Fussn. 30.

entwickelungen; dementsprechend wurden auch die in die Lösung eingehenden willkürlichen Funktionen als analytisch vorausgesetzt. Die hier zu entwickelnden Methoden reichen weiter, über das Gebiet der analytischen Funktionen hinaus. Sie lassen feinere Unterschiede der Differentialgleichungen erkennen, welche bei der Methode der Potenzreihen verloren gehen.

Da die systematische Theorie der Randwertaufgaben ziemlich jung ist — man kann sie aus dem Erscheinungsjahre (1885) einer grundlegenden Arbeit von *H. A. Schwarz* (vgl. Nr. **10**) datieren — so weist sie noch fühlbare Lücken auf, welche an geeigneter Stelle namhaft gemacht werden sollen. Die zur Zeit gesicherten Resultate sollen dafür etwas ausführlicher, mit Andeutung der Beweise, referiert werden; sie beziehen sich hauptsächlich auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, auf welche wir uns zunächst beschränken werden.

I. Allgemeine Theorie der Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variabeln.

2. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der elliptische, hyperbolische und parabolische Typus. Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen, für welche Randwertaufgaben behandelt sind, haben der Hauptsache nach die folgende Form:

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

A, B, C sind Funktionen der beiden reellen Variabeln x und y, A, B, C und F werden je nach Bedarf als stetig oder als stetig und differenzierbar etc. vorausgesetzt.

Eine oberste Einteilung dieser Gleichungen liefert der von *G. Monge*[4]) geschaffene *Charakteristikenbegriff*, über welchen in II A 5 Nr. 43 gehandelt ist. Im Fall einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung versteht *Monge* unter einer Charakteristik eine im Raum der x, y, u verlaufende Kurve, längs welcher sich zwei konsekutive Integralflächen der Differentialgleichung schneiden und berühren. Während nun im allgemeinen die Projektion dieser Kurve auf die x, y-Ebene von der Auswahl des Integrals u abhängt, ist diese Pro-

4) Appl. Vgl. besonders § VIII; § X, 1; § XXI, 5.

jektion im Falle der Gleichung (1) davon unabhängig und schon durch die Differentialgleichung allein bestimmt. Im folgenden soll der Kürze halber *diese projizierte Kurve* selbst als Charakteristik bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Charakteristiken dient nach *Monge*[5]) die gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(2) \qquad C dx^2 - 2B dx\, dy + A dy^2 = 0.$$

Es giebt also zwei Scharen von Charakteristiken, deren jede durch eine gewöhnliche Differentialgleichung ersten Grades bestimmt wird[6]).

Schreibt man längs einer Kurve Γ, die keine Charakteristik ist und auch von keiner solchen berührt wird, die Integralwerte u und die Werte des in Richtung der Normalen von Γ genommenen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial n}$ willkürlich vor, so lassen sich aus der Differentialgleichung alle höheren Ableitungen berechnen, indem die Determinante derjenigen linearen Gleichungen, welche successive die höheren Ableitungen bestimmen, gerade mit der linken Seite der Charakteristikengleichung (2)

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & 0 \\ 0, & dx, & dy \\ A, & 2B, & C \end{vmatrix},$$

oder mit einer Potenz derselben übereinstimmt und daher längs der Kurve Γ von Null verschieden ist[7]).

Ist Γ dagegen selbst eine Charakteristik, so sind die folgenden Ableitungen durch Angabe von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ nicht völlig festgelegt. Dafür sind in diesem Falle umgekehrt die letztgenannten Grössen nicht völlig willkürlich. Die Zuwächse $d\frac{\partial u}{\partial x}$ und $d\frac{\partial u}{\partial y}$ müssen nämlich beim Fortschreiten längs der Charakteristik der folgenden Bedingung genügen

$$A d\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy + C d\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx = F dx\, dy.$$

---

5) Appl. § X.

6) Bei *Monge* liegt in dieser Hinsicht ein merkwürdiges Missverständnis vor. Er schreibt: „In allen Fällen, wo sich die Charakteristikengleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ rational in Linearfaktoren spalten lässt, giebt es zwei getrennte Charakteristiken, deren besondere Gleichungen sich hinschreiben lassen. Im allgemeinen Falle dagegen sind die beiden Charakteristiken Zweige ein und derselben Kurve und diese Zweige schneiden sich immer in dem Flächenpunkte, den man betrachtet.“ Appl. § X, I.

7) *P. du Bois-Reymond*, Beiträge § 86.

Die Charakteristiken sind in einem gewissen Gebiete der x, y-Ebene *imaginär, reell verschieden* oder *reell zusammenfallend,* je nachdem in diesem Gebiete:

$$AC - B^2 > 0, \quad AC - B^2 < 0, \quad AC - B^2 = 0.$$

Nach dem Vorgange von *P. du Bois-Reymond*[8]) unterscheidet man diese drei Fälle als *elliptischen, hyperbolischen* und *parabolischen Typus.*

Die einfachsten Beispiele dieser drei Typen sind:

Elliptischer Typus $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Potentialgleichung),

Hyperbolischer „ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ (Gl. der schwingenden Saite),

Parabolischer „ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ (Gl. der Wärmeleitung).

Die allgemeine Gleichung (1) lässt sich nun immer so transformieren, dass ihre linke Seite in die linke Seite einer der drei vorstehenden Gleichungen übergeht[9]). Es genügt zu dem Zwecke statt x und y neue Variable ξ, η einzuführen, welche, unter $\varphi(x, y) = \text{const.}$ und $\psi(x, y) = \text{const.}$ die Gleichungen der beiden Scharen von Charakteristiken verstanden, folgendermassen zu definieren sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi + i\eta &= \varphi(x, y) \\ \xi - i\eta &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \text{elliptischer Typus,}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \text{hyperbolischer Typus,}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) = \psi(x, y) \\ \eta &= y \end{aligned}\right\} \text{parabolischer Typus.}$$

Die Wahl der neuen Variabeln wird also so getroffen, dass den Charakteristiken nach der Transformation im elliptischen Falle die Minimalrichtungen, im hyperbolischen die beiden, im parabolischen Falle die eine der beiden Koordinatenrichtungen entspricht.

Es ergeben sich so die folgenden „Normalformen" für die Differentialgleichungen der drei Typen:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right), & \text{elliptischer Typus,} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, u, \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right), & \text{hyperbolischer Typus,} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, u, \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right), & \text{parabolischer Typus.} \end{cases}$$

8) J. f. Math. 104 (1889), p. 241.

9) Wohl zuerst von *P. S. Laplace*, Par. Hist. 1773 (oeuvr. 9, p. 21) bewiesen. *P. du Bois-Reymond* kommt darauf l. c. Kap. III ausführlich zurück.

Ist die Ausgangsgleichung *linear*, so ist es auch die Normalform. Hat sie überdies konstante Koeffizienten, so können auch die Glieder mit $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ zum Fortfall gebracht werden[10]). Dasselbe trifft zu, wenn die Gleichung *linear* und *sich selbst adjungiert*[11]) ist (s. die folgende Nr.).

Der Unterschied zwischen den drei Typen besteht natürlich nur im reellen Wertegebiet der Variabeln x und y (bezw. ξ und η); hier ist er aber ein durchgreifender.

In der That sind die Randwertaufgaben, welche man sich bei den verschiedenen Typen von Differentialgleichungen zu stellen hat, ganz verschieden:

Bei den *elliptischen Differentialgleichungen* betrachtet man einen *beliebigen, begrenzten Bereich* der x, y-Ebene, *schreibt für dessen Begrenzung die Werte von u* (oder eine entsprechende Bedingung) *vor und fragt nach den Werten von u im Innern des Gebietes.* Durch eine Reihe physikalischer Beispiele sowie durch die Theorie der Potentialgleichung wird die Möglichkeit dieser Randwertaufgabe plausibel gemacht. Wegen des wirklichen Beweises vgl. Nr. 5 und 6.

Über die Formulierung der bei *hyperbolischen Differentialgleichungen* zu stellenden Randwertaufgaben[12]) hat *P. du Bois-Reymond* Untersuchungen angestellt, die jedoch nur als erste Orientierung auf diesem Gebiete gelten können.

Teils bedient er sich einer geometrischen Methode[13]), durch welche die Integrale Schritt für Schritt im Unendlichkleinen aufgebaut werden, teils setzt er Potenzreihen[14]) an, wobei es aber nur zur Koeffizientenbestimmung, nicht zum Konvergenzbeweise kommt.

Die Resultate, zu denen *Du Bois-Reymond* gelangt, sind folgende: (wir beziehen uns der einfacheren Ausdrucksweise wegen auf die Normalform der hyperbolischen Differentialgleichung, wo also die

10) *Laplace*, J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 235.

11) *E. Picard*, Acta math. 12 (1889), § 4. Das Wort „selbstadjungiert" kommt bei Picard nicht vor; die dort gegebene Bedingung „durch Nullsetzen der ersten Variation eines Doppelintegrals entstanden" kommt aber thatsächlich auf dasselbe hinaus.

12) Die Anwendung des Wortes „Randwertaufgabe" auf den hyperbolischen Fall ist eigentlich nicht ganz zutreffend, da sich die Aufgabe der Form nach mit der Aufsuchung des sogenannten allgemeinen Integrals deckt. Sie soll aber der Kürze halber in diesem Artikel beibehalten werden.

13) In den oben citierten Beiträgen.

14) J. f. Math. 104 (1889), p. 241.

Charakteristiken $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ geradlinig und senkrecht gegen einander verlaufen):

1) *Man gebe sich längs eines beliebigen, von keiner Charakteristik zweimal geschnittenen Kurvenstückes AB die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$; dann existiert eine und nur eine Lösung u der Differentialgleichung, welche auf AB die vorgeschriebenen Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ liefert; diese Lösung ist im Innern desjenigen Rechtecks definiert, welches von den durch A und B verlaufenden Charakteristiken gebildet wird.* („Aufgabe der ersten Art".)

2) *Man gebe sich die Werte von u (nicht* auch die von $\frac{\partial u}{\partial n}$) *in zwei aneinanderstossenden Seiten eines Charakteristikenrechtecks; dann existiert wiederum u im Innern dieses Rechtecks und ist eindeutig bestimmt.* („Aufgabe der zweiten Art".)

Denkt man sich u als dritte Koordinate im Raume, so ist bei den Aufgaben der ersten Art die Fläche $u(x, y)$ so zu konstruieren, dass sie durch eine gegebene Raumkurve unter gegebener Neigung hindurchgeht, bei den Aufgaben der zweiten Art ist sie in einen Rahmen von zwei sich schneidenden Raumkurven einzuspannen.

Unstetigkeiten dürfen in den vorgeschriebenen Randwerten nicht vorkommen, wenn anders die gesuchte Lösung stetig und die Differentialgleichung ausnahmslos erfüllt sein soll; *Unstetigkeiten pflanzen sich nämlich den Charakteristiken entlang in das Rechteck hinein fort.* Im übrigen können die Randwerte willkürlich gewählt werden.

Wie weit diese Sätze heutzutage bewiesen werden können, wird in Nr. 7 besprochen werden.

Den Begriff der Charakteristiken sucht *Du Bois-Reymond* dadurch zu vertiefen, dass er sie (auf Grund der angegebenen Sätze) *spontane Grenzen der Integraloberflächen* nennt.

Er hält es auch für möglich[15]), die „einläufige Randbedingung" (*ein* Kurvenstück AB von den oben angegebenen Eigenschaften, auf dem u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben ist) durch eine „zweiläufige" zu ersetzen (*zwei* Kurvenstücke, auf denen *nur* u gegeben ist), was er durch die Bemerkung zu stützen sucht, dass sich der Fall der einläufigen aus dem der zweiläufigen Randbedingung durch Zusammenrücken der beiden Kurven herleiten lässt. Zu den zweiläufigen Randbedingungen rechnet *Du Bois-Reymond* auch den Fall einer geschlossenen Kurve, auf der die Werte von u allein vorgeschrieben sind. Hiernach

15) Beitr. § 83.

wäre es also möglich, auch für hyperbolische Differentialgleichungen eine Randwertaufgabe zu stellen, welche der für elliptische angegebenen völlig analog wäre. Ein Beweis für diese Vermutung liegt einstweilen nicht vor.

Über die allgemeinste mögliche Randwertaufgabe bei den *parabolischen* Differentialgleichungen ist nichts bekannt. Die vorhandene Litteratur bezieht sich ausschliesslich auf den speziellen Fall der Wärmeleitungsgleichung; vgl. Nr. **14.**

3. Der Green'sche Satz und die Green'schen Funktionen. Der Green'sche Satz, dessen zahlreiche Folgerungen für die Potentialtheorie bekannt sind (vgl. II A 7b, Nr. **12**), ist im Grunde die rein formale Umrechnung eines Doppelintegrals in ein einfaches [bez. eines n-fachen in ein $(n-1)$-faches]. Für allgemeinere *lineare* Differentialgleichungen bietet eine Verallgemeinerung jenes Satzes, die hier gleichfalls mit dem Namen *Green*'s belegt werden soll, dieselben Vorteile dar. Diese Verallgemeinerung knüpft an den Begriff der *adjungierten Differentialgleichung*[16]) an. Die besonderen Vereinfachungen, welche sich im Falle der Laplace'schen Gleichung oder z. B. im Falle der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ bei den *Helmholtz*'schen Untersuchungen[17]) einstellen, beruhen hauptsächlich darauf, dass diese Gleichungen *sich selbst adjungiert* sind.

Gegeben sei ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen

$$(4)\quad L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu.$$

Man integriert das Produkt $vL(u)$ über ein beliebiges Gebiet R der x, y-Ebene unter der Voraussetzung, dass u und v bis zu ihren zweiten partiellen Ableitungen incl. stetige Funktionen sind. Dann ergiebt sich durch partielle Integration (die Doppelintegrale sind über das Innere, die einfachen über den Rand von R zu erstrecken):

$$(5)\quad \iint v L(u)\,dx\,dy = \iint u M(v)\,dx\,dy + \int (Q\,dy - P\,dx),$$

$$M(v) = \frac{\partial^2 Av}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 Bv}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Cv}{\partial y^2} - \frac{\partial Dv}{\partial x} - \frac{\partial Ev}{\partial y} + Fv,$$

$$P = B\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)uv,$$

$$Q = A\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right)uv.$$

16) *G. Darboux*, Théorie générale des surfaces, 2, art. 357 u. ff. (1889) oder *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 104 (1889), Kap. 2, welche beide auf *Riemann* fussen: Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Ges. Werke 8, § 8. *Du Bois-Reymond* sagt Multiplikatorgleichung statt Adjungierte.

17) *H. von Helmholtz*, J. f. Math. 57 (1860), p. 1 = Ges. Werke 1, p. 303.

$M(v)$ ist der zu $L(u)$ *adjungierte Differentialausdruck*, $M(v) = 0$ die zu $L(u) = 0$ *adjungierte Differentialgleichung*. Umgekehrt ist auch $L(u)$ der adjungierte Differentialausdruck von $M(v)$ etc. Genügt v der adjungierten Differentialgleichung $M(v) = 0$, so reduziert sich $\iint v\,L(u)\,dx\,dy$ auf das Randintegral $\int (Q\,dy - P\,dx)$. Genügt ausserdem auch u der Gleichung $L(u) = 0$, so wird (unter Voraussetzung der angegebenen Stetigkeitseigenschaften):

$$\int (P\,dx - Q\,dy) = 0.$$

$P\,dx - Q\,dy$ ist dann in dem ganzen Gebiete R ein vollständiges Differential. In jedem Falle hat man:

$$\iint (v\,L(u) - u\,M(v))\,dx\,dy = \int (Q\,dy - P\,dx). \tag{6}$$

Dies ist die Verallgemeinerung des *Green'schen Satzes der Potentialtheorie*, der für $A = C = 1$, $B = D = E = F = 0$ erhalten wird.

Der Begriff des adjungierten Differentialausdrucks und die hieran anknüpfende Formel (6) lässt sich auch auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung und auf mehr als zwei unabhängige Variable übertragen[18]).

Von Wichtigkeit wegen ihres Vorkommens in der mathematischen Physik und in der Variationsrechnung sind insbesondere diejenigen Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungierten identisch sind. Eine in diesem Sinne *„sich selbst adjungierte“* Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich immer folgendermassen schreiben:

$$L(u) = M(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + a_0 u = 0, \tag{7}$$

wobei sich die Koeffizienten a_0 und a_{ik} in leicht ersichtlicher Weise durch die ursprünglichen Koeffizienten $A, B, \ldots, F$ ausdrücken lassen *und wo $a_{12} = a_{21}$ ist.* (Unterdrückt man die letztere Bedingung, so kann *jede* lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in diese Form gebracht werden, wie *L. Bianchi*[19]) zeigt.) Im Falle einer sich selbst adjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt nun der Green'sche Satz die folgende weitergehende Formulierung zu:

$$\begin{cases} -\iint \left(a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{12}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + a_0 uv\right) dx\,dy \\ = \iint v\,L(u)\,dx\,dy + \int (p\,dx - q\,dy) \\ = \iint u\,M(v)\,dx\,dy + \int (p'\,dx - q'\,dy) \end{cases} \tag{8}$$

18) *G. Darboux*, l. c.

19) Linc. Rend (4), 5^2 (1889), p. 35.

mit den Abkürzungen

$$p = a_{21} v \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q = a_{11} v \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} v \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$p' = a_{21} u \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad q' = a_{11} u \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} u \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Diese Gleichung entspricht der *drei*gliedrigen Form des *Green*'schen Satzes der Potentialtheorie und geht in diese für $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$ über.

Für das Folgende unterscheiden wir zwischen elliptischem und hyperbolischem Typus und setzen die Gleichung in der Normalform voraus.

I. *Elliptischer Fall*[20]). Die Normalform einer linearen Differentialgleichung lautet (s. die vorige Nr.):

$$L(u) \equiv \Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Die adjungierte Gleichung wird dann

$$M(v) \equiv \Delta v - \frac{\partial (a v)}{\partial x} - \frac{\partial (b v)}{\partial y} + c v = 0.$$

Man postuliere nun die Existenz einer *Lösung v der adjungierten Gleichung*, welche in einem beliebigen Punkte (ξ, η) logarithmisch unendlich wird, d. h. welche gleich $U \log r + V$ ist, wo r den Abstand des Punktes (ξ, η) von (x, y) bedeutet, U und V in dem zu betrachtenden Gebiete R durchweg stetige Funktionen sind und etwa $U(\xi, \eta) = 1$ ist. Bei der Anwendung des Green'schen Satzes ist der Punkt (ξ, η), welcher im Innern des Gebietes R gelegen sei, durch eine Kurve (z. B. einen Kreis) von der Integration auszuschliessen. Gleichung (5) liefert dann, wenn man diese Kurve auf den Punkt (ξ, η) zusammenzieht:

$$2\pi u(\xi, \eta) = -\int\int v L(u) dx dy + \int \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} + \left(a \cos(n, x) + b \cos(n, y) \right) u v \right] ds. \tag{9}$$

Die Normale n wird positiv nach dem Äusseren des Gebietes gerechnet; das Integral ds ist über den ganzen Rand des Gebietes, entgegen dem Sinne des Uhrzeigers zu erstrecken. Je nachdem die gesuchte Lösung u der homogenen Gleichung $L(u) = 0$ oder der

20) Die folgenden Ausführungen zum elliptischen Falle hat Ref. in der Litteratur nicht vorgefunden. Sie konnten aber der Vollständigkeit wegen hier nicht fehlen.

nicht homogenen $L(u)$ gleich einer gegebenen Funktion von x und y unterworfen wird, giebt die vorstehende Formel eine Darstellung für u lediglich als Randintegral oder als Summe eines Rand- und eines Flächenintegrals. Diese Darstellung verlangt die Kenntnis einer Lösung v der adjungierten Gleichung mit *beliebig* gelegener logarithmischer Unstetigkeit für das ganze Innere des Gebietes und die Kenntnis von u *und* $\frac{\partial u}{\partial n}$ für die Berandung desselben. Sie verallgemeinert die Gleichung (18) von II A 7 b. Indessen entspricht die Annahme, dass auf dem Rande des Gebietes sowohl die Werte von u wie die von $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben sind, nicht der in der vorigen Nr. für den elliptischen Typus aufgestellten Randwertaufgabe. Vielmehr bedingen sich hier u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegenseitig, so dass nicht über beide willkürlich verfügt werden kann. Um eine Darstellung von u zu erhalten, in die lediglich die Randwerte von u eingehen (es sei jetzt $L(u) = 0$), muss man die Funktion v so spezialisieren, dass sie das Analogon der *Green'schen Funktion* in der Potentialtheorie bildet. Unter der *Green*'schen Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ für eine beliebige lineare Differentialgleichung $L(u) = 0$ vom elliptischen Typus und für ein beliebiges Gebiet R hat man zu verstehen *eine Funktion der vier Variabeln* x, y, ξ, η, *welche* 1) *in den Variabeln* x, y *der adjungierten Gleichung* $M(G) = 0$ *genügt, welche* 2) *für* $x = \xi$, $y = \eta$ *wie* $\log r$ *unendlich wird, während sie sich in allen anderen Punkten von* R *stetig verhält, und welche* 3) *auf dem Rande des Gebietes verschwindet.* In die vorige Gleichung statt v eingetragen, liefert sie eine Darstellung von u durch die Randwerte von u allein, nämlich (mit Rücksicht auf $L(u) = 0$)

$$2\pi u(\xi, \eta) = \int u \frac{\partial G}{\partial n} ds, \tag{10}$$

also dieselbe Gleichung wie in der Potentialtheorie [II A 7 b, Gl. (29)].

In derselben Weise kann man sich eine Green'sche Funktion $H(x, y, \xi', \eta')$ für die adjungierte Gleichung $M(v) = 0$ gebildet denken. Setzt man dann in den Green'schen Satz (5) diese Funktionen G und H für v und u ein, so ergiebt sich:

$$H(\xi, \eta, \xi', \eta') = G(\xi', \eta', \xi, \eta).$$

Der entsprechende Satz der Potentialtheorie (II A 7 b, Fussn. 115), *dass die Green'sche Funktion bei Vertauschung von Pol und Aufpunkt ungeändert bleibt,* ist also bei einer nicht sich selbst adjungierten Differentialgleichung dahin zu modifizieren, *dass bei dieser Vertauschung*

auch die Rolle der ursprünglichen und der adjungierten Gleichung ausgetauscht wird. Zugleich zeigt die vorstehende Gleichung, dass die Green'sche Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$, welche in den Variabeln x, y der adjungierten Gleichung genügt, in den Variabeln ξ, η die ursprüngliche Differentialgleichung befriedigt. Von dem Vertauschungssatze hat *H. v. Helmholtz* bei der (sich selbst adjungierten) Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ einen ausgedehnten Gebrauch gemacht; s. Nr. 9.

Ist nicht u sondern $\frac{\partial u}{\partial n}$ (oder auch eine lineare Verbindung beider etc.) auf der Begrenzung gegeben, so ist die der Green'schen Funktion aufzuerlegende Randbedingung in entsprechender Weise abzuändern.

Übrigens bietet die Herstellung der Green'schen Funktion und ihr Existenzbeweis im allgemeinen dieselben Schwierigkeiten dar, wie die allgemeinere Randwertaufgabe, bei welcher auf der Begrenzung beliebige Funktionswerte vorgeschrieben werden, so dass durch ihre Einführung keine wesentliche Vereinfachung der Integrationsaufgabe, sondern nur eine vielfach bequeme Umformung derselben erreicht wird.

II. *Der hyperbolische Typus.* Die entsprechenden Entwickelungen im hyperbolischen Falle verdankt man *Riemann*[16]). Die Normalform der linearen hyperbolischen Differentialgleichung ist

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0;$$

ihre Adjungierte lautet:

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = 0.$$

Eine Lösung der adjungierten Gleichung mit Unendlichkeitsstelle zu postulieren ist hier unthunlich, weil nach der vorigen Nr. zu vermuten ist, dass Unstetigkeiten nicht isoliert auftreten, sondern sich längs der Charakteristiken fortpflanzen. Dafür ist hier aber auch die Aufgabe eine andere, wie im elliptischen Falle, nämlich die folgende: Gegeben sind u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ als stetige und differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s auf einer Kurve C, welche von keiner Charakteristik zweimal geschnitten wird. Gesucht wird der Wert einer diesen Randwerten entsprechenden stetigen Lösung von $L(u) = 0$ oder etwas allgemeiner von $L(u)$ gleich einer gegebenen Funktion von x und y in irgend einem Punkte $P(\xi, \eta)$ des dem Kurvenstücke C umschriebenen Charakteristikenrechteckes.

Riemann wendet in diesem Falle den Green'schen Satz (5) auf ein Gebiet an, welches begrenzt ist von C und den durch P gehenden Charakteristiken $x = \xi$, $y = \eta$. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit C mögen bez. A und B heissen. v sei irgend eine stetige Lösung der adjungierten Gleichung $M(v) = 0$. Aus Gleichung (5) folgt dann:

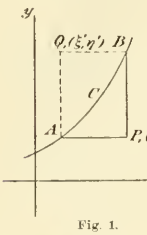


Fig. 1.

$$\iint v L(u)\, dx\, dy = \int_C (Q\, dy - P\, dx) + \int_\xi Q\, dy - \int_\eta P\, dx.$$

Das erste Integral rechts ist über C von B nach A, das zweite über die Charakteristik $x = \xi$ von P bis B, das dritte über die Charakteristik $y = \eta$ von A bis P zu nehmen. Die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ können, da u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs C gegeben sind, als bekannt angesehen werden. Aus dem zweiten und dritten Integral lassen sich $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch partielle Integration entfernen und es ergiebt sich die zu (9) analoge Gleichung:

$$(11)\quad \begin{cases} (uv)_P = \frac{1}{2}\left((uv)_A + (uv)_B\right) - \iint v L(u)\, dx\, dy + \int_C (Q\, dy - P\, dx) \\ \qquad - \int_\xi u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a v\right) dy + \int_\eta u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b v\right) dx. \end{cases}$$

Hier knüpft nun *Riemann*'s Definition einer charakteristischen Funktion an, welche die *Green'sche*[21]) heissen und mit $G(x, y, \xi, \eta)$ bezeichnet werden möge: 1) *Im Innern des Gebietes APB soll G, was die Variabeln x, y anbelangt, der adjungirten Gleichung $M(G) = 0$ genügen.* 2) *Längs der Charakteristiken $x = \xi$ bez. $y = \eta$ soll gelten:*

$$(12)\qquad \frac{\partial G}{\partial y} - aG = 0 \quad \text{bez.} \quad \frac{\partial G}{\partial x} - bG = 0,$$

(3) *Im Punkte (ξ, η) möge $G = 1$ sein.*

Führt man nun in (11) diese Funktion G statt v ein, so findet sich $u_P = u(\xi, \eta)$ direkt ausgedrückt durch die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs C und man erhält, wenn u der Gleichung $L(u) = 0$ genügt:

$$(13)\qquad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left((uG)_A + (uG)_B\right) + \int_C (Q\, dy - P\, dx).$$

---

21) *P. du Bois Reymond* sagt statt dessen „Hauptintegral der Differentialgleichung" (l. c. p. 285).

Riemann leitet seine Methode mit den folgenden Worten ein, welche eine sehr allgemeine Auffassung derselben erkennen lassen: „Um Funktionen zu bestimmen, welche linearen partiellen Differentialgleichungen und linearen Grenzbedingungen genügen, kann man ein ganz ähnliches Verfahren anwenden, wie wenn man zur Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen sämtliche Gleichungen mit unbestimmten Faktoren multipliziert, addiert und diese Faktoren dann so bestimmt, dass aus der Summe alle unbekannten Grössen bis auf eine herausfallen."

In dem akustischen Problem, von dem *Riemann* ausgeht, ist speziell

$$c = 0, \quad b = a = \frac{\text{const.}}{x+y};$$

die Green'sche Funktion wird in diesem Falle als bestimmtes Integral resp. als hypergeometrische Reihe dargestellt.

Aus den Gleichungen (12) folgen durch Quadratur unmittelbar die Werte, die G selbst auf den Geraden $x = \xi$ und $y = \eta$ annimmt, nämlich

$$(12') \qquad G = e^{\int_{\eta}^{y} a\,dy} \quad \text{und} \quad G = e^{\int_{\xi}^{x} b\,dx}.$$

Man kann daher sagen: Durch die Riemann'sche Methode wird von den beiden p. 512 für hyperbolische Gleichungen genannten Aufgaben eine Aufgabe der ersten Art für die Gleichung $L = 0$ (nämlich die Bestimmung von u mittels der Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs C) zurückgeführt auf eine Aufgabe der zweiten Art für die adjungirte Gleichung $M = 0$ (nämlich die Bestimmung von G mittels der eben angegebenen speziellen Werte längs der Charakteristiken PA und PB). Die Vereinfachung, welche in dieser Zurückführung liegt, ist nicht unbeträchtlich.

Wiederum kann man eine zweite Green'sche Funktion $H(x, y, \xi', \eta')$ bilden, welche zu der adjungierten Gleichung $M = 0$ in derselben Beziehung steht, wie G zu $L = 0$; setzt man diese Funktion H statt u und G statt v in Gleichung (5) ein und wählt als Integrationsgebiet das Charakteristikenrechteck, dessen zwei gegenüberliegende Ecken von den Punkten $P(\xi, \eta)$ und $Q(\xi', \eta')$ gebildet werden, so ergiebt sich

$$H(\xi, \eta, \xi', \eta') = G(\xi', \eta', \xi, \eta),^{22})$$

22) *G. Darboux*, l. c. art. 359 und *P. du Bois-Reymond*, l. c. p. 289.

also dieselbe Regel über die Vertauschung der beiden Variabelnpaare, wie bei den elliptischen Differentialgleichungen, sowie das Gesetz, dass eine Green'sche Funktion, welche in dem einen Variabelnpaare der Gleichung $L = 0$ genügt, in dem andern Variabelnpaare die adjungierte Gleichung $M = 0$ befriedigt.

Auf nicht-lineare Differentialgleichungen lassen sich die Green'schen Methoden nicht ausdehnen.

4. Eindeutigkeitsfragen, vornehmlich bei elliptischen Differentialgleichungen. Die Untersuchung der Frage, ob eine Lösung, *wenn* sie existiert, durch gewisse Daten eindeutig festgelegt ist, bietet im allgemeinen weit geringere Schwierigkeiten dar, wie die Frage, *ob* sie existiert, und soll daher zuerst besprochen werden. Für den *elliptischen Fall*, auf den sich die diesbezüglichen Untersuchungen in der Hauptsache beschränken — der hyperbolische Fall wird mit wenigen Worten am Ende dieser Nr. erledigt werden — formuliert sich die Frage so: *Giebt es zwei verschiedene mit ihren ersten Ableitungen stetige Lösungen u_1 und u_2 einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche auf der Begrenzung eines vorgegebenen geschlossenen Gebietes in dieselben vorgegebenen Randwerte übergehen?*

Diese Frage wird, wenn die Differentialgleichung insbesondere *linear* ist, offenbar mit der folgenden identisch: *Giebt es eine Lösung $u = u_1 - u_2$ der Differentialgleichung, welche auf der Begrenzung des Gebietes Null und im Innern im allgemeinen von Null verschieden ist?*

Zur Beantwortung dient, wenn die Differentialgleichung linear ist, in vielen Fällen die folgende Überlegung, welche auch in der Potentialtheorie benutzt wird: Man multipliziere die bereits in die Normalform transformierte Differentialgleichung:

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

mit u, integriere das Produkt über das Innere des Gebietes, wende unter Voraussetzung der nötigen Stetigkeitseigenschaften in geeigneter Weise partielle Integration an und berücksichtige, dass u auf dem Rande des Gebietes verschwinden soll; aus der so erhaltenen Gleichung

$$(14)\qquad \int \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y} - c\right)u^2\right\} dx\,dy = 0$$

schliesst man sofort, dass u identisch verschwinden muss, falls die quadratische Form unter dem Integralzeichen eine *definite* [I C 2, Nr. b 13)] ist, d. h. falls

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} > 2c.$$

In diesem Falle ist also die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe bewiesen.

Ist dagegen die letztgenannte Bedingung nicht erfüllt, so lassen sich doch in Gleichung (14) linkerhand unter Umständen Glieder hinzufügen, welche bei der Integration fortfallen, also die rechte Seite nicht verändern, und welche die unter dem Integralzeichen stehende quadratische Form in u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ zu einer definiten *machen*. Der Schluss auf das identische Verschwinden von u ist dann ebenso wie vorher gegeben. Durch diesen Kunstgriff beweist *E. Picard*[23]) die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe für jede lineare Differentialgleichung des elliptischen Typus *bei einem Gebiet von hinreichend kleinem Flächeninhalte*.

Eine genauere Präzision und Abschätzung der erforderlichen Kleinheit des Gebietes giebt, allerdings in einem etwas weniger allgemeinen Falle, *Ed. Le Roy*[24]).

Zu demselben Satze wie *Picard* gelangt *L. Bianchi*[25]) von der p. 514 genannten Normalform der linearen Differentialgleichung aus, wobei die Anzahl der unabhängigen Variabeln sogar beliebig sein darf.

Ein anderes Verfahren, welches ebenfalls in der Potentialtheorie ein Analogon hat, besteht darin, dass man zeigt: *die Lösung der* (als linear und homogen vorausgesetzten) *Differentialgleichung kann kein positives Maximum und kein negatives Minimum besitzen*[26]). Alsdann ist offenbar die Existenz einer auf dem Rande verschwindenden Funktion ausgeschlossen und somit abermals die Eindeutigkeit bewiesen. Auf die in die Normalform transformirte Gleichung $\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$ ist dieser Schluss anwendbar für jedes Gebiet, in dem $c < 0$ ist. In einem Punkte nämlich, wo u einen positiven Maximalwert (bez. einen negativen Minimalwert) annimmt, müsste $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ und ausserdem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqq 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leqq 0$, $cu < 0$ $\left(\text{bez. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geqq 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geqq 0, cu > 0\right)$ sein, was vermöge der Differentialgleichung unmöglich ist. Ist dagegen $c > 0$, so kann nur die Unmöglichkeit eines negativen Maximums, sowie die eines positiven Minimums behauptet werden, was für den Eindeutigkeitsbeweis belanglos ist. Hat man

23) Par. C. R. 1888; J. de math. (4) 6 (1890), chap. I, § 1 und J. de math. (5) 2 (1896), § 1.

24) Ann. de l'éc. norm. (3) 14 (1897), p. 379; chap. 1, § 12, p. 394.

25) Rom Linc. Rend. (4) 5^2 (1889), p. 35.

26) *A. Paraf*, Toul. Ann. 6 (1892), p. 1.

endlich identisch $c = 0$, so ist sowohl ein positives wie ein negatives Maximum oder Minimum ausgeschlossen und der Eindeutigkeitssatz tritt wieder in Kraft. (Vgl. hierzu als einfachste Beispiele die Gleichungen $\Delta u - k^2 u = 0$ und $\Delta u + k^2 u = 0$ in Nr. **11** und **9**, sowie die Gleichung $\Delta u = 0$.)

Allgemeiner ausgesprochen lautet der Satz folgendermassen[27]): *Die Lösung der Differentialgleichung*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

ist für ein gewisses Gebiet eindeutig durch Randwerte bestimmt, wenn in diesem Gebiete entweder F identisch Null ist oder beständig das entgegengesetzte Vorzeichen wie A (also auch wie C) *hat.*

Auf mehr als zwei unabhängige Variable ist diese Schlussweise von *Th. Moutard*[28]) ausgedehnt, wobei sich insbesondere für die in den zweiten Differentialquotienten homogene lineare Gleichung

$$\sum_1^n{}^{(i)} \sum_1^n{}^{(k)} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

ergiebt, dass ihre Lösungen kein Maximum oder Minimum in demjenigen Gebiete der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_n$ haben können, in welchem die Form

$$\sum^{(i)} \sum^{(k)} A_{ik} t_i t_k$$

eine definite ist.

Bei einer nicht-linearen Differentialgleichung lässt sich im allgemeinen *nicht einmal für ein hinreichend kleines Gebiet* behaupten, dass es nur *eine* Lösung der Randwertaufgabe geben könne[29]). Dagegen gelingt dieses *E. Picard*[30]) bei der speziellen Gleichung

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

welche also von den ersten Differentialquotienten frei ist, sogar für ein beliebiges Gebiet, unter der Annahme, *dass F mit wachsendem u wächst.*

Noch allgemeiner zeigt *Ed. Le Roy*[31]), dass auch bei der Differentialgleichung

---

27) *E. Picard*, J. éc. pol. cah. 60 (1890), p. 89, wo indessen der Beweis nur unter der nicht notwendigen Annahme erbracht wird, dass die $A, B, \cdots F$ analytische Funktionen von x und y sind.

28) J. éc. pol. cah. 64 (1894), p. 55.

29) *E. Picard*, J. de math. (4) 6 (1890); Introduction, p. 140.

30) ibid. chap. 3, p. 173.

31) l. c. chap. 1, § 13, p. 399.

$$\Delta u = F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

nur eine Lösung möglich ist, *falls für alle in Betracht kommenden Werte der fünf Variabeln* $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$ *ist* und übrigens hinsichtlich der Existenz und Stetigkeit der ersten partiellen Differentialquotienten die nötigen Bedingungen erfüllt sind.

Sehr viel leichter erledigt sich der *hyperbolische Fall* bei Zugrundelegung der p. 512 genannten Randwertaufgaben.

Zunächst lässt sich nach einer Bemerkung von *O. Niccoletti*[32]) der Fall einer nicht-linearen Differentialgleichung auf den einer linearen reduzieren. Für die letztere folgt aber die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe unmittelbar aus der Riemann'schen Darstellung der Integrale mittels einer Green'schen Funktion (vgl. die vorige Nr., Gl. (13)). Ist nämlich die Existenz dieser Funktion bewiesen (Nr. 7), so erkennt man hinsichtlich einer Randwertaufgabe der ersten Art, dass die einzige Funktion, welche auf der Kurve C zugleich mit ihrem nach der Normale genommenen Differentialquotienten verschwindet, die Null ist, dass es also bei nicht verschwindenden Randwerten von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ nur eine Lösung der Aufgabe geben kann. Entsprechendes gilt für die Aufgaben der zweiten Art.

5. Existenz der Lösungen bei Differentialgleichungen des elliptischen Typus für hinreichend kleine Gebiete. Die Methode der successiven Approximationen. In Nr. 2 wurde die für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu stellende Randwertaufgabe im Anschlusse an die Ergebnisse der Potentialtheorie formuliert. Den Nachweis der Lösbarkeit dieser Aufgabe hat *E. Picard* (s. u.), auf einer grundlegenden, etwas spezielleren Arbeit von *H. A. Schwarz* (s. Nr. **10**) weiterbauend, für grosse Klassen von Differentialgleichungen erbracht.

Die vorgelegte Differentialgleichung, welche in dem zu betrachtenden Gebiet R durchweg elliptisch sein soll, möge zunächst auf ihre Normalform

$$\Delta u = F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

transformiert werden. F bedeute eine beliebige Funktion, von der nur vorausgesetzt wird, dass sie endliche und stetige erste Differentialquotienten nach x und y für alle in dem Gebiete R gelegenen Werte

32) Nap. Atti (2ª) 8 (1896), p. 1.

dieser Variabeln, sowie nach u, $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $w = \frac{\partial u}{\partial y}$ für alle zwischen den Grenzen $-L$ und $+L$ gelegenen Werte von u, v, w besitze. Dann kann nach dem Mittelwertsatze geschrieben werden:

$$(15)\quad |F(u_2, v_2, w_2) - F(u_1, v_1, w_1)| < |u_2 - u_1| A + |v_2 - v_1| B + |w_2 - w_1| C,$$

wo die A, B, C endliche Zahlen sind.

Für ein *hinreichend kleines Gebiet* gelingt dann der Existenzbeweis nach der *Methode der successiven Approximationen*. Dieses den Näherungsmethoden zur numerischen Auflösung der Gleichungen nachgebildete Verfahren wird von altersher in den Störungsrechnungen der Astronomen (vgl. Bd. VI) zur Anwendung gebracht. In grosser Allgemeinheit wurde es für die partiellen Differentialgleichungen der Mechanik von *A. Cauchy*[33]) formuliert und ziemlich gleichzeitig von *J. Liouville* auf gewöhnliche Differentialgleichungen angewandt (s. Art. II A 7 a, Nr. 7 oder diesen Art. Fussn. 86)). Nach der praktischen Seite hin (zur Korrektion gefundener erster Annäherungen) haben sich die Physiker häufig eines entsprechenden Verfahrens bedient[34]). Die theoretische Verwendung zur Begründung der Existenz der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung rührt wesentlich von *H. A. Schwarz*[35]) her.

Im vorliegenden Falle gestaltet sich die Methode so[36]): Man bestimmt eine unendliche Reihe von Näherungsfunktionen $u_1, u_2, u_3, \cdots$ durch die Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_2 = F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \\ \Delta u_3 = F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und durch die Bedingung, dass jede dieser Funktionen auf der Begrenzung von R die vorgeschriebenen Randwerte[37]) annehmen, im Innern von R eindeutig und stetig sein soll. Dies ist nach den Sätzen

33) Par. C. R. 10 1840, p. 957; 11, p. 1 = Ges. Werke (1) 5, p. 236 u. 249.

34) Z. B. *Lord Rayleigh*, Th. of Sound § 90.

35) Fenn. Acta 15 (1885) = Ges. Abh. 1, p. 241 u. ff.

36) *E. Picard*, J. de math. (4) 6 (1890), p. 145, chap. 1.

37) Die den Randwerten aufzuerlegenden Stetigkeitsbedingungen werden von *Picard* genauer bezeichnet in Par. C. R. 128 (1899), p. 1487; 130 (1900), p. 447 und 1085.

der Potentialtheorie möglich, da man die Green'sche Funktion der Potentialtheorie $G(x, y, \xi, \eta)$ als bekannt ansehen kann. Ist das Gebiet überdies hinreichend klein, so bleiben die sämtlichen Werte $|u_i|$, $\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right|$ für alle Punkte von R unterhalb einer endlichen Grenze L, inbezug auf welche F die oben genannte Eigenschaft haben möge. Sofern sich die u_i einer Grenze nähern, kann diese durch die Reihe dargestellt werden:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots. \tag{17}$$

Die Differenzen $u_{i+1} - u_i$ genügen dabei der Differentialgleichung

$$\Delta(u_{i+1} - u_i) = F\left(x, y, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_{i-1}, \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{i-1}}{\partial y}\right)$$

und der Randbedingung $u_{i+1} - u_i = 0$. Die Potentialtheorie liefert für dieselben die folgende Darstellung:

$$u_{i+1} - u_i =$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\int [F(\xi, \eta, u_i, \ldots) - F(\xi, \eta, u_{i-1}, \ldots)]\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

wo in der Klammer die Funktionen u_i, u_{i-1} mit den Argumenten ξ, η zu nehmen sind. Diese Darstellung lässt aber mit Rücksicht auf die Ungleichung (15) erkennen, dass

$$\begin{aligned}
|u_2 - u_1| &< MF \\
|u_3 - u_2| &< M(AN + BN + CM)\, F \\
|u_4 - u_3| &< M(AN + BN + CM)^2\, F \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|u_n - u_{n-1}| &< M(AN + BN + CM)^{n-2}\, F
\end{aligned}$$

ist; dabei bedeutet F den Maximalwert von $F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$ innerhalb des Gebietes R, M den Maximalwert des Integrales $\frac{1}{2\pi}\iint G d\xi d\eta$, N den der beiden Integrale $\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta$, $\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial y} d\xi d\eta$, während A, B, C den in (15) definierten Sinn haben. *Die Grössen M und N nehmen nun*, wie aus den Eigenschaften der Green'schen Funktion hervorgeht, *mit abnehmender Grösse des Gebietes zu Null ab.* Mithin kann man durch hinreichende Verkleinerung des Gebietes erreichen, dass $AN + BN + CM$ ein echter Bruch wird, dass also $u_n - u_{n-1}$ mit wachsendem n verschwindet und dass die Reihe (17) für alle Punkte des Gebietes gleichmässig nach einer Grenze u konvergiert. Diese Grenze u nimmt auf dem Rande die vorgeschriebenen Randwerte an und genügt im Innern, wie man

(allerdings nicht ohne einige Weitläufigkeiten) zeigen kann, der vorgelegten Differentialgleichung. *Die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für ein hinreichend kleines Gebiet ist somit in allgemeinster Weise dargethan.*

Man bemerke noch, dass bei völliger Allgemeinheit der Differentialgleichung die Beschränkung auf ein hinreichend kleines Gebiet nicht nur durch die Methode des Beweises, sondern durch die Natur der Sache gegeben ist. In der That kennt man Differentialgleichungen (s. insbes. Nr. 9), deren Integration bei ganz beliebig vorgeschriebener Randwertverteilung unmöglich wird, sobald das Gebiet gewisse „kritische Grössen" erreicht.

Das Wort „hinreichend kleines Gebiet" braucht nicht so verstanden zu werden, dass der *Umfang* des Gebietes hinreichend klein sei, es genügt vielmehr, wenn sein *Inhalt* unter einer gewissen Grenze liegt. Die vorangehenden Schlüsse gelten beispielsweise ebensowohl für ein genügend schmales ringförmiges Gebiet, wie für ein Gebiet, welches ganz innerhalb eines Kreises von genügend kleinem Radius enthalten ist[38]). Diese Bemerkung wird in der folgenden Nummer zur Geltung kommen.

6. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des elliptischen Typus für beliebige Gebiete. Alternierende Methode, Methode der ringförmigen Gebietserweiterung, Auskehrungsmethode etc. Um den Existenzbeweis für Gebiete von beliebiger Grösse zu erbringen, beschränkt sich *E. Picard*[30]) auf die folgende Gleichungsform

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

in der F eine Funktion bedeutet, die für alle Werte von u endlich und stetig ist, *welche ausserdem positiv ist und mit wachsendem u wächst.*

Die Methode der successiven Approximationen führt in diesem Falle nicht direkt zum Ziele. Konstruiert man nämlich die Näherungsfunktionen $u_1, u_2, \ldots$ (s. Nr. 5), so konvergieren die Näherungsfunktionen ungerader Ordnung in abnehmendem, die gerader Ordnung in wachsendem Sinne je nach einer Grenze, deren Zusammenfallen sich nur bei hinreichender Kleinheit des Gebietes beweisen lässt. Die beiden so entstehenden Grenzfunktionen v und w sind durch die Beziehungen verknüpft:

$$\Delta v = F(w, x, y), \quad \Delta w = F(v, x, y),$$

---

38) *E. Picard*, J. de math. (5) 2 (1896), p. 295.

während keine von ihnen der ursprünglich vorgelegten Gleichung zu genügen braucht.

Picard[39]) zieht daher die für die Potentialtheorie ausgebildete *Methode des alternierenden Verfahrens* heran (vgl. II A 7b, Nr. 28). Man betrachtet zwei Gebiete mit den Begrenzungen C und Γ, für welche die Randwertaufgabe einzeln gelöst werden kann (also z. B. zwei hinreichend kleine Gebiete). Es handelt sich darum, die Lösung der Randwertaufgabe für das ganze durch die Bögen b und β begrenzte Gebiet zu konstruieren (vgl. die Fig. 2). Zu dem Zweck werden zwei unendliche Serien von Funktionen $u_1, u_2, \ldots v_1, v_2, \ldots$ für das Innere von C und Γ nach folgender Regel gebildet: Man legt u_i auf b und v_i auf β die in der Randwertaufgebe vorgeschriebenen Werte bei und macht u_i auf a und v_i auf α denjenigen Werten gleich, welche bez. v_{i-1} und u_i auf diesen Bögen annehmen; (die Werte, welche man der Ausgangsfunktion u_1 auf a beilegen will, können dabei willkürlich gewählt werden). Unter den oben für F angegebenen Bedingungen nähern sich nun die u_i und v_i je einer Grenze u und v, welche in dem von a und α eingeschlossenen Gebiete zusammenfallen. *Die Randwertaufgabe für das zusammengesetzte, von b und β begrenzte Gebiet, und also überhaupt für jedes Gebiet, in dem F den obigen Bedingungen genügt, ist somit gelöst.* Der Beweis lässt sich auch auf den Fall ausdehnen, wo F zwar wächst mit wachsendem u, aber nicht dauernd positiv ist, sondern für $u = 0$ verschwindet.

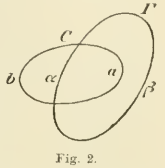


Fig. 2.

Einfacher noch ist eine *Methode der ringförmigen Gebietserweiterung*[38]). Man geht hierbei aus von einer Kurve C, für deren Inneres man die Randwertaufgabe bei der eingangs genannten Differentialgleichung lösen kann. Im Innern von C wird eine Kurve Γ, im Äussern eine Kurve C' so gewählt, dass der ringförmige Bereich zwischen C' und Γ hinreichend geringen Inhalt hat und also auch für diesen die Randwertaufgabe durch successive Approximationen ge-

39) Vgl. Fussn. 30 sowie Acta math. 12 (1889), wo das alternierende Verfahren auf die Differentialgleichung $\Delta u - p(x, y)u = 0$ $(p < 0)$ angewandt, und J. éc. polyt. cah. 60 (1890), wo dasselbe zur Untersuchung der allgemeinsten linearen elliptischen Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

herangezogen wird. Im letzteren Falle zeigt sich, dass das Verfahren immer dann zum Ziele führt, wenn eine der beiden Bedingungen $F = 0$ oder $AF < 0$ erfüllt ist, welche nach Nr. 4, p. 522 die Eindeutigkeit der Aufgabe garantieren.

löst werden kann. Es handelt sich darum, eine Lösung für das ganze Innere von C' herzustellen, welche auf C' gegebene Werte annimmt. Zu dem Zwecke konstruiere man für das Innere von C eine Serie von Funktionen $u_1, u_2, \ldots$, für das ringförmige Gebiet $C'\Gamma$ eine Serie $v_1, v_2, \ldots$ nach folgendem Gesetz: u_1 wird auf C willkürlich angenommen, v_1 wird auf Γ gleich u_1, auf C' gleich den gegebenen Randwerten gesetzt. Sodann wird u_2 auf C gleich den Werten von v_1 daselbst gemacht und v_2 auf Γ gleich u_2, auf C' gleich den gegebenen Randwerten genommen u. s. f. Alsdann konvergieren die u_i bez. v_i je nach einer Grenze u und v, welche in dem Ringgebiete $C\Gamma$ identisch sind und welche zusammen die Lösung für das Innere von C' ergeben. Man kann also Schritt für Schritt die Grenzkurve erweitern und so den Existenzbeweis für beliebige Gebiete erbringen.

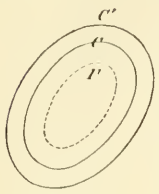


Fig. 3.

Die Methode der ringförmigen Gebietserweiterung hat gegenüber der alternierenden Methode den Vorzug, dass sie sich ohne weiteres auf den Fall einer Differentialgleichung von mehr als zwei unabhängigen Variabeln und durchaus elliptischem Typus übertragen lässt. Desgleichen lässt sich die Methode der successiven Approximationen auf diesen Fall bei hinreichender Kleinheit des Gebietes ausdehnen. Die hierzu nötigen Vorarbeiten, welche gewisse Ungleichungen für die Green'sche Funktion der Potentialtheorie eines räumlichen Gebietes beweisen, hat *S. Zaremba*[40]) geliefert.

Auch die *Poincaré'sche Auskehrungsmethode* (s. II A 7 b, Nr. **31**) lässt sich von der Potentialtheorie auf andere Differentialgleichungen verallgemeinern. So behandelt *Ed. Le Roy*[41]) die folgende Gleichung in drei unabhängigen Variabeln

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = fu, \tag{18}$$

welche sich als Vereinfachung der allgemeinsten Differentialgleichung des stationären Wärmeflusses:

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z, u) \tag{19}$$

ergiebt. Hier bedeuten a, b, c die Ableitungen einer Funktion μ bez. nach x, y, z; die Funktion f und die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial u}$ werden für alle

40) Bull. soc. math. 24 (1896), p. 19 und J. de math. (5) 3 (1897), p. 311.
41) Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 379 (Par. thèse 1898); chap. III, § 22.

dem Gebiete R angehörigen Werte von x, y, z als positiv vorausgesetzt.

Die Anwendung der Auskehrungsmethode auf Gleichung (18) gestaltet sich wie in der Potentialtheorie. Man konstruiert in geeigneter Weise eine abzählbare Reihe von Kugeln $C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots$ im Innern des Gebietes R und eine sie alle umschliessende Kugel T. Darauf wird eine Reihe von Näherungsfunktionen $W_1, W_2, \ldots W_i, \ldots$ so gebildet, dass W_i im Innern von C_i der Differentialgleichung (18) genügt, auf der Oberfläche von C_i und in dem zwischen C_i und T enthaltenen Raume dagegen mit W_{i-1} zusammenfällt. Die Ausgangsfunktion W_0 wird folgendermassen festgelegt: Man denke sich die auf der Oberfläche von R vorgeschriebenen Randwerte durch ein Polynom P von gewissen Vorzeicheneigenschaften gegeben — dies ist gestattet, weil sich der allgemeine Fall einer beliebigen Randwertverteilung durch Superposition aus solchen speziellen Polynomen zusammensetzen lässt — und bestimme W_0 dergestalt, dass die Funktion $P - W_0$ im Innern von T der Gleichung (18) genügt und auf der Oberfläche von T gleich P wird. Alsdann zeigt sich, das die Funktionen $W_0, W_1, W_2, \ldots$ nach einer bestimmten Grenze W konvergieren (es ist nämlich für jeden Punkt von R beständig $0 < W_i \leqq W_{i-1}$) und dass sich aus dieser Grenze die Lösung u des Problems folgendermassen bestimmt:

$$u = P - W_0 + W.$$

Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Auskehrungsmethode ist, dass die Integration der Gleichung (18) für den Fall einer Kugel im voraus erledigt ist. Dies gelingt[42]) durch die vorher auseinandergesetzten Methoden: successive Approximationen bei hinreichender Kleinheit der Kugel und daran anschliessende allmähliche Gebietserweiterung.

Um endlich den Übergang von Gleichung (18) zu Gleichung (19) zu vermitteln, schlägt *Ed. Le Roy*[43]) die folgende *Methode der analytischen Fortsetzung* ein. Er betrachtet zunächst die mit dem Parameter ξ_1 behaftete Gleichung

$$\Delta u_1 + a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + e\frac{\partial u_1}{\partial z} = \xi_1 F(x, y, z, u_1)$$

und zeigt, dass diese durch ein geeignet geleitetes Näherungsverfahren in einem beliebigen Gebiete R bei beliebiger Randwertverteilung integriert werden kann, falls ξ_1 eine durch die Grösse des Gebietes

42) Ibid. § 17 u. 18.

43) Ibid. chap. IV.

und die Beschaffenheit der Funktion F bestimmte Grenze nicht überschreitet. Darauf wird die Gleichung

$$\Delta u_2 + a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + c\frac{\partial u_2}{\partial z} = (\xi + \xi_1)F(x, y, z, u_2)$$

herangezogen und zu ihrer Integration ein Näherungsverfahren eingeschlagen, bei welchem die vorher bestimmte Funktion u_1 als Ausgangsfunktion dient. Dies Verfahren konvergiert wieder, wenn ξ unterhalb der vorher für ξ_1 ermittelten Grenze liegt. Der Bereich, in welchem der nunmehrige Parameter $\xi_2 = \xi + \xi_1$ liegen darf, hat sich somit gegen vorher verdoppelt. Durch Wiederholung dieses Verfahrens lässt sich der Bereich des Parameters weiter und weiter vergrössern, so dass insbesondere z. B. $\xi_n = 1$ genommen und die Integration der Gleichung (19) geleistet werden kann.

Von demselben Gedanken macht auch *H. Poincaré* bei seinen in Nr. **12** zu referierenden Untersuchungen einen ausgedehnten Gebrauch.

7. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen des hyperbolischen Typus. Die vorgelegte hyperbolische Differentialgleichung möge, sogleich in der Normalform geschrieben, lauten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{20}$$

Die bei einer solchen Gleichung zu stellenden Aufgaben sind in Nr. **2** (pag. 512) aufgeführt.

I. Es handle sich zuerst um eine *„Aufgabe der ersten Art"*, bei der u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs einer Kurve C vorgeschrieben sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass C von keiner Charakteristik zweimal geschnitten wird, d. h. dass von den rechtwinkligen Koordinaten x, y eines auf C variabeln Punktes jede eine monotone Funktion der anderen ist. Die auf C vorgeschriebenen Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ bedürfen keiner anderen Einschränkung, wie der der Endlichkeit und Stetigkeit und der Existenz und Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen. Auch hier wird der Existenzbeweis von *E. Picard*[44]) durch die *Methode der successiven Approximationen* erbracht.

Wie im elliptischen Falle die Gleichung $\Delta u = 0$ bez. $\Delta u = f(x, y)$, dient hier als Hülfsmittel zur Konstruktion der Näherungsfunktionen die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ (Gleichung der freien Saitenschwingungen) bez. die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ (Gleichung der erzwungenen Saiten-

44) J. de math. (4) 6 (1890), chap. II.

schwingungen), deren Integrale sofort hingeschrieben werden können (vgl. Nr. **13**).

Die Definition der successiven Näherungsfunktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist folgende: Sie genügen der Reihe nach den Differentialgleichungen

$$(21)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

welche sämtlich zur Klasse der Gleichungen der (freien oder erzwungenen) Saitenschwingungen gehören, sowie der Bedingung, auf C die für u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ vorgeschriebenen Werte anzunehmen. Durch diese Angaben sind die Näherungsfunktionen in demjenigen Charakteristikenrechteck bestimmt, welches dem Kurvenstücke $\overline{AB}$ umschrieben ist (vgl. Fig. 1 von pag. 518). Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Näherungsfunktionen u_i und u_{i+1} in irgend einem Punkte x, y dieses Rechtecks kann darauf nach Nr. **13** pag. 558 durch die Formel dargestellt werden:

$$u_{i+1} - u_i = \int\int \left\{ F\left(\xi, \eta, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial \xi}, \frac{\partial u_i}{\partial \eta}\right) - F\left(\xi, \eta, u_{i-1}, \frac{\partial u_{i-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial u_{i-1}}{\partial \eta}\right) \right\} d\xi d\eta,$$

in welcher sich die Integration über ein Gebiet erstreckt, welches einerseits von der Kurve C, andererseits von den durch den Punkt x, y gehenden Charakteristiken $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ begrenzt wird. Genügt nun F der Ungleichung (15), so kann aus der vorstehenden Darstellung geschlossen werden

$$| u_{i+1} - u_i | < F (A\alpha\beta + B\beta + C\alpha)^{i-2} \alpha\beta;$$

hier bedeutet F den Maximalwert, den die Funktion $F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$ in dem dem Kurvenstücke $\overline{AB}$ umschriebenen Charakteristikenrechteck annimmt, α und β sind die Seiten dieses Rechtecks, während A, B, C den früher in (15) definierten Sinn haben.

Darauf betrachte man die Grenzen, denen sich die Näherungsfunktionen u_i mit wachsendem Index nähern und stelle sie durch die folgende Reihe dar:

$$(22)\qquad u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots.$$

Ist $A\alpha\beta + B\beta + C\alpha < 1$, was allemal durch Verkleinerung des Kurvenstückes $\overline{AB}$ und dementsprechende Verkleinerung der Recht-

ecksseiten α und β erreicht werden kann, so konvergiert die Reihe (22) gleichmässig im Innern des Charakteristikenrechtecks (α, β). Sie genügt überdies der Differentialgleichung (20) und erfüllt auf C die vorgeschriebenen Randbedingungen. *Die Methode der successiven Approximationen führt also bei einem hinreichend kleinen Kurvenstück zum Ziele und bestimmt die Lösung innerhalb des dem Kurvenstück umschriebenen Charakteristikenrechtecks.*

Eine Bemerkung von *E. Lindelöf*[45]) ermöglicht es *O. Niccoletti*[46]), den Beweis für die Konvergenz des Approximationsverfahrens sogleich bei *beliebiger* Grösse des Kurvenstücks C zu erbringen, vorausgesetzt dass die Ungleichung (15) in dem dadurch entstehenden vergrösserten Gebiete Gültigkeit behält.

II. Zur Behandlung der „*Aufgaben der zweiten Art*" wendet *E. Picard*[47]) abermals successive Approximationen an. Er bildet die Näherungsfunktionen $u_1, u_2, \ldots$ genau nach der früheren Regel (s. Gleichung (21)). Die Grenzen für die Konvergenz der Reihe (23) werden dabei nur durch die Stetigkeitseigenschaften der Funktion F und ihrer ersten partiellen Ableitungen nach u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ bedingt: wenn insbesondere F und $\frac{\partial F}{\partial u}, \ldots$ für alle Punkte des vorgelegten Charakteristikenrechtecks und für alle Werte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ endlich und stetig sind, fällt der Konvergenzbereich des Verfahrens mit dem ursprünglichen Charakteristikenrechteck zusammen, wie gross man dieses auch nehmen möge.

Ein Beispiel hierzu liefert die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u,$$

welche in der Theorie der Flächen von konstantem negativen Krümmungsmasse vorkommt und von *L. Bianchi*[48]) mittels successiver Approximationen in der eben angedeuteten Weise behandelt ist.

Die Aufgaben der *zweiten Art* lassen sich auch durch *Potenzreihen* lösen[49]). Indessen erweist sich die Methode der successiven Approximationen der Methode der Potenzreihen insofern überlegen,

---

45) Vgl. II A 4 a, Fussnote 29.

46) Nap. Atti (2) 8, 1896, p. 1.

47) Note I in *G. Darboux*, Théorie générale des surfaces 4, p. 353 (1896) und Bull. soc. math. 22 (1894), p. 103.

48) Linc. Rend. (5) 3^1 (1894), p. 143 = Vorles. über Differentialgeometrie Kap. 17, § 298 der deutschen Ausgabe (Leipzig 1899).

49) *G. Darboux*, Théorie générale des surfaces, 2, art. 364.

als sie im allgemeinen einen grösseren Konvergenzbereich besitzt wie diese und erheblich weniger Voraussetzungen über die funktionentheoretische Beschaffenheit der vorkommenden Funktionen verlangt. So müssen die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$, welche man auf den Charakteristikenstücken für u vorschreibt, bei der Lösung durch Potenzreihen analytisch sein, während es bei der Methode der successiven Approximationen genügt, diese Funktionen mit Einschluss ihrer ersten Ableitungen als stetig vorauszusetzen. Nimmt man dagegen bei den successiven Approximationen die Annahme hinzu, dass die betr. Funktionen analytisch sind, so reicht die Gültigkeit der Methode ins komplexe Gebiet hinein: man erhält in der komplexen x- und y-Ebene als Konvergenzgebiet je einen Kreis, welcher von grösserem Radius ist, wie der Kreis, in dem man die Konvergenz der entsprechenden Potenzentwickelung[47]) nachweisen kann.

8. Über den analytischen Charakter der durch partielle Differentialgleichungen definierten Funktionen. Der wesentlichste Unterschied zwischen den Lösungen der Differentialgleichungen vom elliptischen und hyperbolischen Typus beruht in folgendem (in dieser Allgemeinheit allerdings noch nicht bewiesenen) Satze: *Die stetigen Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung sind notwendig analytische Funktionen der unabhängigen Variabeln, die stetigen Lösungen einer hyperbolischen Differentialgleichung sind es im allgemeinen durchaus nicht.* Voraussetzung des Satzes ist natürlich, dass die in der Differentialgleichung selbst vorkommenden Funktionen analytisch (II A 1, Nr. 12) sind, insbesondere also bei einer linearen Differentialgleichung, dass die Koeffizienten von u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ analytische Funktionen von x und y bedeuten. (Und zwar heisst eine Funktion in einem gewissen Gebiete R analytisch in x und y, wenn sie an jeder Stelle x_0, y_0 im Innern des Gebietes in eine nach positiven Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann.) Im folgenden sollen diejenigen Resultate zusammengestellt werden, welche die Richtigkeit des Satzes in besonderen Fällen bestätigen oder damit in Zusammenhang stehen.

I. Für die *elliptischen* linearen Differentialgleichungen, auf welche sich die einschlägigen Untersuchungen im wesentlichen beschränken, lässt sich der Inhalt des in Rede stehenden Satzes folgendermassen näher präzisieren: Selbst bei ganz willkürlich vorgeschriebenen nicht analytischen Randwerten von u auf der Begrenzung von R wird die Lösung im Innern von R eine analytische Funktion von x und y,

wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung innerhalb R analytische Funktionen von x und y sind.

Zum Beweise bietet sich am natürlichsten der Green'sche Satz aus Nr. **3**, Gleichung (9) dar. Kennt man nämlich irgend eine Lösung v der adjungierten Gleichung $M(v) = 0$, welche im Innern von R an einem beliebigen Punkte wie $\log r$ unendlich wird und sich im übrigen durchweg analytisch verhält, so zeigt die genannte Gleichung unmittelbar, dass *jede* Lösung u der vorgelegten Gleichung $L(u) = 0$, welche den der Ableitung des Green'schen Satzes zugrunde liegenden Voraussetzungen entspricht, analytisch wird. In der That kommen in dieser Gleichung die Variabeln x und y nur unter den Funktionszeichen v und $\frac{\partial v}{\partial n}$ vor. Ob die Begrenzung von R eine analytische Kurve ist und ob die auf ihr vorgeschriebenen Randwerte analytischer Natur sind, ist dabei völlig gleichgültig.

Die angedeutete Schlussweise hat *H. Weber*[50]) zum Nachweise eines etwas spezielleren Resultates benutzt. Er zeigt nämlich im engsten Anschlusse an *Riemann*[51]), dass alle stetigen Integrale der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ beliebig oft differenziert werden können; die hierbei erforderliche Lösung v lautet einfach $v = Y_0(kr)$, wo Y_0 die Bessel'sche Funktion mit logarithmischer Unendlichkeitsstelle (II A 4 b, Nr. **45**) bedeutet.

Allgemein beweist *E. Picard*[52]) für eine beliebige Differentialgleichung vom elliptischen Typus mit analytischen Koeffizienten:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$
$$(AC - B^2 > 0),$$

dass ihre Integrale, falls sie samt ihren Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung stetig sind, zugleich auch analytisch werden. Die Beweismethode besteht in der wirklichen Herstellung der Lösung durch successive Approximationen. Der Satz dehnt sich auch auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung aus, deren Koeffizienten in einem gewissen Gebiete der xy-Ebene analytische Funktionen sind und deren Charakteristiken (vgl. Nr. **15**) in demselben Gebiete durchweg imaginär verlaufen. Der Beweis ist von *E. Picard*[53]) angedeutet.

Über das Gebiet der linearen und selbst über das der Differen-

---

50) Math. Ann. 1 (1869), p. 1, § 1.

51) Diss. Göttingen Art. 10 (1851) = Ges. Werke, 2. Aufl., p. 20.

52) J. éc. polyt. cah. 60 (1890), § 1—4.

53) Par. C. R. 121[2] (1895), p. 12.

tialgleichungen von analytischer Form reicht der folgende Satz[54]) hinaus: Wenn in der Gleichung

$$\Delta u = F(x, y, u),$$

(deren rechte Seite also von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ frei ist), F in Bezug auf die Variabeln x, y und u partielle Differentialquotienten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. besitzt, so besitzt u solche bis zur n^{ten} Ordnung. Ist insbesondere F eine analytische Funktion, so existieren alle Differentialquotienten von u; dieselbe Schlussweise wird vermutlich genügen, um in diesem Falle die analytische Beschaffenheit von u nachzuweisen.

Es ist klar, dass es bei allgemeiner Wahl der Randwerte nicht gelingen kann, die Lösung einer elliptischen Randwertaufgabe über das ursprüngliche Gebiet hinaus der Differentialgleichung gemäss stetig fortzusetzen, weil alsdann längs des Randes der analytische Charakter der Lösung verletzt wäre.

Bezeichnet man eine *Linie*, über welche hinaus diese Fortsetzung unmöglich wird, als *singulär*, so darf man hiernach sagen: *Die singulären Linien können* im Falle einer elliptischen Differentialgleichung, wenn anders die Randwertaufgabe in allgemeinster Weise lösbar ist, *eine beliebige Gestalt und Lage haben.* Bezeichnet man ferner einen *Punkt*, in dessen Umgebung die Entwicklung nach positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ versagt, als singulär, so wird man vermutlich hinzufügen dürfen: *Auch die singulären Punkte können* bei den Lösungen der elliptischen Differentialgleichungen *jede beliebige Lage haben;* wenigstens liegt diese Vermutung der obigen Definition der Green'schen Funktion (p. 516) zu Grunde und wird in speziellen Fällen ($\Delta u = 0$, $\Delta u + k^2 u = 0$) bestätigt.

Die Tendenz der elliptischen Differentialgleichungen, aus beliebig vorgeschriebenen Randwerten im Innern des Gebietes analytische Funktionen zu machen, kann dazu dienen, *nicht-analytische stetige Funktionen mit beliebiger Genauigkeit durch analytische zu approximieren.* Einige der Potentialtheorie entlehnte Beispiele hierfür giebt *E. Picard*[55]). In demselben Sinne benutzt *K. Weierstrass*[56]) die parabolische Wärmeleitungsgleichung, welche sich in dieser Hinsicht den elliptischen Differentialgleichungen an die Seite stellt. *Weierstrass* zeigt, dass man zu einer willkürlichen stetigen Function einer Variabeln $f(x)$

54) *E. Picard*, J. de math. (4) 6 (1890), chap. I, § 6.
55) Par. C. R. 112 (1891), p. 183.
56) Berl. Ber. 1885², p. 633 u. 789.

(Anfangszustand der Temperatur in einem eindimensionalen Wärmeleiter) durch Lösung der Wärmeleitungsgleichung eine Funktion $F(x, t)$ von x und t (Temperaturzustand nach Verlauf der Zeit t) hinzukonstruieren kann, welche jene bei hinreichend kleinem t beliebig genau approximiert (vgl. auch Nr. **14**).

II. Dass bei einer *hyperbolischen* Differentialgleichung von einer entsprechenden Tendenz nicht die Rede sein kann, zeigt ohne weiteres, im Falle die Differentialgleichung linear ist, die Riemann'sche Darstellung ihrer Lösungen durch eine Green'sche Funktion (s. Gl. (13) von p. 518). Man überzeugt sich zunächst, dass die Green'sche Funktion selbst eine analytische Funktion von x und y wird, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung und also auch die für die Green'sche Funktion auf den Charakteristiken vorgeschriebenen Randwerte (s. Gl. (12')) analytisch sind. In der Riemann'schen Darstellung kommen nun ausserhalb des Integralzeichens die Terme $(uG)_A$ und $(uG)_B$ vor, welche von den willkürlich vorgeschriebenen Werten von u in A und B abhängen. Denkt man sich die Werte von u längs der Kurve C (vgl. Fig. 1) einerseits als Function von x: $u = \varphi(x)$, andrerseits als Funktion von y: $u = \psi(y)$ gegeben, so hat man $u_A = \psi(\eta)$, $u_B = \varphi(\xi)$. Ist überdies, wie wir voraussetzen wollen, C eine analytische Kurve, so werden G_A und G_B analytische Wertefolgen auf C. Aus Gleichung (13) geht daraufhin hervor, dass $u(\xi, \eta)$ nur dann eine analytische Funktion von ξ und η sein wird, wenn $\varphi(\xi)$ in ξ und $\psi(\eta)$ in η analytisch ist. Ob also die Lösungen einer hyperbolischen Differentialgleichung analytisch werden, hängt durchaus *von der Wahl der Randwerte von u und* (wie wir hinzufügen können) *von* $\frac{\partial u}{\partial n}$ ab. Bei willkürlicher Wahl dieser Elemente und bei analytischer Beschaffenheit von C werden die Lösungen jedenfalls nicht analytisch sein.

Die Umkehrung dieses Satzes beweist *Ét. Delassus*[57]) und zwar sogleich für lineare Differentialgleichungen beliebiger (der p^{ten}) Ordnung: Wenn längs einer keine Charakteristik berührenden analytischen Kurve C die Werte von u, $\frac{\partial u}{\partial n}, \cdots \frac{\partial^{p-1} u}{\partial n^{p-1}}$ als analytische Funktionen etwa der Bogenlänge vorgeschrieben sind, wenn ferner in der Umgebung von C die Koeffizienten der Differentialgleichung analytische Funktionen von x und y sind und die höchsten Koeffizienten nicht gleichzeitig verschwinden, so lässt sich ein die Kurve C vollständig umgebendes Gebiet G abgrenzen, in dem eine den an-

57) Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), Suppl. p. 53.

gegebenen Bedingungen genügende *analytische* Lösung der Differentialgleichung existiert. Die Eigenart der hyperbolischen Differentialgleichungen zeigt sich dann darin, dass es daneben noch andere Lösungen geben wird, die auf C ebenfalls den vorgeschriebenen Bedingungen genügen, ohne mit jener analytischen Lösung überall in G zusammenzufallen. Zwei Lösungen einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche in einem gewissen Gebiete übereinstimmen, brauchen nur in dem kleinsten, dem Gebiet umschriebenen Charakteristikenviereck identisch zu sein. Zwei Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung dagegen, welche in irgend einem Gebiete zusammenfallen, fallen durchweg zusammen.

Unter Zugrundelegung speziell einer analytischen Lösung entsteht die Frage nach den Singularitäten der Lösung, d. h. nach denjenigen Kurven oder Punkten der x, y-Ebene, über welche hinaus oder um welche herum die Potenzentwicklung der Lösung versagt. Diese Frage ist gleichzeitig von *J. Le Roux*[58]) und *Ét. Delassus*[59]) studiert. Beide Verfasser unterscheiden *zwei Arten von singulären Linien*, nämlich solche, die durch die Koeffizienten der Differentialgleichung bestimmt werden (feste oder wesentliche Singularitäten) und solche, die der speziellen Lösung eigenthümlich sind und durch Abänderung der Grenzbedingungen getilgt werden können (bewegliche oder zufällige Singularitäten). Feste Singularitäten können z. B. längs solcher Linien auftreten, wo ein Koeffizient der Differentialgleichung singulär wird, oder wo die Koeffizienten der höchsten in der Gleichung vorkommenden Differentialquotienten gleichzeitig verschwinden. Das wesentliche Resultat bezieht sich aber auf die beweglichen singulären Linien und lautet so: *Dieselben fallen nothwendigerweise mit Charakteristiken zusammen*[60]). Mit Bezug auf die *singulären Punkte* ergiebt sich ferner — ganz im Gegensatz zu den elliptischen Differentialgleichungen —: Isolierte singuläre Punkte von beliebiger Lage können überhaupt nicht auftreten; sie sind vielmehr an die singulären Stellen der Koeffizienten der Differentialgleichung gebunden.

Auch die Singularitäten der *parabolischen Differentialgleichungen* scheinen in der Regel ganze Linien zu erfüllen und mit den Charakteristiken der Differentialgleichung zusammenzufallen[61]). So giebt es

58) Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), p. 227.

59) Vgl. Fussnote 57 und J. de math. (5) 4 (1898), art. 28 ff.

60) Inhaltlich denselben Satz spricht *J. Horn*, Math. Ann. 33 (1889), p. 313 aus.

61) *P. Appell*, J. de math. (4) 8 (1892), § 8 u. 9.

z. B. keine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, welche lediglich in einer endlichen Anzahl im Endlichen gelegener Punkte singulär ist.

Mit der im allgemeinen nicht-analytischen Beschaffenheit der Integrale einer hyperbolischen Differentialgleichung hängt der folgende Umstand zusammen: Es seien längs einer Kurve C die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ in der Weise vorgeschrieben, dass sie im übrigen gleich Null und nur auf einem Stücke AB der Kurve von Null verschieden sind; dann ist das Integral u der Gleichung nur in demjenigen Gebiete von Null verschieden, welches begrenzt wird von den durch A und B verlaufenden divergierenden Charakteristiken.

Die Differentialgleichung sei beispielsweise die verallgemeinerte Gleichung der schwingenden Saite[62]) (vgl. Nr. 13):

$$\varrho(z)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

in welcher t die Zeit und z den Ort auf der Saite bedeutet. Die charakteristischen Kurven der z, t-Ebene sind dann durch die Formel gegeben:

$$\sqrt{\varrho(z)}\,dz = \pm\sqrt{p(t)}\,dt.$$

Die Kurve C falle mit der z-Axe zusammen und es sei der Saite im Anfangszustande ($t = 0$) eine Störung erteilt, welche sich auf das Segment AB der Saite beschränkt. Diese Störung greift mit wachsendem und abnehmendem t immer weiter um sich, so jedoch, dass sie nur den Raum zwischen den Charakteristiken C_1, C_2 bez. C_1', C_2' in Mitleidenschaft zieht, während ausserhalb dieses Raumes Ruhe herrscht. Den Wert von $\frac{dz}{dt}$ längs einer der genannten Charakteristiken kann man als die (rechtsseitige oder linksseitige) *Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung* ansprechen. Er ist $\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{p(t)}{\varrho(z)}}$, d. h. wenn man noch z der Charakteristikengleichung gemäss durch t ausgedrückt denkt, gleich einer bestimmten, durch die Differentialgleichung definierten Funktion von t. (Konstant wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im besonderen bei der gewöhnlichen Gleichung der schwingenden Saite: $\varrho = \text{const.}$, $p = \text{const.}$) In entsprechender Weise kann man

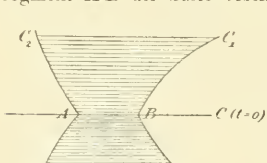


Fig. 4

62) *W. Wirtinger*, Math. Ann. 48 (1897), p. 372.

bei jeder linearen hyperbolischen Differentialgleichung, wenn die eine der unabhängigen Variabeln die Zeit, die andere eine räumliche Abmessung bedeutet, von einer *bestimmten, endlichen, aus der Charakteristikengleichung zu entnehmenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit* reden.

Anders bei einer elliptischen (oder parabolischen) Differentialgleichung. Hier bringt es der analytische Charakter der Lösungen mit sich, dass jede irgendwo vorgeschriebene Randbedingung die gesammte Werteverteilung der Lösung beeinflusst, indem der Wert, den die Lösung in einem beliebigen Punkte annimmt, mit den Werten, die sie in jedem anderen Punkte besitzt, innerlich analytisch verknüpft ist. Z. B. ist es bei einer analytischen Lösung ausgeschlossen, dass sie in einem gewissen Gebiete gleich Null, in einem anderen von Null verschieden ist. Stellt also wieder die eine unabhängige Variable die Zeit, die andere eine räumliche Abmessung vor, so erstreckt sich eine anfängliche, partielle Störung des Ruhezustandes sogleich über das ganze in Betracht kommende räumliche Gebiet. Will man hier überhaupt von einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit reden, so muss man sie als *unendlich gross* bezeichnen.

An diese Verhältnisse knüpft *J. Boussinesq*[63]) die folgende physiologische Bemerkung an: Die Eindrücke, welche unsere höheren Sinnesorgane, Auge und Ohr, empfangen, werden durch Differentialgleichungen reguliert, welche nach der Art und Weise, wie räumliche und zeitliche Differentialquotienten in dieselben eingehen, zum hyperbolischen Typus zählen und daher eine endliche Fortpflanzung bedingen. Dagegen werden unsere niederen Sinneswahrnehmungen, insbesondere der Temperatursinn, durch Differentialgleichungen vom parabolischen Typus beherrscht, denen eine unendliche Fortpflanzung entspricht. Es ist aber klar, dass nur bei endlicher Fortpflanzung eine Sonderung der aus verschiedenen Quellen stammenden Erregungen möglich ist, dass also nur hyperbolische Differentialgleichungen ein klares Bild der Aussenwelt vermitteln können, während sich bei parabolischen und elliptischen Differentialgleichungen, gerade wegen des analytischen Charakters ihrer Lösungen und der damit zusammenhängenden unendlichen Fortpflanzung, die äusseren Erregungen in ihrer deutlichen Wirkung auf unsere Organe gegenseitig beeinträchtigen. Es scheint also, dass die höhere oder niedere Beschaffenheit unserer Sinne durch den Typus der zugehörigen Differentialgleichungen bedingt wird.

---

63) Cours d'analyse, 2, art. 460, p. 448. Paris 1890. Die Boussinesq'schen Ausführungen sind im Texte etwas frei wiedergegeben.

II. Randwertaufgaben bei besonderen Differentialgleichungen.

9. Die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Die Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{23}$$

ist nächst der Laplace'schen die wichtigste und bestuntersuchte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Abgesehen von ihrem hervorragenden physikalischen Interesse — sie reguliert mehr oder minder direkt alle stationären Schwingungsvorgänge der Akustik, der Elastizitäts- und Elektrizitätstheorie — ist sie auch deshalb von Wichtigkeit, weil sie ein einfachstes Beispiel dafür liefert, dass die Lösung der Randwertaufgabe für gewisse Gebiete unmöglich werden kann. Eine zusammenfassende Monographie ist über diese Gleichung von *F. Pockels*[64]) herausgegeben worden.

Während sich die älteren Autoren mit der Aufstellung einzelner partikulärer Integrale begnügten, giebt *H. von Helmholtz* die erste prinzipielle Untersuchung über ihre Lösungen[17]). In den akustischen Problemen, von denen *Helmholtz* ausgeht, bedeutet u das Geschwindigkeitspotential einer in harmonischer Bewegung begriffenen Luftmasse, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist eine durch die Elastizitätsverhältnisse der Luft und die Schwingungsfrequenz bestimmte Konstante, λ die Wellenlänge; da es sich bei *Helmholtz* um dreidimensionale Gebiete handelt, ist Δ gleich $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. An denjenigen Stellen („Erregungspunkten"), wo äussere und zwar periodisch veränderliche Kräfte von der Amplitude ϱ wirken, ist Gleichung (23) (Analogon der Laplace'schen Gleichung, II A 7 b, Gl. (4)) zu ersetzen durch

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\varrho, \tag{23'}$$

(Analogon der Poisson'schen Gleichung II A 7 b, Gl. (5)). Aus den einfachsten Partikularlösungen von (23) $\frac{\sin kr}{r}$ und $\frac{\cos kr}{r}$ bildet *Helmholtz* die über ein räumliches Gebiet erstreckten Integrale

$$\int \frac{\sin kr}{r}\varrho\, d\tau, \qquad \int \frac{\cos kr}{r}\varrho\, d\tau,$$

von denen das erstere durchweg der Gleichung (23), das zweite inner-

64) Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Mit einem Vorwort von *F. Klein*. Leipzig 1891. Der Gegenstand des Pockels'schen Buches geht übrigens teilweise über diese Gleichung hinaus und betrifft (vgl. p. 20 desselben) *die allgemeine sich selbst adjungierte lineare Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typus.*

halb des Integrationsgebietes der Gleichung (23′), ausserhalb desselben der Gleichung (23) genügt, sowie die Oberflächenintegrale

$$\int \frac{\cos kr}{r}\,\sigma\,do, \qquad \int \frac{\partial}{\partial n}\frac{\cos kr}{r}\,\sigma\,do,$$

welche als Geschwindigkeitspotentiale einer einfachen und einer Doppelbelegung von Erregungspunkten bezeichnet werden und sich hinsichtlich ihrer Stetigkeit ebenso wie die entsprechenden elektrostatischen Potentiale (vgl. II A 7 b, Nr. **5** und **6**) verhalten. Die Anwendung des *Green*'schen Satzes zeigt dann, dass sich jede in einem gewissen Gebiete ausnahmslos stetige Lösung von (23) darstellen lässt als Wirkung einer auf der Oberfläche des Gebietes angebrachten einfachen und doppelten Schicht von Erregungspunkten. Eine Lösung mit einer einzelnen Unendlichkeitsstelle vom Charakter $\frac{\cos kr}{r}$, welche an der Oberfläche des Gebietes geeigneten Bedingungen genügt (vgl. Nr. **3**, p. 517), spielt für dieses Gebiet die Rolle der Green'schen Funktion. Den für eine solche Funktion giltigen Vertauschungssatz drückt *Helmholtz* so aus: „Wenn in einem teils von endlich ausgedehnten festen Wänden begrenzten, teils unbegrenzten Raume Schall im Punkte a erregt wird, so ist das Geschwindigkeitspotential in einem anderen Punkte b so gross, als es in a sein würde, wenn dieselbe Schallbewegung in b stattfände."

An diese Helmholtz'schen Sätze knüpft *E. Mathieu*[65]) an; doch scheinen seine Resultate nicht überall zuverlässig zu sein[66]).

Im Gebiete zweier unabhängiger Variabeln ist unsre Differentialgleichung von *H. Weber*[67]) studiert worden. Einer der Weber'schen Sätze wurde bereits p. 534 erwähnt. Mit diesem hängt der folgende Satz zusammen, welcher offenbar für alle Differentialgleichungen mit lediglich analytischen Integralen gültig sein wird: Wenn längs eines endlichen, übrigens beliebig kleinen Linienstückes u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ verschwindet, so ist u identisch gleich Null; oder: Wenn u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs eines solchen Linienstückes bekannt ist, so ist u in der ganzen Ebene bestimmt. *Weber* leitet ferner das folgende Analogon zum Gaussischen „Satz des arithmetischen Mittels" (vgl. II A 7 b, Nr. **13**) ab: Der Mittelwert aller derjenigen Werte, welche eine beliebige stetige

65) J. de math. (2) 17 (1872), p. 265, und théorie du potentiel (Paris 1885/86, deutsch von *H. Maser*, Berlin 1890), Kap. 10.

66) Vgl. die Kritik derselben bei *F. Pockels* l. c. p. 314 u. ff.

67) Math. Ann. 1 (1869), p. 1.

Lösung u auf der Kreisperipherie vom Radius r annimmt, ist gleich dem Werte, den u im Mittelpunkte des Kreises besitzt, multipliziert in die Grösse $J_0(kr)$, wo J_0 die Bessel'sche Funktion (II A 4 b, Nr. 44) bedeutet. Hieraus folgt weiter, dass jede Lösung u in jedem Kreise, dessen Radius gleich oder grösser ist als die kleinste Wurzel ϱ der Gleichung $J_0(k\varrho) = 0$, das Vorzeichen wechseln muss, dass also in jedem solchen Kreise eine Linie verläuft, längs der u verschwindet. Die ganze Ebene ist solchergestalt von Nulllinien jeder einzelnen Lösung der Differentialgleichung durchfurcht; wo mehrere, z. B. n Nulllinien (oder im Raume n Nullflächen) zusammenstossen, geschieht dieses stets unter dem gleichen Winkel $\frac{\pi}{n}$.[68])

Weber wendet sich dann zur Randwertaufgabe und zeigt leicht, dass diese in allgemeinster Form sicher dann nicht lösbar ist, wenn für das betreffende Gebiet eine Lösung (U) existiert, welche im Innern desselben stetig und am Rande gleich Null ist. Der Green'sche Satz verlangt in diesem Falle nämlich:

$$\int u \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0; \tag{24}$$

die Randwerte u dürfen also nicht willkürlich vorgeschrieben werden, sondern müssen der vorstehenden Bedingung gemäss gewählt werden. Ist dies geschehen, so ist andrerseits die Lösung der Aufgabe nicht eindeutig bestimmt; denn neben einer bestimmten Lösung u genügt auch, unter λ eine willkürliche Konstante verstanden, $u + \lambda U$ den vorgeschriebenen Randwerten und sonstigen Bedingungen.

Die Lösungen U werden *harmonische Funktionen (Poincaré)*[69]), *ausgezeichnete Lösungen (Pockels)*[70]), *Fundamentalschwingungen (Lord Rayleigh)*[71]) genannt. Statt der Randbedingungen $U = 0$ kommen auch die Bedingungen $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial n} + hU = 0$ ($h > 0$, wenn ∂n die positiv nach aussen gerechnete Normale bedeutet) vor.

Das Haupttheorem über unsere Differentialgleichung besagt nun, dass es *bei gegebener Gestalt des Gebietes unter Zugrundelegung einer der drei vorgenannten Randbedingungen stets unendlich viele, diskret liegende Werte von k^2 giebt, für welche ausgezeichnete Lösungen möglich sind. Die Hauptaufgabe besteht in der Berechnung dieser k^2 und der zugehörigen ausgezeichneten Lösungen.*

---

68) *F. Pockels*, l. c. p. 225.

69) Pal. Rend. 8 (1894), p. 88. Sonst wird der Terminus in anderm Sinn gebraucht (II A 7 b, Nr. 2).

70) l. c. p. 3.

71) Th. of Sound.

Ihre physikalische Bedeutung im Falle eines zweidimensionalen Gebietes, an dessen Grenze die Bedingung $U = 0$ gilt, ist folgende: Man denke sich eine Membran, welche in einen festen Rahmen von der Gestalt der Gebietsberandung eingespannt ist. Dann bestimmen die Werte von k^2 die Perioden der unendlich vielen rein harmonischen Eigenschwingungen, deren die Membran fähig ist, d. h. die Höhen der von der Membran ausgesandten Eigentöne. Die zugehörigen U geben die maximale Deformation der Membran bei Ausführung einer dieser Eigenschwingungen. Im Falle eines dreidimensionalen Gebietes, auf dessen Oberfläche $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ vorgeschrieben ist, denke man sich die Grenze des Gebietes als feste Wand und das Innere mit Luft erfüllt. Die rein harmonischen Eigenschwingungen dieser Luftmasse sind wiederum durch die U, die Tonhöhen durch die zugehörigen k^2 bestimmt. Die Randbedingung $\frac{\partial U}{\partial n} + hU = 0$ endlich kommt bei den Problemen der Wärmeleitung vor, wo die in Rede stehenden Lösungen diejenigen Anfangszustände der Temperatur bedeuten, welche sich bei freier Ausstrahlung des Körpers mit wachsender Zeit in der Weise ändern, dass sie sich mit einem Exponentialfaktor von der Form $e^{-\alpha t}$ multiplizieren.

Die Richtigkeit des Haupttheorems kann man durch folgende, schon von *D. Bernoulli*[72]) benutzte mechanische Überlegung plausibel machen: Ein mechanisches System von n Graden der Freiheit besitzt genau n Eigenschwingungen, in denen es ohne äusseren Arbeitsaufwand um eine Gleichgewichtslage mit hinreichend kleinen Amplituden herumoscilliert, und dementsprechend n (verschiedene oder teilweise zusammenfallende) Perioden der freien Schwingung. Eine Membran, ein mit Luft gefüllter Raum etc. ist aber ein mechanisches System von unendlich vielen Graden der Freiheit. Diesem werden also unendlich viele Eigenschwingungen zukommen.

Einen analytischen Beweis des Haupttheorems, der aber in der vorliegenden Form gleichfalls nicht den Anspruch auf Strenge machen kann und denselben Einwänden unterliegt, wie der Beweis des Dirichlet'schen Prinzipes durch *Riemann* (vgl. II A 7 b, Nr. 25 auch wegen der Beseitigung dieser Einwände durch *D. Hilbert*), formuliert *H. Weber*[73]). Er betrachtet die über das Gebiet R erstreckten Integrale

72) Petrop. Comm. 6 (1738), p. 116 und Petrop. Nov. Comm. 19 (1775) besonders p. 246; in allgemeinster Fassung bei *Lord Rayleigh*, Theory of Sound, Kap. IV, § 69 ff.

73) l. c. § 5 ff. Der Text schliesst sich an § 7 an.

$$A = \int u^2 \, dx \, dy, \qquad B = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \, dy$$

und stellt sich die Aufgabe, unter allen Funktionen u, welche an der Grenze von R verschwinden, diejenige, U, zu finden, für welche $A = 1$ und B so klein wie möglich wird. Die Variationsrechnung (II A 9, Nr. 24) zeigt, dass diese Function U_1 der Differentialgleichung $\Delta U_1 + k_1^2 U_1 = 0$ genügen muss, in welcher k_1^2 gerade gleich dem fraglichen Minimalwerte von B ist. Nimmt man also an, dass das aus lauter positiven Elementen bestehende Integral B seine untere Grenze wirklich erreicht, so ist die Existenz der ersten ausgezeichneten Lösung U_1 bewiesen. Um in derselben Weise die zweite ausgezeichnete Lösung U_2 zu erhalten, legt *Weber* der Funktion u ausser den bisherigen noch die folgende Bedingung

$$\int u U_1 \, dx \, dy = 0$$

auf. Der unter diesen Umständen kleinstmögliche Wert von B liefert den Wert von k_2^2; die Funktion $u = U_2$, für welche dieser kleinstmögliche Wert angenommen wird, genügt der Differentialgleichung $\Delta U_2 + k_2^2 U_2 = 0$ und stellt die zweite ausgezeichnete Lösung dar. Um die dritte zu gewinnen, wird die Bedingung

$$\int u U_2 \, dx \, dy$$

hinzugenommen u. s. f. Übrigens behandelt *Weber* durch eine geringe Abänderung dieser Schlussweise auch die Grenzbedingungen $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial n} + hU = 0$, sowie die allgemeine Randwertaufgabe, bei der an der Grenze von R beliebige Werte von u vorgeschrieben sind, letztere unter der Voraussetzung, dass k^2 von den vorher gefundenen ausgezeichneten Werten $k_1^2, k_2^2, \ldots$ verschieden ist.

In dem Buche von *F. Pockels*[74]) erscheint (bis auf je einen konstanten Faktor) A als kinetische, B als potentielle Energie einer in der Schwingung $u \sin \frac{2\pi t}{\tau}$ begriffenen Membran; die Weber'sche Betrachtung wird von diesem Standpunkte aus durch das Hamilton'sche Prinzip der Mechanik nahegelegt.

Auf dreidimensionale Gebiete ist die Weber'sche Betrachtung mit geringen Modifikationen von *H. Poincaré*[75]) übertragen, der sich die

74) l. c. p. 51 ff.

75) Amer. J. of math. 12 (1890), p. 211 und Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Paris 1895, chap. 15, p. 239.

Bedenklichkeit der Methode nicht verhehlt, sie aber benutzt, um Grenzen aufzusuchen, zwischen denen, unter Voraussetzung ihrer Existenz, die Zahlen k_i^2 liegen müssen. *Poincaré* entwickelt die Bedeutung der Methode an dem Bilde der Wärmeleitung und zeigt, dass sich beim Übergange von einem kontinuierlichen zu einem molekular konstruierten Medium die partielle Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher linearer Gleichungen und die Bestimmung der ausgezeichneten Werte von k^2 auf ein Hauptachsenproblem im Raume von $3m$ Dimensionen (unter m die Anzahl der Körpermoleküle verstanden) reduziert.

Über den exakten Beweis des Haupttheorems wird in der nächsten Nummer berichtet werden. Hier mögen zunächst einige Ergebnisse über die Abhängigkeit der ausgezeichneten Werte k_i^2 von der Gestalt des Gebietes zusammengestellt werden.

H. A. Schwarz[76]) beweist, dass sich bei stetiger Gebietsänderung der kleinste ausgezeichnete Wert k_1^2 stetig verändert und dass er bei fortgesetzter Verkleinerung des Gebietes unbegrenzt wächst. Dieselbe Thatsache drückt Lord *Rayleigh*[77]) so aus, dass er sagt: Eine Verringerung der Trägheit bewirkt bei einem beliebigen mechanischen System eine Verkleinerung der Perioden der Eigenschwingungen. (Im Falle einer Membran ist nämlich eine Gebietsverkleinerung mit einer Verringerung der schwingenden Masse und einer Vergrösserung von k_i mit einer Verkürzung der Perioden der Eigenschwingungen gleichbedeutend.) Den Beweis liefert Lord *Rayleigh* nur für Systeme von endlichen Freiheitsgraden. Derselbe Autor spricht auch den Satz aus, dass unter allen Gebieten von gleichem Flächeninhalt dem Kreise der kleinste Wert k_1^2 zukomme[78]).

Für die folgenden ebenen oder räumlichen Gebiete sind die ausgezeichneten Lösungen bekannt: Rechteck und rechtwinkliges Parallelepipedon — trigonometrische Funktionen — Kreis, Kreissektor, Kreisring etc., Kugel, Kugelsektor etc. — Bessel'sche Funktionen in Kombination mit trigonometrischen oder Kugelfunktionen —, Gebiete, welche von vier konfokalen Kegelschnitten bez. von sechs konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt werden — Produkte von Funktionen des elliptischen Cylinders[79]) bez. von verallgemeinerten Lamé'schen Funk-

76) In der Fussnote 35 genannten Arbeit; vgl. p. 260 der Ges. Werke.

77) l. c. § 88.

78) l. c. § 211.

79) Diese treten im Anschluss an die vorliegende Gleichung zuerst bei *E. Mathieu*, J. de math. (2) 13 (1868) auf; über einen speziellen Fall derselben (Funktionen des parabolischen Cylinders) vgl. *H. Weber*, l. c., § 9 ff., p. 27.

tionen[80]). Eine systematische Aufzählung aller dieser Fälle giebt *M. Böcher*[81]).

Es kann vorkommen, dass einem und demselben Werte k_i^2 mehrere Funktionen U entsprechen („mehrfach ausgezeichneter Wert von k^2"); beim Rechteck tritt dies ein, wenn die Seiten desselben kommensurabel sind, in welchem Falle sich zahlentheoretische Fragen anschliessen[82]).

10. Die Existenz der ausgezeichneten Lösungen. Exakter Nachweis derselben bei H. A. Schwarz und H. Poincaré. Eine Untersuchung über Minimalflächen führte *H. A. Schwarz*[35]) auf die Frage, ob die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{8\psi}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

in einem gegebenen, ganz im Endlichen gelegenen Gebiete R nur durchweg von Null verschiedene stetige Lösungen besitze oder ob im Innern des Gebietes eine Kurve verlaufen könne, auf der eine stetige Lösung den Wert Null annehmen kann. Im ersten Fall stellt ein gewisses Minimalflächenstück ein wirkliches Minimum des Flächeninhalts dar, im zweiten Falle nicht. Der Grenzfall, in dem die genannte Nullkurve mit dem Rande des Gebietes zusammenfällt, bedarf dabei hinsichtlich seiner Bedeutung für die Minimalflächentheorie (III D 5) einer besonderen Untersuchung. Indem *Schwarz* diese Frage verallgemeinert, untersucht er die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y)\, u = 0, \tag{25}$$

in der f eine in R *positive*, analytische Funktion von x und y bedeutet.

Eine Lösung u dieser Gleichung, welche im Innern von R stetig und auf dem Rande gleich 1 ist, stellt er formal durch ein Verfahren successiver Approximationen her, welches für alle späteren Untersuchungen von *Picard* u. a. (vgl. Nr. 5 und 6) vorbildlich geworden ist. u erscheint dabei als Summe der folgenden unendlichen Reihe von Näherungsfunktionen:

$$u_0 = 1,\ u_1, u_2, \ldots u_n = \frac{1}{2\pi} \int_R f(x',y')\, u_{n-1}(x',y')\, G(x,y,x',y')\, dx'\, dy',$$

80) *F. Klein* bei *Pockels* l. c. p. 133 und *Böcher* p. 254 (s. die nächste Fussnote).

81) Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894, p. 256.

82) Vgl. *G. Lamé*, Élasticité des corps solides, Paris 1852, 10me leçon; *Riemann-Hattendorff*, Partielle Differentialgleichungen. 3. Aufl. Braunschweig 1882, § 95, p. 253.

in der G die Green'sche Funktion der Potentialtheorie für das betr. Gebiet bedeutet. Die Frage der Konvergenz macht die Einführung der folgenden durchaus positiven Integrale nötig:

$$W_0,\ W_1,\ W_2, \ldots,\ W_n = \int_R f(x', y')\, u_n(x', y')\, dx'dy',$$

zwischen denen die Ungleichungen bestehen

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \cdots < g,$$

unter g den grössten Wert der Näherungsfunktion u_1 verstanden. Die Reihe der Quotienten $\frac{W_n}{W_{n-1}}$ hat also eine endliche obere Grenze (I A 3, Nr. **16**), welche *Schwarz* mit e bezeichnet. Diese charakteristische Konstante e giebt den gewünschten Aufschluss über die Konvergenz der Reihe $\sum u_i$:

Wenn nämlich $e < 1$ ist, so konvergiert die Reihe in dem betrachteten Gebiete gleichmässig und stellt die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (25) *dar.*

Der Satz lässt sich auch folgendermassen fassen:

Wenn e beliebig und $|\xi| < 1/e$, so konvergiert die Reihe $\sum \xi^i u_i$ gleichmässig in R und stellt eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u + \xi f(x, y)\, u = 0 \tag{25'}$$

dar, welche im Innern von R stetig ist und auf dem Rande den Wert 1 *annimmt.*

Schwarz macht darauf $|\xi| = 1/e$, in welchem Falle die Reihe $\sum \xi^i u_i$ divergiert. Das allgemeine Glied derselben nähert sich nämlich mit wachsendem Stellenzeiger einer von Null verschiedenen Grenze, welche U_1 heissen möge und welcher die folgenden Eigenschaften zukommen:

Für alle Innenpunkte von R ist U_1 endlich und stetig (sogar analytisch, wenn $f(x, y)$ eine analytische Funktion von x und y ist) *und genügt der Gleichung*

$$\Delta U_1 + k_1^2 f(x, y)\, U_1 = 0, \quad \left(k_1^2 = \frac{1}{c}\right);$$

auf dem Rande wird $U_1 = 0$.

Die vorstehenden Sätze sichern zunächst im Falle $|\xi| < \frac{1}{c}$ die Lösbarkeit der Randwertaufgabe: eine im Innern von R stetige, auf dem Rande den Wert 1 annehmende Lösung von (25) anzugeben; (bei beliebig vorgeschriebenen Randwerten braucht der Beweis nur wenig modifiziert zu werden). Gleichzeitig liefern sie den Beweis für die Existenz der ersten ausgezeichneten Lösung U_1 und gestatten,

den zugehörigen ausgezeichneten Wert $k_1^2 = 1/c$ wirklich zu berechnen. (Die in der vorigen Nummer betrachtete Differentialgleichung ergiebt sich einfach, indem man $f(x, y) = 1$ setzt.) Übrigens sind die Schwarz'schen Entwickelungen allgemein genug, um sogleich den Fall eines die Ebene mehrfach überdeckenden Bereichs mit einer endlichen Anzahl von Windungspunkten zu umfassen.

Das Schwarz'sche Verfahren ist von *E. Picard*[83]) einen Schritt weiter geführt. *Picard* untersucht die Natur der Reihe $\sum \xi^i u_i$ als Funktion von ξ und zeigt, dass dieselbe für $\xi = k_1^2 = 1/c$ einen einfachen Pol besitzt, dass nämlich die Differenz

$$\sum \xi^i u_i - \frac{U_1}{\xi - k_1^2}$$

durch eine Potenzreihe in ξ mit grösserem Konvergenzradius dargestellt wird, wie die ursprüngliche Reihe $\sum \xi^i u_i$. Dieser Konvergenzradius liefert den zweiten ausgezeichneten Wert k_2^2.

Den vollständigen Beweis der Existenz sämtlicher ausgezeichneter Lösungen verdankt man *H. Poincaré*[84]). Den historischen Sachverhalt kennzeichnet dieser im Anschluss an den zweidimensionalen Fall einer schwingenden Membran gelegentlich folgendermassen[85]): *Schwarz* hat die Existenz des Grundtons einer Membran bewiesen, *Picard* die des ersten Obertones; *er selbst* beweist die der höheren Obertöne.

Poincaré betrachtet ein dreidimensionales, von analytischen Flächen begrenztes, nicht unendlich ausgedehntes Gebiet und legt in diesem die Gleichung

$$\Delta u + \xi u + f = 0 \tag{25''}$$

zu Grunde, in der ξ eine komplexe Variable, f eine gegebene Funktion des Ortes bedeutet. Die Lösung u dieser Gleichung, welche auf der Oberfläche des Gebietes verschwindet, wird nach dem Schwarz'schen Verfahren aus den Funktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in der Form

$$u = u_0 + \xi u_1 + \xi^2 u_2 + \cdots$$

zusammengesetzt. Das wichtigste Theorem *Poincaré's* besagt nun, *dass die durch dieses Funktionselement definierte Funktion der komplexen Variabeln ξ in der ganzen ξ-Ebene den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, (meromorph ist).* Zum Beweise betrachtet *Poincaré* neben u die folgenden Teilreihen:

---

83) Par. C. R. 117 (1895), p. 502.
84) Pal. Rend. 8 (1894), p. 57.
85) Par. C. R. 118 (1894), p. 447.

$$(26)\qquad \begin{cases} v_2 = u_1 + \xi u_2 + \xi^2 u_3 + \cdots = \dfrac{u - u_0}{\xi}, \\ v_3 = u_2 + \xi u_3 + \xi^2 u_4 + \cdots = \dfrac{v_2 - u_1}{\xi}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_p = u_{p-1} + \xi u_p + \xi^2 u_{p+1} + \cdots = \dfrac{v_{p-1} - u_{p-2}}{\xi} \end{cases}$$

und setzt aus ihnen mit den disponibeln Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die neue Reihe zusammen:

$$(27)\qquad w = \alpha_1 u + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_p v_p,$$

deren Konvergenzradius bei hinreichend grossem p und geeignet gewählten α_i beliebig gross gemacht werden kann. Aus den Gleichungen (26, 27) folgt dann eine Darstellung von u als Quotient einer in ξ beliebig weit konvergenten Potenzreihe und eines Polynoms $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$P = \alpha_p - \xi\alpha_{p-1} + \xi^2\alpha_{p-2} + \cdots \mp \xi^{p-1}\alpha_1.$$

Die Wurzeln des letzteren sind die Pole der meromorphen Funktion u, deren absoluter Betrag kleiner ist wie der Konvergenzradius von (27). Sie liegen sämtlich auf der reellen positiven Achse der ξ-Ebene und sind für die meromorphe Funktion u Unendlichkeitspunkte erster Ordnung. Ihre Anzahl wächst mit wachsendem p ins Unendliche*).

Seien

$$\xi = k_1^2,\ k_2^2, \ldots, k_{p-1}^2$$

diese Pole und

$$A_1 U_1,\ A_2 U_2, \ldots, A_{p-1} U_{p-1}$$

die zugehörigen Residuen der meromorphen Funktion u. Dann genügen die U_i den folgenden Bedingungen:

$$\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0 \ldots \text{(im Innern des Gebietes)},$$
$$U_i = 0 \ldots \text{(auf der Oberfläche des Gebietes)},$$
$$\int U_i^2 \, d\tau = 1 \ldots \text{(bei passender Wahl der } A_i\text{)}.$$

Die Funktionen U_i sind also ausgezeichnete Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k_i^2 u = 0$ oder, nach der Bezeichnung *Poincaré's, harmonische Funktionen. Die Konstanten k_i^2 stellen die ausgezeichneten Werte von k^2 dar,* und bestimmen die *Tonhöhen der betr. Eigenschwingungen.*

*) Herr *V. Volterra* machte den Ref. darauf aufmerksam, dass der *Poincaré*'sche Beweis an dieser Stelle eine Lücke hat. Es könnte nämlich sein, dass bei der zu Grunde gelegten Funktion f alle Nullstellen von P von einer gewissen Stelle ab durch gleichzeitiges Verschwinden des Zählers von u aufgehoben würden. *Volterra* füllt diese Lücke aus, indem er f passend abändert. Vgl. hierzu *G. Lauricella,* Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 112, Anm. und *E. Le Roy,* Par. thèse 1898, Nr. 54, 55 (Ann. éc. norm. (3) 14, 1897).

Ausser der Existenz der ausgezeichneten Lösungen ist hiermit zugleich die Lösbarkeit der folgenden allgemeinen Randwertaufgabe *für alle Werte von* k^2 *ausser für* $k^2 = k_1^2, k_2^2, \ldots$ *und für jedes beliebige und beliebig grosse Gebiet* R bewiesen: *Gesucht wird eine Lösung der Differentialgleichung* $\Delta w + k^2 w = 0$, *welche im Innern des Gebietes* R *stetig ist und auf der Oberfläche desselben vorgegebene Werte annimmt.* In der That, bestimmt man 1) eine Funktion v durch die Bedingung, dass v im Innern von R die Gleichung $\Delta v = 0$ befriedigt und auf der Oberfläche die für w vorgeschriebenen Werte annimmt und 2) eine Funktion u dadurch, dass u im Innern von R der Gleichung $\Delta u + k^2 u + k^2 v = 0$ genügen und auf der Oberfläche von R verschwinden soll, so ist $w = v + u$ die Lösung der genannten Randwertaufgabe. Die Existenz von v ist aber aus der Potentialtheorie bekannt, während u genau die von *Poincaré* konstruierte meromorphe Funktion ist, falls man k^2 mit ξ und $k^2 v$ mit f identifiziert.

Der Gedankengang des Poincaré'schen Beweises entspricht einem (schon von *Laplace* ausgesprochenen und in England vielfach nach *Sir John Herschel* benannten) Prinzip der Mechanik, nach welchem die Perioden der freien Schwingungen eines mechanischen Systems diejenigen sind, deren erzwungene Schwingungen ausarten und unendliche Amplituden annehmen. In der That bedeutet (25″) die Gleichung einer Schwingung, welche durch eine periodisch veränderliche Kraft von der Amplitude f angeregt wird, während die ausgezeichneten Lösungen freie Schwingungen darstellen, welche, einmal eingeleitet, ohne äussere Kraft dauernd fortbestehen können. Die Schwingungszahlen der letzteren, welche den Grössen k_i proportional sind, werden nun, nach dem „Herschel'schen" Prinzip sowohl wie nach dem Poincaré'schen Beweise, durch diejenigen Werte von $\sqrt{\xi}$ berechnet, für welche die erzwungene Schwingung u unendlich wird. Ähnlich liegen die Verhältnisse in dem *zweidimensionalen Falle* (schwingende Membran) bei *Schwarz*. Die Lösung u, welche auf dem Rande den Wert 1 annimmt, entspricht abermals einer erzwungenen Schwingung, bei welcher die periodisch wirkende äussere Kraft auf den Rand wirkend zu denken ist und überall dieselbe Amplitude 1 hat. Das Unendlichwerden dieser Lösung für $\xi = k_1^2$ zeigt wieder an, dass die Periode dieser erzwungenen Schwingung gleich einer freien Schwingungsperiode der Membran geworden ist. Im *eindimensionalen Falle* (schwingende inhomogene Saite, *gewöhnliche* Differentialgleichung) kommt derselbe Gedanke sogar schon bei *J. Liouville*[86]) vor. *Liouville* zeigt, dass die Reihe

86) J. de math. (1) 5 (1840), p. 356.

$$u_0 + \xi u_1 + \xi^2 u_2 + \cdots,$$

deren einzelne Koeffizienten u_i successive aus der Gleichung

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = -f(x)\, u_{i-1} \quad (f > 0)$$

bestimmt werden, für jeden Wert von ξ konvergiert, der kleiner ist als eine bestimmte Wurzel einer gewissen transcendenten Gleichung, durch welche die ausgezeichneten Lösungen („Sturm'schen Funktionen") der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 f(x)\, U = 0$$

bestimmt werden.

Von hier aus gewinnt auch die Bedingung (24), welcher die vorzuschreibenden Randwerte unterworfen werden müssen, wenn k ein ausgezeichneter Wert ist, eine einfache Bedeutung. Sie besagt nämlich[84]), dass die den Randwerten entsprechenden, auf die Begrenzung der Membran wirkenden Kräfte so gewählt werden müssen, dass sie keine Arbeit leisten.

Poincaré macht es fernerhin sehr wahrscheinlich[84]), dass sich seine Methode auf die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ ausdehnen lässt, dass also auch in diesem Falle die erzwungene Schwingung u eine meromorphe Funktion von ξ ist und dass sich die freien Schwingungen U_i, welche bei dieser veränderten Randbedingung möglich sind, als Residuen von u berechnen lassen.

Auf die Gleichung $\Delta\Delta(u) - k^2 u = 0$, welche bei der schwingenden Platte dieselbe Rolle spielt, wie die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ bei der schwingenden Membran, sind die Poincaré'schen Resultate von *G. Lauricella*[87]) übertragen. Dass auch die allgemeinen dreidimensionalen Probleme der Elastizitätstheorie diesen Methoden zugänglich sind, zeigen *G. Lauricella*[88]) sowie, in einigen vielversprechenden Noten, *E.* und *F. Cosserat*[89]).

11. Die Gleichung $\Delta u - k^2 u = 0$. Von der vorhergehenden Gleichung unterscheidet sich die jetzige namentlich dadurch, dass bei ihr ausgezeichnete Lösungen unmöglich sind. Die allgemeinen Sätze aus Nr. 4 zeigen nämlich, dass keine Lösung dieser Differentialgleichung ein positives Maximum oder ein negatives Minimum besitzen könne. Daraus folgt, dass es keine stetige Lösung giebt, die auf der

87) Tor. Mem. (2) 46 (1896), p. 65 und Nuovo Cimento (4) 4 (1896), p. 134.
88) Tor. Mem. (2) 45 (1895), p. 295.
89) Par. C. R. 12. April, 18. April, 8. August 1898.

Begrenzung eines geschlossenen Gebietes Null und im Innern von Null verschieden ist, und ferner, dass es *nur eine* Lösung geben kann, die in einem geschlossenen Gebiete stetig ist und auf der Begrenzung gegebene Werte annimmt. Dies gilt sowohl für ein drei- wie für ein zweidimensionales ganz im Endlichen gelegenes Gebiet. Die entsprechenden Sätze beweist *C. Neumann*[90]) auch für ein dreidimensionales *unendliches* Gebiet, welches im Endlichen durch eine geschlossene Oberfläche begrenzt wird (d. h. also für das Äussere einer solchen Oberfläche), unter Hinzunahme der weiteren Voraussetzung, dass die Lösung u in allen unendlich fernen Punkten ein und denselben konstanten Wert besitze, welcher, wie sich herausstellt, kein andrer wie der Wert Null sein kann.

Dass es andrerseits bei vorgeschriebenen Randwerten *stets eine* Lösung der Differentialgleichung giebt, folgt aus den allgemeinen Theoremen von Nr. **5** und **6**, sowie aus der vorstehend besprochenen Arbeit von *H. Poincaré*. *Neumann*[90]) beweist dieses durch seine *Methode des arithmetischen Mittels* (II A 7 b, Nr. **27**). Er betont dabei, dass sich die Anwendung dieser Methode merkwürdiger Weise hier viel einfacher gestaltet, wie in der Potentialtheorie. Ebenso wie dort wird hier die Annahme gemacht, dass die Begrenzungsfläche S des fraglichen (dreidimensionalen) Gebietes R etwa mit Ausnahme einzelner ebener Bestandteile durchweg *konvex* sei. (Übrigens hat sich in der Potentialtheorie gezeigt, dass das Neumann'sche Verfahren auch ohne diese Annahme konvergiert, vgl. II A 7 b, Nr. **27**; dasselbe wird vermutlich auch hier zutreffen.) Die Grösse des Gebietes unterliegt keinen Beschränkungen. Es wird sowohl die Randwertaufgabe für das Innere wie für das Äussere der konvexen Oberfläche gelöst.

An die Stelle des Newton'schen Potentials $1/r$ tritt im vorliegenden Falle die folgende charakteristische Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi(r) = \frac{e^{-kr}}{r} \quad (k > 0).$$

Bildet man mit dieser das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} \, do,$$

erstreckt über irgend eine konvexe Fläche S, indem man den Anfang des Fahrstrahls r in einen festen Punkt der Fläche legt und den Endpunkt bei der Integration die ganze Fläche überstreichen lässt, so gilt

90) Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig 1896. Kap. 9.

der Hülfssatz, *dass dieses Integral stets kleiner als 1 wird* (während es in der Potentialtheorie für $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ *stets gleich 1 ist*).

Neumann bildet nun der Reihe nach die folgenden über die Fläche S erstreckten Integrale:

$$W = \frac{1}{2\pi_e}\int \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} f do,\ W' = \frac{1}{2\pi_e}\int \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} f' do,\ W'' = \frac{1}{2\pi_e}\int \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} f'' do, \ldots$$

in welchen f die vorgeschriebenen Randwerte der gesuchten Lösung, $f', f'', \ldots$ diejenigen Werte bedeuten, welche $W, W', \ldots$ auf S annehmen; der Endpunkt des Fahrstrahls r überstreicht wieder die Fläche S, der Anfangspunkt liegt in einem beliebigen inneren oder äusseren Punkte x, y, z. Alle diese Integrale genügen der Differentialgleichung und erleiden einen Sprung von der Grösse $\pm f, \pm f', \pm f'' \ldots$, wenn man sich vom Innern oder Äussern her auf die Grenzfläche S begiebt. Alsdann liefert die Reihe

$$u = W - W' + W'' - W''' + \cdots$$

die Lösung der Randwertaufgabe für das Innere, und gleichzeitig

$$u = -W - W' - W'' - W''' - \cdots$$

die für das Äussere der Fläche S. Diese Reihen konvergieren nämlich auf Grund des angegebenen Hülfssatzes und genügen vermöge ihrer Bildungsweise der Differentialgleichung und der Randbedingung.

12. Die Gleichung $\Delta u = ke^u$ ($k > 0$). Diese Gleichung kommt in der Theorie der Flächen von konstantem negativen Krümmungsmass (III D 5, 6) vor; sie besagt, dass die Fläche vom Linienelement $ds^2 = e^{u(x,y)}(dx^2 + dy^2)$ das konstante Krümmungsmass $-k/2$ besitzt. Das besondere Interesse, welches sich an ihre Integration heftet, rührt indessen davon her, dass das sog. Fundamentaltheorem in der Theorie der automorphen Funktionen (vgl. II B 6 c) auf die Existenz ihrer Lösungen basirt werden kann, wie zuerst von *H. A. Schwarz*[91]) durch Stellung einer diesbezüglichen Preisaufgabe angedeutet wurde.

Der Existenzbeweis für die Lösungen dieser Differentialgleichung in einem hinreichend kleinen sowie in einem beliebigen, ganz im Endlichen gelegenen Gebiet bei vorgeschriebenen Werten auf dem Rande desselben ist in den allgemeinen Sätzen von Nr. 5 und 6 enthalten. Auch ist es nach Nr. 4 klar, dass die Randwertaufgabe eindeutig bestimmt ist.

Was man indessen im Hinblick auf die funktionentheoretischen Anwendungen zu wissen wünscht, ist etwas anderes. Hier wird

91) Gött. Nachr. 1890, p. 216.

die Existenz einer Lösung verlangt, *welche auf einer unberandeten Riemann'schen Fläche eindeutig ist, der Differentialgleichung genügt und im allgemeinen stetig verläuft mit Ausnahme einer endlichen Anzahl vorgeschriebener, teils im Endlichen teils im Unendlichfernen gelegener logarithmischer Unendlichkeitsstellen, deren Multiplizitäten an gewisse Ungleichungen geknüpft sind.*

Dass stets eine und nur eine diesen Bedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung existiert, ist zuerst von *E. Picard*[92]) bewiesen worden. *Picard* zeigt zunächst, dass die Randwertaufgabe für ein ganz im Endlichen gelegenes Gebiet durch *Einführung der logarithmischen Unstetigkeiten* nur unwesentlich erschwert wird. Trennt man nämlich die Glieder, welche das logarithmische Unendlichwerden verursachen, von der gesuchten Lösung ab, so ergiebt sich für den übrig bleibenden stetigen Bestandteil U die Differentialgleichung $\Delta U = \Theta e^U$, in der Θ eine positive Funktion von x und y bedeutet. Die Integration dieser neuen Gleichung kann aber nach den allgemeinen Sätzen aus Nr. 6 in demselben Umfange für erledigt gelten, wie die der ursprünglichen $\Delta u = k e^u$. Sodann führt *Picard* den Fall, wo eine Randwertaufgabe für das *Aussere* einer ganz im Endlichen gelegenen Kurve vorgeschrieben ist, durch eine Inversion auf den Fall zurück, wo eine entsprechende Aufgabe für das *Innere* einer solchen Kurve gestellt ist. Ist endlich die Möglichkeit der Integration für das Gesamtgebiet der schlichten Ebene bewiesen, so macht *der Übergang von dieser zu der Riemann'schen Fläche* keine wesentliche Schwierigkeit; viel mühsamer ist der *Übergang von der begrenzten zu der unbegrenzten schlichten Ebene.* Diesen bewerkstelligt *Picard* durch ein Verfahren „ringförmiger Verschmelzung".

Man schlage zwei konzentrische Kreise C und C' ($C' < C$), welche beide die im Endlichen gelegenen logarithmischen Unstetigkeiten einschliessen. Nach den vorhergenannten Sätzen über begrenzte Bereiche ist es möglich, eine Lösung u zu konstruieren, welche auf C gegebene Randwerte annimmt und im Innern von C bis auf die vorgeschriebenen logarithmischen Unstetigkeiten stetig ist, sowie eine Lösung v, welche auf C' gegebene Werte hat und sich im Äussern bis auf die im unendlich fernen Punkte vorgeschriebene Unstetigkeit stetig verhält. Man bildet nun zwei Reihen von Näherungsfunktionen $u_1, u_2, \cdots v_1, v_2, \cdots$ nach folgendem Gesetz: Für v_i schreibe man auf C' diejenigen Werte vor, welche u_i auf C' annimmt, für u_{i+1} auf C diejenigen, welche v_i dort besitzt. Für die Konvergenz des Verfahrens

92) J. de math. (4) 6 (1890), chap. IV, § 1 u. 2; (4) 9 (1893), p. 273—291.

kommt alles darauf an, die Ausgangswerte von u_1 auf C passend zu wählen; sie werden so bestimmt, dass sie in ihrer Gesamtheit zwischen zwei hinreichend grossen negativen Zahlen enthalten sind; ferner werden die Radien von C und C' hinreichend gross und hinreichend wenig verschieden angenommen. Alsdann gelingt der Beweis, dass die Reihe der u und die der v je nach einer Grenze konvergiert und dass diese Grenzen in dem Kreisringe zwischen C und C' zusammenfallen. *Der Existenzbeweis ist damit für die schlichte Ebene erbracht und lässt sich, wie erwähnt, auf die Riemann'sche Fläche leicht übertragen.*

Einen zweiten Beweis, der auf ganz anderen Prinzipien beruht, hat *H. Poincaré*[93]) gegeben. *Poincaré* legt von vornherein *die ganze unberandete Riemann'sche Fläche* zu Grunde, die er sich nach dem Vorgange *F. Klein*'s als beliebig gekrümmtes, nirgends verzweigtes räumliches Gebilde denkt („Klein'sche Fläche", vgl. II B 2). Die gesuchte Lösung u wird dann eine Funktion des Ortes auf dieser Fläche; der spezielle Ausdruck Δu, welcher bei der aus ebenen Blättern bestehenden Riemann'schen Fläche auftrat, ist hier durch den allgemeinen Ausdruck des zweiten Differentialparameters Du zu ersetzen. Werden noch alle Unstetigkeiten, welche der Lösung u aus funktionentheoretischen Rücksichten auferlegt werden mögen, von dieser in geeigneter Weise abgetrennt, so findet *Poincaré* für den übrig bleibenden stetigen Bestandteil U die Differentialgleichung

$$DU = \Theta e^U - \Phi, \tag{28}$$

in der Θ und Φ gegebene Funktionen sind und $\Theta > 0$ ist. *Es handelt sich darum, zu zeigen, dass dieser Gleichung durch eine auf der ganzen Klein'schen Fläche ausnahmslos eindeutige und stetige Funktion genügt werden kann.*

Zum Beweise betrachtet *Poincaré* eine ganze Reihe von Differentialgleichungen, welche durch successive stetige Abänderung aus einander hervorgehen. Die erste derselben ist die Potentialgleichung, welche für die zu Grunde gelegte Fläche $DU = 0$ lautet; die letzte ist Gleichung (28). Es wird nun immer gezeigt, dass eine auf der Fläche eindeutige und stetige Lösung je für die folgende Differentialgleichung angegeben werden kann, wenn sie für die vorhergehende gefunden ist.

Eine Lösung der Potentialgleichung mit zwei beliebig vorzuschreibenden logarithmischen Unendlichkeits- und zwei Nullstellen liefert der reelle Teil G eines zu der Fläche gehörigen Integrals dritter Gattung mit rein imaginären Perioden (II B 2, Nr. **16**). Dieser spielt für die Fläche

93) J. de math. (5) 4 (1898).

die Rolle einer Green'schen Funktion. Aus G lässt sich eine überall endliche Lösung der Differentialgleichung $DU = \varphi$ in der Form eines über die Gesamtfläche erstreckten Oberflächenintegrals $\frac{1}{2\pi}\int G\varphi\, d\omega$ herstellen; φ ist dabei eine im übrigen willkürliche Funktion des Ortes, welche nur der Bedingung $\int \varphi\, d\omega = 0$ zu genügen hat.

Sodann lässt *Poincaré* die Gleichung $DU = \varphi$ übergehen in

$$DU = \eta U + \psi \tag{29}$$

mit Hülfe der Zwischenform

$$Du = \lambda\eta U + \varphi + \lambda(\psi - \varphi); \tag{29'}$$

η und ψ bedeuten abermals willkürliche, auf der Fläche definierte Funktionen des Ortes, welche nur gewissen Stetigkeitsbedingungen zu genügen haben; λ ist ein Parameter. Gleichung (29') lässt sich durch eine Potenzreihe in λ integrieren, deren einzelne Koeffizienten U_i als successive Lösungen der Gleichung $DU_i = \varphi_i$ erhalten werden; die Konvergenz dieser Reihe erfordert zunächst, dass λ unterhalb einer durch die Grösse von η bestimmten Grenze liegt. Durch mehrmalige Wiederholung solcher Entwickelungen wird indessen die Konvergenzgrenze schliesslich bis zu $\lambda = 1$ herausgeschoben, wobei dann Gleichung (29') in Gleichung (29) übergeht.

Darauf betrachtet *Poincaré* die Gleichung

$$DU = \Theta(e^U - \alpha), \tag{30}$$

in der α eine positive Konstante, Θ wie in Gleichung (28) eine positive Funktion des Ortes ist. Diese gestattet die triviale Lösung $U = \log \alpha$. Durch Abänderung von (30) ergiebt sich

$$DU = \Theta e^U - \alpha\Theta - \lambda\psi \tag{31}$$

(ψ eine positive Funktion, λ ein Parameter). Als Lösung von (31) wird nun abermals eine Potenzreihe in λ angesetzt, welche für $\lambda = 0$ in $\log \alpha$ übergeht und deren Koeffizienten sich als successive Lösungen von Gleichung (29) berechnen lassen. Die Reihe konvergiert für ein gewisses Wertgebiet λ; durch Wiederholung der Entwickelung kann die Lösbarkeit von (31) für ein beliebiges λ dargethan werden.

Gleichung (31) stimmt aber mit der vorgelegten Gleichung (28) überein, wenn man $\alpha\Theta + \lambda\psi = \Phi$ setzt. *Die Existenz der fraglichen Lösungen jener Gleichung ist somit auf einem zweiten Wege bewiesen.*

Übrigens geht der Poincaré'sche Beweis insofern über den Picard'schen hinaus, als *Poincaré* gewisse Singularitäten, denen in den funktionentheoretischen Anwendungen die sog. parabolischen Zipfel

(cycles de troisième espèce, II B 6 c, Nr. 5) entsprechen, zulässt, während sie *Picard* ausschliefst.

13. Die Gleichung der schwingenden Saite und ihre Verallgemeinerungen. Die einfachste Differentialgleichung von hyperbolischem Typus, *die der schwingenden Saite bei konstanter Dichte* ϱ *und konstantem Drucke* p, lautet, wenn äussere Kräfte nicht wirksam sind:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{32}$$

wofür man auch bei passender Wahl der Zeit- und Längeneinheit schreiben kann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{32'}$$

In den neuen Variabeln $x = z + t$, $y = z - t$ nimmt sie die „Normalform" an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \tag{32''}$$

(Gleichung der freien Saitenschwingungen).

Die älteste und einfachste Lösung dieser Gleichung ist die *d'Alembert*'sche[94]):

$$u = \varphi(x) + \psi(y).$$

Wegen der älteren Geschichte des Problems sei auf *B. Riemann*[95]) verwiesen. Eine anschauliche „Konstruktion" der Lösung giebt *G. Monge*[96]).

Um die d'Alembert'sche Lösung dem Falle anzupassen, wo u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs einer Kurve C vorgeschrieben sind, welche von keiner der Charakteristiken $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ zweimal geschnitten wird, berechne man aus den Werten von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ mit Zuhülfenahme der Kurvengleichung $\frac{\partial u}{\partial x}$ als Funktion von x und $\frac{\partial u}{\partial y}$ als Funktion von y; dann bestimmen sich die Terme φ und ψ der d'Alembert'schen Lösung durch blosse Quadratur.

Handelt es sich andrerseits um eine Saite, längs welcher zeitlich und örtlich veränderliche Kräfte angreifen, so lautet die Differentialgleichung in der Normalform:

---

94) Berl. Hist. 1747, p. 214.

95) Gött. Abh. 13 (1867) = Ges. Werke, 2. Aufl., XII, p. 227 (a. d. J. 1854).

96) J. éc. polyt. 8, cah. 15 (1809).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F(x, y)$$

(*Gleichung der erzwungenen Saitenschwingungen*). Zu der d'Alembertschen Lösung tritt in diesem Falle noch das Glied hinzu

$$\iint F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

erstreckt über dasjenige Gebiet, welches von der Kurve C und den durch den fraglichen Punkt x, y gehenden Charakteristiken eingeschlossen ist. Man folgert dies z. B. aus der allgemeinen Gleichung (11), wenn man $v = 1$ nimmt.

In dem wirklichen Problem der schwingenden Saite liegen die Verhältnisse etwas anders, wie sie in der allgemeinen Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen (s. Nr. 7) vorausgesetzt werden. Die Saite habe die Länge l und sei an den Enden festgeklemmt. Für $t = 0$ wird u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ längs der Saite willkürlich gegeben. Die „Kurve C“ der x, y-Ebene wird in diesem Falle mit der Geraden $x - y = 0$ identisch und zwar mit demjenigen Stücke derselben, welches von $O(x = 0, y = 0)$ bis $P(x = l, y = l)$ reicht. Auf diesem Stücke ist u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben. Nach der allgemeinen Theorie ist die Lösung nur in dem Rechteck $OQPQ'$ bestimmt (vgl. Fig. 5). Im vorliegenden Falle wird aber die Lösung für den unendlichen Streifen $O'OPP'$ verlangt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nicht nur längs OP u und $\frac{\partial u}{\partial n}$, sondern auch längs $O'O$ und PP' (wegen Festklemmung der Endpunkte) $u = 0$ gegeben ist[97]). Die letztere Bedingung erfüllt man durch ein gewisses „Spiegelungsverfahren“[98]),

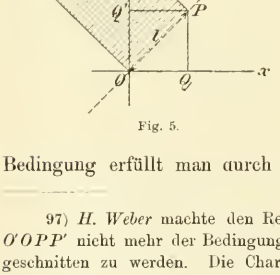


Fig. 5.

97) *H. Weber* machte den Ref. darauf aufmerksam, dass die Begrenzung $O'OPP'$ nicht mehr der Bedingung genügt, von jeder Charakteristik nur *einmal* geschnitten zu werden. Die Charakteristiken, welche OP schneiden, treffen nämlich teils auch $O'O$, teils PP'. In je zwei solchen zusammengehörigen Punkten können dann aber die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ nicht mehr willkürlich vorgeschrieben werden; sie müssen einer Bedingung genügen, die *H. Weber* in einer Neubearbeitung von *Riemann-Hattendorff*, Part. Differentialgl. der Physik, entwickeln wird, und die im vorliegenden Falle erfüllt ist.

98) *Riemann-Hattendorff* l. c. § 75, p. 197.

indem man die längs OP vorgeschiebenen Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Verlängerung von OP in geeigneter Weise symmetrisch wiederholt. So erhält man für die beiderseits unendlich verlängerte Gerade OP solche Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$, welche die Lösung u in der ganzen x, y-Ebene eindeutig bestimmen und welche die für die Geraden $O'O$ und PP' vorgeschriebene Bedingung $u = 0$ von selbst erfüllen.

Ganz verschieden hiervon ist eine Behandlung, die von *D. Bernoulli*[99]) herrührt und auf dem Gedanken beruht, dass sich die allgemeinste Bewegung der Saite durch Superposition rein harmonischer Bewegungen (Eigenschwingungen) zusammensetzen lässt, einem Gedanken, der von *Euler*[100]) geradezu als Bernoulli'sches Prinzip bezeichnet wird und der von *Fourier* später präzisiert und verallgemeinert worden ist. Hier ist die Reihenfolge, in welcher die für den Anfangszustand ($t = 0$) und für die Endpunkte der Saite ($z = 0$, $z = l$) vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt werden, die umgekehrte. Man sucht zuerst solche Partikularlösungen der Differentialgleichung (32), welche der Bedingung $u = 0$ für $z = 0$ und $z = l$ genügen, nämlich

$$\sin \frac{n\pi z}{l}\left(a_n \cos \frac{n\pi t}{\tau} + b_n \sin \frac{n\pi t}{\tau}\right); \quad \tau = \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, l;$$

an zweiter Stelle bildet man aus ihnen unendliche Summen (Fourier'sche Reihen), welche den für $t = 0$ vorgeschriebenen Werten von u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ genügen. (Vgl. II A 8.)

Entsprechend dem hyperbolischen Charakter der Differentialgleichung pflanzen sich Unstetigkeiten in den vorgeschriebenen Anfangswerten oder in ihren Differentialquotienten ins Innere des Integrationsgebietes fort. Hieraus folgt, dass z. B. im Falle der gezupften Saite $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right.$ für $t = 0$ in einem Punkte unstetig$\left.\right)$ die Differentialgleichung längs eines ganzen Linienzuges der x, y-Ebene nicht erfüllt ist. Auf die eigentümlichen Schwierigkeiten, welche sich hieraus für die Lösung durch Fourier'sche Reihen ergeben, sind *F. Lindemann*[101]) und *A. Harnack*[102]) eingegangen.

Eine erste Verallgemeinerung der vorangehenden Gleichung ist die *Differentialgleichung der schwingenden Saite im widerstehenden Mittel,*

99) Petrop. Nov. Comm. 19 (1775), p. 239.
100) ibid. p. 341.
101) Freiburg Naturf. Ges. 7 (1879), p. 500.
102) Math. Ann. 29 (1887), p. 486.

welche von der sog. *Telegraphistengleichung* (der Differentialgleichung, die nach der älteren Theorie die Ausbreitung des elektrischen Potentials in einem Kabel reguliert) und von der *Differentialgleichung für eine nur von einer räumlichen Koordinate abhängige Lichtschwingung in einem absorbirenden Medium* nicht verschieden ist. Man kann ihr bei passender Wahl der Längen- und Zeiteinheit eine der folgenden Formen geben:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{33}$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4u, \quad (u = 4Ve^t) \tag{33'}$$

oder endlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0, \quad (x = z + t, \; y = z - t). \tag{33''}$$

Sie hat auch deshalb ein Interesse, weil sich die allgemeinste lineare hyperbolische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (vgl. pag. 511) auf diese Form bringen lässt.

Die Integration dieser Gleichung ist von *H. Poincaré*[103]) durch Fourier'sche Integrale, von *E. Picard*[104]) nach der Riemann'schen Methode (vgl. Nr. 3) ausgeführt. Es wird angenommen, dass für $t = 0$ und beliebiges z die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ gleich Null sind, ausgenommen im Intervalle $a < z < b$. Die „Kurve C" in der x, y-Ebene fällt wieder mit $x - y = 0$ zusammen. Die Green'sche Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ wird einfach gleich der Bessel'schen Funktion $J\left(\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}\right)$ (II A 4 b, Nr. 44). In der Riemann'schen Darstellungsweise (s. Gl. (13)) zerlegt sich u von selbst in zwei Bestandteile, deren erster als reguläre, ohne Formveränderung fortschreitende Welle, deren zweiter als eine Art Residuum aufgefasst werden kann, das von der regulären Welle zurückgelassen wird.

Die *Differentialgleichung einer schwingenden Saite von (örtlich) variabler Dichte ϱ und (zeitlich) wechselnder Spannung p* wird unter dem Namen der „harmonischen Gleichung" von *G. Darboux*[105]) und *W. Wirtinger*[62]) studiert. Sie lautet:

$$\varrho(z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(t)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{34}$$

---

103) Par. C. R. 117 (1893), p. 1027 und Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895, § 75—84, p. 134.

104) Par. C. R. 118 (1894), p. 16 und Bull. soc. math. 22 (1894), p. 2. Wesentlich dieselben Resultate hat schon *Laplace*, Par. Hist. 1779, mémoire sur les suites § 29 (oeuvr. 10, p. 60).

105) Th. gén. des surfaces, 2, art. 406 ff., Paris 1889.

oder, wenn man die Parameter der schon pag. 538 berechneten Charakteristiken als Koordinaten x, y einführt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = [\varphi(x+y) + \psi(x-y)]\, u. \tag{34'}$$

Zur Integration derselben bieten sich zwei Methoden dar, von denen die eine mit der d'Alembert'schen, die andere mit der Bernoulli-schen Methode zusammenfällt, wenn man zu dem speziellen Falle $\varrho = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ übergeht.

Bei der ersten Methode handelt es sich darum, die Green'sche Funktion im Sinne *Riemann's* herzustellen. *Wirtinger* bemerkt dabei[106]), dass die successiven Approximationen, welche die Existenz der Green-schen Funktion beweisen, im vorliegenden Falle so schnell konvergieren (von der Ordnung, in welcher die aufeinanderfolgenden Glieder der Bessel'schen Reihe abnehmen), dass sie auch zur numerischen Berechnung dienen können.

Bei der zweiten Methode geht man von geeigneten partikulären Integralen der Differentialgleichung aus. Der Umstand, dass ϱ nur von z und p nur von t abhängt, ermöglicht es, Gleichung (34) durch ein Produkt einer Funktion $y(z)$ von z und einer Funktion $s(t)$ von t allein zu integrieren. Diese Funktionen bestimmen sich durch die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 \varrho(z)\, y = 0, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 p(t)\, s = 0, \tag{35}$$

in denen k einen disponibeln Parameter bedeutet. Nimmt man ϱ und p als positive Funktionen an, was ja durch ihre physikalische Bedeutung nahe gelegt wird, so fallen die Gleichungen (35) in die Klasse der *Sturm'schen* (vgl. Art. II A 7a, Nr. 2). Es seien nun die Partikularlösungen y_1, y_2 bez. s_1, s_2 von (35) so bestimmt, dass für $z = 0$ $y_1 = 0$, $y_1' = 1$, $y_2 = 1$, $y_2' = 0$ bez. für $t = 0$ $s_1 = 0$, $s_1' = 1$, $s_2 = 1$, $s_2' = 0$ wird. In der Theorie der Sturm'schen Differentialgleichungen wird bewiesen, dass es eine unendliche diskrete Reihe von Parameterwerten $k_1, k_2, \ldots$ giebt, welche z. B. der Gleichung $y_1(l, k) = 0$ genügen. Bildet man daher unter Zugrundelegung irgend eines dieser „ausgezeichneten Parameterwerte" das Produkt

$$u_i = y_1(z, k_i)\,\{a_i\, s_1(t, k_i) + b_i\, s_2(t, k_i)\},$$

so hat man eine Partikularlösung von (35), welche der für die Enden der Saite ($z = 0$ und $z = l$) geltenden Bedingung ($u = 0$) genügt. Bildet man sodann eine unendliche Reihe aus solchen Partikular-

106) In der Fussn. 62) genannten Arbeit p. 374.

lösungen, so lässt sich diese zur Darstellung willkürlicher Funktionen verwenden (vgl. den folgenden Art.) und man kann die Koeffizienten a_i, b_i so wählen, dass $u = \sum u_i$ den für $t = 0$ vorgeschrieben Anfangsbedingungen entspricht. Die Lösung des Problems wird nach dieser Methode also durch eine Reihe gewonnen, welche in *beiden* Variabeln z und t den Charakter einer Sturm-Liouville'schen Reihe besitzt.

Wirtinger zeigt auch[62]), wie man durch Reihenentwickelung der Green'schen Funktion einerseits oder durch Summation der Sturm-Liouville'schen Reihe andrerseits von der einen zur anderen Methode übergehen kann.

In dem besonderen Falle $\varrho = \text{const.}$ oder $p = \text{const.}$ gehen nach den Differentialgleichungen (35) die Sturm'schen Funktionen y oder s in trigonometrische über und die Reihe wird in *einer* der beiden unabhängigen Variabeln vom Charakter der Fourier'schen. Setzt man gleichzeitig $\varrho = \text{const.}$ und $p = \text{const.}$ voraus, so wird die Reihe in *beiden* Variabeln eine Fourier'sche und man hat die Bernoulli'sche Lösung des elementaren Problems der schwingenden Saite.

14. Die Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung ist die einzige Gleichung von parabolischem Typus, welche genauer behandelt ist und auch bei dieser bezieht sich die Untersuchung nur auf diejenigen speziellen Gebiete, welche für die physikalische Anwendung Interesse haben, so dass über die allgemeine Form der bei dieser und überhaupt bei parabolischen Differentialgleichungen möglichen Randwertaufgabe nichts bekannt ist.

Es handle sich zunächst um die Wärmeleitung in einem linearen Leiter (bez. um einen Vorgang, der nur von *einer* räumlichen Koordinate x abhängt). Die Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{36}$$

wo t (bei passender Wahl der Einheit) die Zeit bedeutet. Das ausschliesslich betrachtete Gebiet in der (x, t)-Ebene besteht aus einem Streifen, der durch die Geraden $t = 0$, $x = 0$, $x = l$ begrenzt wird[107]). Auf dem Rande dieses Streifens sind die Werte von u vorgeschrieben.

107) Vgl. indessen *L. Saalschütz*, Astr. Nachr. Nr. 1321 (1861) § 12 ff. und *J. Stefan*, Wiener Ber. 98, 2a (1889), p. 473, 616, 965 und Wiener Monatshefte 1 (1889), wo das Gebiet von einem Stücke der x-Axe, von der positiven t-Axe und dem Parabelbogen $x = c\sqrt{t}$ begrenzt und auf der Begrenzung u vorgeschrieben wird. Dies Problem entspricht der Wärmeleitung in einer Wassersäule, die an schmelzendes Eis grenzt, wobei sich die Grenze x zwischen Wasser und Eis nach dem Gesetze $x = c\sqrt{t}$ fortschiebt.

Gesucht wird u im Innern des Streifens für $t > 0$. Die Aufgabe entspricht der Temperaturbestimmung in einem unendlich dünnen Stabe von der Länge l, für welchen die Anfangstemperatur in jedem Punkte und die Temperatur an den Enden für jede spätere Zeit gegeben ist, während die übrige Oberfläche des Stabes vor Wärmeabgabe geschützt wird. In dieser Aufgabe ist der Fall der Halbebene ($t > 0$) eingeschlossen, welcher der Wärmebewegung in einem beiderseits unendlich langen Stabe entspricht. Statt an den Endflächen die Temperatur direkt zu geben, kann man hier freie Ausstrahlung in einen Raum von der (ev. variabeln) Temperatur u_1 bez. u_2 vorschreiben, was nach dem *Newton*'schen Erkaltungsgesetz die Bedingungsgleichungen

$$(37)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_1) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_2) = 0 \text{ (für } x = 0 \text{ und } x = l)$$

mit sich bringt. Auf noch eine andere Grenzbedingung wird man geführt, wenn man die Enden des Stabes $x = 0$ und $x = l$ zusammengebogen denkt, also die Wärmeleitung in einem Ringe untersucht; dann lautet die Grenzbedingung dahin, dass die Werte von u in je zwei gegenüberliegenden Punkten der Begrenzungsgeraden $x = 0$ und $x = l$ des vorher genannten Streifens übereinstimmen müssen: $u(0, t) = u(l, t)$. Das letztere Problem ist schon von *Fourier*[108]) gelöst; dabei treten die elliptischen ϑ-Funktionen zum ersten Mal in der Analysis auf. Desgleichen behandelt *Fourier*[109]) und vor ihm *Laplace*[110]) den Fall der Halbebene (Wärmebewegung in einem beiderseits unendlich langen Stabe). Eine Form der Lösung, welche *Fourier* hierfür angiebt, lautet

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

unter $F(\xi)$ die von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$ willkürlich vorgeschriebene Anfangstemperatur verstanden. *Lord Kelvin*[111]) deutet dieselbe sehr anschaulich als Superposition unendlich vieler Einzelwirkungen, welche je von der Stelle ξ ausgehend nach dem Gesetze $(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ räumlich und zeitlich fortgepflanzt werden.

Der Fall eines Stabes von endlicher Länge, welcher an seinen Endflächen frei ausstrahlt, wird von *Fourier* gelegentlich des dreidimensionalen Problems eines durch Ausstrahlung sich abkühlenden

108) Th. de la chaleur, chap. IV.
109) l. c. chap. IX, vgl. speziell art. 374.
110) J. éc. pol. cah. 15 (1809), p. 241.
111) Mathem. and Phys. Papers 2, art. 72, p. 41.

Würfels[112]) erledigt. Die Methode ist für *Fourier* und seine Nachfolger charakteristisch. *Fourier* beginnt mit einer Partikularlösung der Gleichung (36) von der Form: $a \cos kx\, e^{-k^2 t}$. In dieser wird k so gewählt, dass die Grenzbedingungen (37) (die bei *Fourier* l. c. übrigens etwas spezieller lauten) erfüllt sind. Es ergiebt sich für k eine transcendente Gleichung, von der bewiesen wird, dass sie unendlich viele reelle Wurzeln k_n besitzt: schliesslich ist noch der Nachweis erforderlich, dass eine willkürliche Funktion (die vorgeschriebene Anfangstemperatur) in eine trigonometrische Reihe von der Form $\sum a_n \cos k_n x$ entwickelt werden kann.

Um Aufgaben mit komplizierten auf solche mit einfacheren Randbedingungen zu reduzieren, leistet auch hier der Green'sche Satz[113]) und die Einführung einer Green'schen Funktion[114]) gute Dienste. Letztere ist so zu definieren, dass sie der zu (36) adjungierten Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ genügt, dass sie in einem willkürlichen Punkte ξ, τ unendlich wird wie $(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}$ und ausserdem geeignete Randbedingungen erfüllt.

Über den funktionentheoretischen Charakter der Lösungen geben folgende Sätze einigen Aufschluss:

In dem Probleme des Ringes und des beiderseits unendlich ausgedehnten Stabes ist, wie auch der Anfangszustand $F(x)$ zur Zeit $t = 0$ beschaffen sein möge, die Lösung der Differentialgleichung für $t > 0$ eine analytische Funktion sowohl von x wie von t.[115]) Dagegen ist dieses für $t = 0$ auch in solchen Stellen x nicht notwendig der Fall, wo der Anfangszustand selbst als analytische Funktion gegeben ist. Ein Beispiel dafür giebt *S. Kowalewski*[116]) [nämlich $F(x) = \frac{1}{1-x}$ bei $x = 0$]. Hiermit hängt die von *Lord Kelvin*[117]) und *P. Appell*[118])

---

112) l. c. chap. VIII.

113) *B. Minnigerode*, Diss., Göttingen, 1862; *E. Betti*, Soc. Ital. Mem. (3) 1 (1867), p. 165.

114) *A. Sommerfeld*, Math. Ann. 45 (1891), p. 265.

115) *K. Weierstrass*, Berl. Ber. 1885², p. 633 u. 789. S. auch *H. Poincaré*, Th. anal. de la propagation de la chaleur, Paris 1895, chap. 5.

116) J. f. Math. 80 (1875), p. 22.

117) Cambridge Math. J. 4, Febr. 1844 = Math. phys. pap. 1 (Cambridge 1882), Art. 11, p. 39.

118) J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Die Appell'schen Resultate sind auf den Fall zweier und dreier räumlicher Koordinaten von *E. Lacour*, Toul. Ann. 9 (1895), p. 1 und *A. Boulanger*, Bull. soc. math. 25 (1897), p. 11, ausgedehnt worden.

behandelte Frage zusammen, ob ein gegebener Temperaturzustand $F(x)$ als Folge eines früheren angesehen werden kann. Dies ist im Allgemeinen nicht möglich. Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung besagt, dass in diesem Fall $F(x)$ eine ganze transcendente Funktion von x sein muss. Verfolgt man irgend eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung der Zeit nach immer weiter rückwärts, so stösst man notwendig einmal auf eine Unendlichkeitsstelle, es sei denn, dass sich u auf eine Konstante reduziert.

Die den willkürlichen Funktionen in den oben genannten Problemen aufzuerlegenden Stetigkeitsbedingungen behandelt *A. Harnack*[119]).

Es ist vielfach[120]) bemerkt worden, dass, wenn man die Differentialgleichung durch Potenzreihen auflöst, in den Koëffizienten derselben zwei oder eine willkürliche (in diesem Falle natürlich analytisch zu wählende) Funktion auftreten, je nachdem man die Reihe nach Potenzen von x oder von t ordnet. Der Grund hiervon liegt in dem parabolischen Charakter der Differentialgleichung.

Das allgemeine Problem der Wärmeleitung, welches bei einem beliebigen dreidimensionalen räumlichen Gebiet R auftritt und welches auch als „Fourier'sches Problem" bezeichnet wird, ist folgendes: Gesucht wird diejenige Lösung u der Wärmeleitungsgleichung, welche für $t = 0$ im Innern von R in eine willkürlich vorgeschriebene Funktion des Ortes übergeht und für $t > 0$ auf der Oberfläche von R der Bedingungsgleichung der freien Ausstrahlung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ genügt.

Die von *Fourier* selbst (wenn auch zum Teil nicht in voller Allgemeinheit) behandelten Gebiete sind[121]) die Kugel, der Kreiscylinder, das rechtwinklige Parallelepipedon. Von *G. Lamé*[122]) wurden einige ebenflächig begrenzte Gebiete hinzugefügt, welche sich durch besondere geometrische Symmetrie auszeichnen.

Ganz allgemein fasst *H. Poincaré*[123]) das Fourier'sche Problem an. Seine Lösung gilt für ein beliebiges dreidimensionales (als endlich vorausgesetztes) Gebiet R und wird in den soeben genannten speziellen Fällen mit den von den älteren Autoren gefundenen Lösungen

---

119) Ztschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 91.

120) *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 13, p. 110; *Fourier*, l. c. art. 399; *P. du Bois-Reymond*, Beitr. p. 211; *Le Roux*, Darb. Bull. (2) 19, p. 127.

121) l. c. chap. V—VIII. Das Fourier'sche Verfahren lässt sich ohne erhebliche Schwierigkeit auf alle in Nr. 9 (Schluss) genannten Gebiete übertragen.

122) Théorie de la chaleur, Paris, 1861.

123) Amer. J. of math. 12 (1890), p. 211 = Th. anal. de la propagat. de la chaleur, Paris 1895, chap. 15 ff. und namentlich Pal. Rend. 8 (1894), p. 57.

identisch. Sie lehrt daher nicht nur die Existenz, sondern auch in jedem Falle die geeignetste Berechnungsweise der Lösung kennen.

Poincaré stützt sich auf die Existenz der ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ für das in Rede stehende Gebiet. Da diese einstweilen nur unter der besonderen Randbedingung $U = 0$ vollständig bewiesen ist (vgl. pag. 549), so ist auch die Poincaré'sche Lösung des Fourier'schen Problems nur in dem Falle lückenlos, wo als Randbedingung $u = 0$ vorgeschrieben, wo also in der allgemeineren Bedingung der freien Ausstrahlung h gleich ∞ genommen wird.

Es werde nun die im Innern des Gebietes vorgeschriebene Anfangstemperatur u_0 in eine Reihe nach den ausgezeichneten Lösungen $U_1, U_2, \ldots$ des Gebietes R entwickelt:

$$u_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots.$$

Die Koëffizienten bestimmen sich dabei durch die Formel

$$A_n = \int u_0 U_n d\tau.$$

Welche Voraussetzungen über die Funktion u_0 zu machen sind, damit die Möglichkeit und die Konvergenz dieser Entwickelung bewiesen werden kann, wird im folgenden Artikel erörtert werden.

Die Poincaré'sche Lösung des Fourier'schen Problems lautet dann einfach:

$$u = A_1 U_1 e^{-k_1^2 t} + A_2 U_2 e^{-k_2^2 t} + \cdots;$$

sie stellt ganz im Sinne *Fourier's* die gesamte Wärmebewegung als Überlagerung einer unendlichen Reihe von Partialbewegungen dar, deren jede wesentlich durch die geometrische Beschaffenheit des Gebietes bestimmt ist.

Von *Poincaré* weicht *Éd. Le Roy*[124]) in seiner schon mehrfach genannten Behandlung der Wärmeleitungsgleichung insofern ab, als er die Möglichkeit der Lösung direkt durch die Auskehrungsmethode beweist und die Entwickelung nach ausgezeichneten Lösungen nur zur Formulierung der Schlussresultate benutzt. Er umgeht auf diese Weise gewisse Schwierigkeiten des Poincaré'schen Verfahrens.

15. Schlussbemerkungen betr. die Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung und mehr als zwei unabhängigen Variabeln. Den ersten Schritt zur Kenntnis solcher Differentialgleichungen bildet die Übertragung des Charakteristikenbegriffes.

124) Ann. éc. norm. (3) 15 (1898), troisième partie, p. 107.

Die Differentialgleichnung sei

$$A_0\frac{\partial^p u}{\partial x^p}+A_1\frac{\partial^p u}{\partial x^{p-1}\partial y}+\cdots+A_p\frac{\partial^p u}{\partial y^p}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\frac{\partial^{p-1}u}{\partial y^{p-1}}\right).$$

Die Gleichung der Charakteristiken lautet dann nach *Monge*[125])

$$A_0dy^p-A_1dy^{p-1}dx+\cdots+(-1)^pA_pdx^p=0.$$

Durch jeden Punkt der x, y-Ebene gehen p reelle oder imaginäre, verschiedene oder teilweise zusammenfallende Charakteristiken. Dementsprechend wird man von einem *rein elliptischen Typus*, von einem *rein hyperbolischen* und *parabolischen Typus* sprechen, je nachdem *alle* p Charakteristiken imaginär, reell verschieden oder zusammenfallend sind. Ausserdem werden sich alle *möglichen Zwischentypen* ergeben.

Eine hyperbolisch-parabolische Gleichung ist z. B. die folgende:

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^n\partial y^m}=\sum A_{ik}\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\partial y^k}, \qquad \begin{matrix} n+m=p, \\ i=1,2,\ldots,p-1, \\ k=1,2,\ldots,p-i-1. \end{matrix} \tag{38}$$

Ihre p Charakteristiken sind sämtlich reell; n derselben fallen in die x-, m in die y-Richtung. Auf diese Gleichung dehnt *Ét. Delassus*[126]) die Riemann'sche Integrationsmethode der hyperbolischen Differentialgleichungen (s. Nr. 3) aus. Die Green'sche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$, auf deren Berechnung die Lösung von (38) bei vorgeschriebenen Werten von u, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\cdots\frac{\partial u^{p-1}}{\partial n^{p-1}}$ längs eines beliebigen, keine Charakteristik berührenden Kurvenstückes zurückgeführt werden kann, genügt den folgenden Bedingungen: Sie ist eine Lösung der zu (38) adjungierten Gleichung und sie befriedigt längs der Charakteristik $x=\xi$ bez. $y=\eta$ n bez. m Bedingungsgleichungen zwischen den Werten der Funktion und ihren $p-1$ ersten Differentialquotienten. Der Vertauschungssatz von p. 519 tritt auch hier in Kraft. Die Existenz der Green'schen Funktion folgt aus ihrer Darstellung durch successive Approximationen.

Über den funktionentheoretischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen mit lauter reellen Charakteristiken wurde schon p. 537 im Anschluss an die Arbeiten von *Ét. Delassus* und *J. Le Roux* berichtet.

---

125) Appl. § XXI, 5.

126) Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), Suppl. Vgl. auch Par. C. R. 117 (1893), p. 510.

Den anderen äussersten Fall bilden die Differentialgleichungen mit lauter imaginären Charakteristiken, welche selbstverständlich von gerader Ordnung sein müssen. Eine allgemeine Theorie derselben steht noch gänzlich aus (vgl. indessen ein p. 534 genanntes Resultat von *E. Picard*). Nur einige spezielle Fragen bei speziellen Gleichungen dieser Art sind hier zu erwähnen.

Als einfachste Gleichung höherer Ordnung bietet sich $\Delta\Delta u = 0$ oder allgemeiner $(\Delta)^n u = 0$ dar. Erstere Gleichung tritt zuerst bei *E. Mathieu*[127]) im Anschluss an ein Problem der Elastizitätstheorie auf. Eine Darstellung derjenigen Funktionen, welche dem Newtonschen Potentiale $1/r$ entsprechen, giebt *A. Gutzmer*[128]). *T. Levi-Cività*[129]) behandelt die Transformationen der Gleichung in sich (Inversion der unabhängigen, verbunden mit einer multiplikativen Änderung der abhängigen Variabeln) und führt die Randwertaufgabe für ein beliebiges Gebiet auf unendliche Determinanten (I A 3, Nr. 58) zurück[132]). Hieran schliessen an *V. Volterra*[129a]), *E. Almansi*[129b]) und *T. Boggio*[129c]). Den Satz über die Vertauschbarkeit von Pol und Aufpunkt bei den Green'schen Funktionen dieser Gleichung beweist *T. Boggio*[130]).

Einige Randwertaufgaben für spezielle Gebiete (Kreis, Kreisring etc.) lösen *G. Lauricella*[131]), *F. d'Arcais*[132]), *E. Almansi*[132]), *T. Levi-Cività*[132]), *V. Volterra*[132]).

In allen behandelten Fällen zeigt es sich, dass man bei der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ auf der Grenze eines geschlossenen Gebietes u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ willkürlich vorschreiben kann. Dasselbe wird im allgemeinen von einer beliebigen Differentialgleichung vierter Ordnung von durchaus elliptischem Typus gelten. Ebenso kann man bei der Gleichung $\Delta^n u = 0$ sowie aller Voraussicht nach bei einer beliebigen durchaus elliptischen Differentialgleichung der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ausser u die $n - 1$ ersten normalen Ableitungen auf der Begrenzung des Gebietes im allgemeinen willkürlich wählen und alsdann eine im Innern des Gebietes eindeutige und stetige Lösung finden, welche

127) J. de math. (2) 14 (1869).
128) J. de math. (4) 6 (1890), p. 405 und Diss. Halle 1893.
129) Ven. Atti (7) 9 (1897—98), p. 1399.
129a) Ven. Atti 57 (1899).
129b) Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 1.
129c) Ven. Atti 59 (1900), p. 497.
130) Tor. Atti 35 (1900).
131) Tor. Atti 31 (1896), p. 1010.
132) Ibid. 33 (1898), passim.

auf der Begrenzung den vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Durch den Zusatz „im allgemeinen“ soll dabei angedeutet werden, dass es (vgl. Nr. **10**) unter Umständen gewisse kritische Gebiete geben wird, für welche die allgemeine Regel für die Möglichkeit der angegebenen Randwertaufgabe eine Ausnahme erleidet.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung von elliptischem Typus mit konstanten Koeffizienten wird von *C. Somigliana*[133]) untersucht. Dieselbe lässt sich durch lineare Transformation der unabhängigen Variabeln stets in die Form setzen:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6m \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Ein spezielles Integral dieser Gleichung, welches mit einer logarithmischen Unstetigkeit behaftet ist, ermöglicht die Darstellung einer beliebigen stetigen Lösung für ein gegebenes Gebiet durch ein Randintegral im Sinne der Gleichung (9).

Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Variabeln sind in der mathematischen Physik die Regel; insofern in diesen die höchsten Differentialquotienten in der Verbindung des zweiten Differentialparameters Δu vorkommen, sind sie denselben Methoden zugänglich, wie die Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln (vgl. p. 528 und p. 548). Allgemein wird man bei drei unabhängigen Variabeln statt der Charakteristiken oder „charakteristischen Linien“ „charakteristische Flächen“ haben, welche z. B. bei der linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung:

$$\sum A_{ijk} \frac{\partial^{i+j+k} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = 0 \qquad (i + j + k \leqq p)$$

gegeben sind durch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\sum A_{ijk} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^j \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^k = 0$$

und die Gleichung haben $F(x, y, z) = \text{const.}$

Diese Flächen können wieder reell oder imaginär sein und man kann dementsprechend Gleichungen vom elliptischen, hyperbolischen oder allgemeiner vom elliptisch-hyperbolischen Typus unterscheiden.

Ein Gegensatz zu dem Falle zweier unabhängiger Variabler rührt davon her, dass die Charakteristikengleichung im allgemeinen nicht mehr in Linearfaktoren zerlegbar sein wird, sodass man im allgemeinen garnicht von n unterschiedenen Scharen von Charakteristikenflächen

133) Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 59. Entsprechende Ausführungen desselben Verf. für eine elliptische Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten finden sich l. c. 22 (1894), p. 143, § 2.

sprechen kann. Mit denjenigen besonderen Gleichungen, wo diese Zerlegung möglich und im Reellen möglich ist, beschäftigt sich *Ét. Delassus*[12]). Zu derselben Kategorie gehören diejenigen Gleichungen, auf welche *L. Bianchi*[134]) und in allgemeinster Weise *O. Niccoletti*[135]) die Riemann'sche Integrationsmethode ausdehnen und für welche sie die Möglichkeit der p. 512 aufgeführten, entsprechend modifizierten Randwertaufgaben beweisen.

Nicht zerlegbar ist die Charakteristikengleichung z. B. im Falle der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, welche von *V. Volterra*[136]) hinsichtlich ihrer Charakteristikeneigenschaften studiert ist. Werden x, y und t als räumliche rechtwinklige Koordinaten gedeutet, so sind die Charakteristikenflächen Rotationskegel von dem Öffnungswinkel $2 \operatorname{arc\,tg} a$ mit einer der t-Richtung parallelen Achse. Die Bedeutung derselben für die Integration der Differentialgleichung ergiebt sich z. B. aus folgendem Satze, dessen Analogon für zwei unabhängige Variable p. 512 ausgesprochen ist: Wenn auf einem Flächenstücke σ des Raumes (x, y, t) die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ willkürlich gegeben sind, so lässt sich der Wert von u in jedem Punkte x, y, t bestimmen, welcher zur Spitze eines Charakteristikenkegels genommen werden kann, der aus σ ein durch den Kegel vollständig begrenztes Gebiet ausschneidet.

134) Linc. Rend. (5) 4^1 (1895), p. 1.
135) Nap. Atti (2^8) 8 (1895), Nr. 2.
136) Acta math. 18 (1894), p. 161.

(Abgeschlossen im April 1900.)

Nachtrag. Der Existenzbeweis für die p. 515 postulierte Lösung $v = U \log r + V$ bei einer beliebigen linearen Differentialgleichung von elliptischem Typus mit analytischen Koeffizienten ist dem Ref. inzwischen von *D. Hilbert* mitgeteilt worden. Die Funktionen U und V werden dabei als Potenzreihen in x und y dargestellt, U genügt der homogenen Gleichung $M(U) = 0$ (s. p. 515), V derselben Gleichung mit geeignetem zweiten Gliede. Näheres s. bei *E. R. Hedrick*, Diss. Göttingen 1901. Der p. 534 oben angegebene Weg zum Nachweis des analytischen Charakters der Lösungen einer linearen elliptischen Differentialgleichung ist hiernach allgemein gangbar. Auch die Existenz der p. 516 postulierten Green'schen Funktionen ist, die Lösbarkeit der gewöhnlichen Randwertaufgabe vorausgesetzt, erwiesen.

II A 8. VARIATIONSRECHNUNG

VON

ADOLF KNESER

IN BERLIN.

Inhaltsübersicht.

Ständige Bezeichnungen:

$$J_n = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx, \qquad U_n = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx;$$

für U_n ist m die Anzahl der Bedingungsdifferentialgleichungen.

1. Begriff der Variationsrechnung.
2. Infinitesimalbetrachtungen von *Euler*.
3. Einführung des Zeichens δ durch *Lagrange*.
4. Allgemeine Variationsformel von *Euler*; reine und gemischte Variationen.
5. Spezielle Variation durch Änderung eines Parameters.
6. Notwendige Bedingung für $\delta J_n = 0$.
7. Theorie der Integrabilität.
8. *Euler*'s Multiplikatormethode für $\delta U_2 = 0$, $m = 1$.
9. Der Multiplikator bei isoperimetrischen Aufgaben.
10. Die Multiplikatoren und notwendige Bedingungen für $\delta U_n = 0$.
11. Formale Entwicklungen; *Jacobi-Hamilton*'sche Methode.
12. Zweite Variation von J_1 nach *Legendre*.
13. Transformation von $\delta^2 J_n$ nach *Jacobi*.
14. Beweis der formalen Sätze von *Jacobi* durch *Hesse* und *Frobenius*.
15. Transformation von $\delta^2 U_n$ nach *Spitzer, Clebsch, Mayer, Lipschitz*.
16. Das Vorzeichen von $\delta^2 U_n$ nach *Mayer*; konjugierte Punkte.
17. Die auf konjugierte Punkte bezügliche notwendige Bedingung des Extremums von J_1 nach *Erdmann*.
18. *Scheeffer*'s neue Methode; Ausdehnung des Satzes von *Erdmann*.
19. Kritische Untersuchungen; Begriff der Variation.
20. Hinreichende Bedingungen des Extremums von J_1 nach *Scheeffer*.
21. Hinreichende Bedingungen nach *Weierstrass*; das isoperimetrische Problem im engeren Sinne.
22. Höhere Variationen; hinreichende Bedingungen bei variablen Grenzen.
23. *Steiner*'s Sätze über Figuren extremen Flächeninhalts; diskontinuierliche Lösungen.
24. Mehrfache Integrale; Transformation der ersten Variation.
25. Zweite Variation und hinreichende Bedingungen des Extremums von Doppelintegralen.
26. Übersicht der Beispiele und Anwendungen.

Lehrbücher.

L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausanne und Genf 1744. Teilweise übersetzt von *P. Stäckel*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 46, Leipzig 1894.

J. H. Jellett, An elementary treatise on the calculus of variations. Dublin 1850, deutsch von *C. H. Schnuse*, Braunschweig 1860.

L. Stegmann, Lehrbuch der Variationsrechnung und ihrer Anwendung bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum, Cassel 1854.

F. Moigno, *L. Lindelöf*, Leçons sur le calcul différentiel et intégral, 4, Calcul des variations, Paris 1861.

J. Dienger, Grundriss der Variationsrechnung, Braunschweig 1867.

Carll, A treatise on the calculus of variations, New York und London 1885.

J. Sabinin, Kursus der Variationsrechnung (russisch), Moskau 1893.

E. Pascal, Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite, Mailand 1897. (Hauptsächlich referierend, mit reichhaltigen Litteraturangaben.) Übersetzung Leipzig 1899.

A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900. Der Inhalt dieses Werkes ist im folgenden nicht berücksichtigt.

Unter den Lehrbüchern der Analysis, welche die Variationsrechnung behandeln, seien die von *Sturm* (2), *Serret* (2), *Jordan* (3) hervorgehoben; vgl. ferner Encyclopaedia britannica, Art. Infinitesimal calculus. Ältere hier nicht erwähnte Lehrbücher citieren *Pascal* und *Todhunter* (s. u.).

Geschichte: *F. Giesel*, Geschichte der Variationsrechnung (erster Theil), Torgau 1857 (bis zu *Lagrange*).

J. Todhunter, A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century, Cambridge und London 1861. (Ausführliche Referate der wichtigsten Arbeiten bis zu *Hesse*.)

G. Eneström, Framställning af striden om isoperimetriska problemet, Upsala 1876 (Upsala universitets Arsskrift).

P. Stäckel, Anmerkungen zu Übersetzungen in Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften, Nr. 46, 47, Leipzig 1894.

M. Cantor, Geschichte der Mathematik, 3, Leipzig 1899.

---

1. Begriff der Variationsrechnung. Während die Differentialrechnung auf die Änderungen einer Grösse achtet, welche durch kleine Wertänderungen einzelner sie bestimmender Variabeln hervorgerufen werden, ist die Variationsrechnung die Lehre von den Änderungen solcher Grössen, deren Wert von veränderlichen funktionalen Verhältnissen abhängt, bei kleinen Abänderungen dieser Verhältnisse, und die hierdurch bestimmten Inkremente der abhängigen Grösse heissen *Variationen*. Unter einer kleinen Abänderung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen irgend welchen Veränderlichen verstehen wir die Herstellung eines neuen Zusammenhangs von der Be-

schaffenheit, dass jedem bei der ursprünglichen Abhängigkeit möglichen Wertsystem ein bei der neuen mögliches, welches von jenem nur wenig abweicht, entspricht, und dass dieses Entsprechen eindeutig umkehrbar ist. Für entsprechende Wertsysteme werden die entsprechend gebildeten Differentialquotienten der Veränderlichen bis zu einer gewissen Ordnung hinauf in beiden funktionalen Verhältnissen nur wenig von einander abweichen; wie gross jene Ordnung ist, ist Sache der Definition, sodass verschiedene Festsetzungen hierüber dem Begriff der Variation verschiedenen Inhalt geben. (Nr. **19**).

Die hauptsächlichste Anwendung der Variationsrechnung, welche bisweilen geradezu als ihr Gegenstand bezeichnet wird, ist die Lösung der Aufgabe, eine Grösse, deren Werth von veränderlichen funktionalen Verhältnissen abhängt, durch bestimmte Verfügung über diese zu einem Extremum, d. h. zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

2. Infinitesimalbetrachtungen von Euler. Eine allgemeine Methode zur Behandlung derartiger Extremumsaufgaben giebt *L. Euler* in seinem grundlegenden Werke, nachdem von *J. Newton*, *Joh. I. Bernoulli*, *Jac. I. Bernoulli* und *Euler* selbst einzelne hierher gehörige Probleme gelöst waren. Soll das Integral

$$J_n = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx,$$

in welchem a und b gegeben, f eine bekannte Funktion seiner Argumente und y eine unbekannte Funktion von x ist, durch passende Wahl von y ein Extremum werden, so bildet *Euler*[1]) eine spezielle Variation von y, indem er y für einen bestimmten Wert von x durch $y + \varepsilon$, gleichzeitig das Integral J und die Ableitungen $y^{(\nu)}$ durch die endliche Summe und die Differenzquotienten, deren Grenzwerte sie sind, ersetzt. Er erhält dann als Zuwachs des Integrals J_n:

$$\varepsilon \Delta x \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots \right\} = \varepsilon \Delta x \cdot M,$$

wobei Δx die konstante Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte von x bei der Bildung der bezeichneten Annäherungswerte bedeutet. *Euler* schliesst hieraus, dass die Differentialgleichung $M = 0$ eine notwendige Bedingung für das Extremum des Integrals J_n ist. Die Schwäche seiner Argumentation liegt in der Vertauschung der Grenzübergänge $\lim \varepsilon = 0$ und $\lim \Delta x = 0$.

---

1) Meth. inv. Kap. 1, § 53, p. 26; Kap. 2, § 56, p. 71.

3. Einführung des Zeichens δ durch Lagrange. *J. L. Lagrange*[2]) betrachtet zuerst Variationen von allgemeiner Natur. Es sei Z irgend eine Grösse, welche aus $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, \ldots$ in gegebener Weise zusammengesetzt ist, wobei *Lagrange* implicite annimmt, dass zwischen x, y, z zwei endliche Gleichungen bestehen, also eine einfache Mannigfaltigkeit von Werthsystemen (x, y, z) vorliegt; den Fortgang längs dieser bezeichnen die Differentiale d. Wird dieselbe unendlich wenig abgeändert, so erhalte Z den Zuwachs δZ. *Lagrange* setzt als leicht ersichtlich die Gleichungen

$$d\delta Z = \delta dZ, \quad \delta \int Z = \int \delta Z \tag{1}$$

an; aus ihnen folgt, wenn u irgend eine in Z vorkommende Grösse ist,

$$\int Z d\delta u = Z\delta u - \int \delta u \cdot dZ, \tag{2}$$

sodass man jede unter dem Integralzeichen auftretende Variation eines Differentials durch partielle Integration wegschaffen und speziell setzen kann

$$\delta \int Z = M + \int (P\delta x + Q\delta y + R\delta z);$$

dabei hängt M nur von den Werten der Variationen und ihrer Differentiale an den Integrationsgrenzen ab, P, Q, R aber enthalten keine Variationen und sind der Identität

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{3}$$

unterworfen[3]). Soll nun $\int Z$ durch passende Bestimmung des Zusammenhangs zwischen x, y, z zu einem Extremum werden, so schliesst *Lagrange* aus der Unabhängigkeit der Variationen von x, y, z, dass die Gleichungen

$$M = 0, \quad P = Q = R = 0$$

bestehen müssen, von denen die letzten drei sich nach (3) auf zwei Differentialgleichungen reduzieren, welche y und z als Funktionen von x bestimmen, während die erste Gleichung eine Beschränkung für die Werte der x, y, z und ihrer Differentiale an den Integrationsgrenzen ausdrückt.

Lagrange hat in seiner zweiten Abhandlung[4]) diese Betrachtungen

2) Misc. Taur. 2^3, p. 173 (1762). Oeuvres 1, p. 335. Übers. von *Stäckel*, Ostwald's Klass. Nr. 47. Zeitlich geht vorher eine briefliche Mitteilung an *Euler*, s. *Cantor*, Zeitschr. Math. Phys. (2) 23, Hist.-lit. Abt. p. 1. *Lagrange*, Oeuvres 14.

3) Oeuvres 1, p. 347.

4) Misc. Taur. 4^2 (1771), p. 163. Oeuvres 2, p. 37. Übers. von *Stäckel* a. a. O.

auf den Fall einer einfachen Mannigfaltigkeit im Gebiet beliebig vieler Variablen ausgedehnt und dabei zugelassen, dass der Integrand auch von den Integrationsgrenzen abhänge, und für die Grenzwerte der Variablen und ihrer Differentiale irgend welche Relationen vorgeschrieben sind.

4. Allgemeine Variationsformel von Euler; reine und gemischte Variationen. *Euler* hebt im Anschluss an die Arbeiten von *Lagrange* hervor[5]), dass wenn eine Kurve als Variation der andern betrachtet werden soll, beide punktweise eindeutig auf einander bezogen werden müssen. Die erste Formel (I) leitet er dann aus der Betrachtung ab, dass wenn Z und $Z + dZ$ die Werte von Z in zwei benachbarten Punkten A und B der ursprünglichen Kurve sind, in den entsprechenden Punkten A' und B' der variierten Kurve die variierten Grössen $Z + \delta Z$, $Z + dZ + \delta(Z + dZ)$ erhalten werden. Andrerseits vermehrt der direkte Übergang von A' zu B' die Grösse $Z + \delta Z$ um ihr Differential, sodass

$$Z + dZ + \delta(Z + dZ) = Z + \delta Z + d(Z + \delta Z)$$

und damit die erste Gleichung (1) resultiert; die zweite folgt aus dem Begriff der Variation sofort[6]). Aus diesen Grundeigenschaften der Variation schliesst *Euler*:

$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx} - y'\frac{d\delta x}{dx}, \qquad \delta y'' = \frac{d\delta y'}{dx} - y''\frac{d\delta x}{dx}, \cdots$$

und, wenn

$$\omega = \delta y - y'\delta x, \quad w = \delta z - z'\delta x$$

gesetzt wird,

$$\delta y^{(\nu)} - y^{(\nu+1)}\delta x = \omega^{(\nu)}, \quad \delta z^{(\nu)} - z^{(\nu+1)}\delta x = w^{(\nu)}.$$

Ist ferner f irgend eine Funktion von $x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots$, so ergiebt sich durch partielle Integration nach Formel (2):

$$(4) \quad \delta\int_a^b f\,dx = \int_a^b (M\omega + Nw)dx + \Big[f\delta x + \sum_{\nu=0,1,\ldots}(R_\nu\omega^{(\nu)} + S_\nu w^{(\nu)})\Big]_a^b,$$

wobei

$$M = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots,$$

$$R_\nu = \frac{\partial f}{\partial y^{(\nu+1)}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{(\nu+2)}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^{(\nu+3)}} - \cdots$$

5) Inst. cal. integralis (ed. II, Petrop. 1793), 3, Appendix § 13, 14, p. 387; § 42, p. 399.

6) A. a. O. § 37, 75, p. 397, 416.

7) A. a. O. § 86, p. 423.

gesetzt ist, und N, S, aus diesen Ausdrücken hervorgehen, indem man y durch z ersetzt. *S. Poisson*[8]) fügt auf der rechten Seite der Gleichung (4), einen Gedanken von *Lagrange* (Nr. **3**) aufnehmend, die Glieder

$$\delta a \int_a^b \frac{\partial f}{\partial a}\, dx + \delta b \int_a^b \frac{\partial f}{\partial b}\, dx$$

hinzu. Die Verallgemeinerung für den Fall beliebig vieler unbekannter Funktionen von x liegt auf der Hand.

Die Grösse ω ist, wie *Poisson*[9]) bemerkt, der Zuwachs, den y erfährt, wenn man mit konstantem x von der ursprünglichen zur variierten Kurve übergeht; sie wird bisweilen[10]) als „reine" Variation von der „gemischten" δy, bei welcher x zugleich variiert, unterschieden. Variiert man also so, dass $\delta x = 0$, so hat man $\omega = \delta y$ und

$$\delta y' = \frac{d\,\delta y}{dx},$$

d. h. das Zeichen der Variation ist mit dem des Differentialquotienten vertauschbar, wenn die Variable, nach der man differenziert, unvariiert bleibt. Im folgenden bis Nr. **20** einschliesslich ist nur von „reinen" Variationen die Rede.

5. Spezielle Variation durch Änderung eines Parameters. In einer den oben erwähnten nachfolgenden Abhandlung[11]) hat *Euler* die Variation nicht als neuen Begriff dem Differential zur Seite gestellt, sondern als Spezialfall des letzteren zu begreifen gesucht, indem er annimmt, dass der Übergang von einer Kurve zu einer benachbarten bewirkt wird durch Änderung eines Parameters t, der in die Gleichung der Kurve eingeht; entspricht diese dem Wert $t = t_0$, so setzt *Euler*

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=t_0} dt,$$

und erreicht hierdurch, dass die formalen Grundeigenschaften des Zeichens δ sofort als bekannte Eigenschaften des Differentials erscheinen. Dass hiermit der Begriff der Variation spezialisiert wird, hat *Euler* gewusst[12]); diese Spezialisierung ist unschädlich, solange es sich um Herleitung notwendiger Bedingungen des Extremums

8) Par. Mém. 12 (1832), p. 236.
9) Fussn. 8 p. 241.
10) *Stegmann* § 56, p. 281.
11) Petrop. N. Comm. 16 (1772), p. 35; Inst. calc. int. 4, suppl. XI.
12) Petrop. N. Comm. 10 (1766), p. 55.

handelt, hat aber vielfach mangelhafte Schlussweisen verschuldet, wo man sie bei der Herleitung hinreichender Bedingungen festhielt (Nr. 19). *Lagrange* benützt dieselbe in der Funktionsrechnung[13]) durchgehends und so ist sie in die Mehrzahl der späteren Lehrbücher übergegangen. In der Theorie der analytischen Funktionen[14]), wo er sich mit hinreichenden Bedingungen beschäftigt (Nr. 12), arbeitet *Lagrange* dagegen mit dem allgemeinen Begriff der Variation.

6. Notwendige Bedingung für $\delta J_n = 0$. Variiert man so, dass an den Grenzen die Grösse δy nebst einer angemessenen Anzahl ihrer Ableitungen verschwindet, so folgt aus der Formel (4) die speziellere:

$$\delta J_n = \int_a^b M \delta y \, dx,$$

aus welcher als notwendige Bedingung des Extremums (vgl. Nr. 2) die Gleichung

$$M = 0 \tag{5}$$

folgt. Eine genauere Begründung dieses Schlusses beginnt *Lagrange*[15]), indem er y in J_n durch $y + \varepsilon u$ ersetzt, und ε eine kleine Konstante, u eine Funktion von x sein lässt; die erste Variation ist dann der Inbegriff der in ε linearen Glieder, wenn man nach Potenzen von ε entwickelt. Der Zuwachs von J_n kann daher positiv und negativ, J_n also kein Extremum sein, wenn nicht δJ_n verschwindet. Dass hieraus bei der für δy vorliegenden Willkürlichkeit auf (5) geschlossen werden kann, ist oft, z. B. noch von *Moigno-Lindelöf*, als selbstverständlich angesehen. Eine formale Ableitung dieses Resultats versucht schon *Lagrange*[15]). Einen im Grunde ausreichenden Beweis giebt *Stegemann*[16]); für den Fall, dass M im ganzen Integrationsintervall nicht verschwindet, setzt er:

$$\delta y = \frac{(x-a)^\mu (b-x)^\nu}{M} \varepsilon,$$

wodurch bei passender Wahl der Exponenten eine genügende Anzahl der Grössen δy, $\delta y'$, ... an den Grenzen zum Verschwinden gebracht werden und δJ_n von Null verschieden wird. Hieraus folgt, dass M auch in keinem Teil des Intervalls $a \ldots b$ von Null verschieden sein kann. Ähnlich sind die demselben Zweck dienenden Betrachtungen

13) Oeuvres 10, p. 399.
14) Oeuvres 9, p. 301.
15) Oeuvres 9, p. 298.
16) Lehrbuch § 24, p. 90.

von *E. Heine*[17]) und *P. du Bois-Reymond*[18]), welche hervorheben, dass M als stetige Funktion von x vorausgesetzt werden muss. Auf Anregung von *Weierstrass* setzt *Zermelo*[19]), wenn M nur für $x = x_0$ nicht verschwindet und $a < x_0 < b$ ist,

$$\delta y = \varepsilon (x - a)^m (b - x)^m e^{-\varrho^2 (x - x_0)};$$

nimmt man ϱ hinreichend gross, so überwiegt der von der Umgebung des Wertes x_0 zu dem Integral δJ_n gelieferte Beitrag alles übrige und macht δJ_n von Null verschieden. — Bei mehreren, z. B. zwei unbekannten Funktionen erhält man ebenso statt der Gleichung (5) das System

$$M = 0, \quad N = 0$$

als notwendige Bedingungen des Extremums.

Als weitere notwendige Bedingung ergiebt die Formel (4) sodann, dass die Summe der vor das Integralzeichen tretenden Glieder verschwinden muss für alle mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Grenzwerte der Variationen. Diese werden im allgemeinen durch gewisse Gleichungen aneinander gebunden sein, welche man nach *Lagrange*[20]) ähnlich wie bei den Problemen des gewöhnlichen relativen Extremums (II A 2, Nr. 22) in Rechnung ziehen kann.

7. Theorie der Integrabilität. Aus der Formel (4) für den Fall einer einzigen variierbaren Funktion schliesst *Euler*[21]), dass das Bestehen der Identität $M = 0$ die hinreichende und notwendige Bedingung für die Integrabilität der Funktion f, d. h. dafür ist, dass bei einer willkürlichen Funktion y eine mit f durch die Gleichung

$$\frac{dF}{dx} = f(x, y, \ldots)$$

verbundene Funktion $F(x, y, y', \ldots)$ existiert.

J. Bertrand[22]) hat die Erwägungen *Euler*'s näher ausgeführt und auf den Fall mehrerer Funktionen ausgedehnt. Die meisten mit dieser Theorie der Integrabilität beschäftigten Autoren, *Lagrange*[23]), *Poisson*[24]) u. a. bestreben sich, die Variationsrechnung zu eliminieren,

17) Math. Ann. 2 (1870), p. 188.
18) Math. Ann. 15 (1879), p. 297, 305.
19) Untersuchungen zur Variationsrechnung, Diss. Berlin 1894, p. 41.
20) Oeuvres 10, p. 422.
21) Meth. inv. Kap. I, § 34, p. 15; Petrop. N. Comm. 10, p. 134.
22) J. éc. polyt. 17, cah. 28 (1841), p. 249.
23) Oeuvres 9, p. 317; 10, p. 364.
24) Par. Mém. 12, p. 261.

sodass es hier genügt, auf die eingehende historische Darstellung von *J. Todhunter*[25]) zu verweisen.

8. Euler's Multiplikatormethode für $\delta U_2 = 0$, $m = 1$. Im dritten Buche der Methodus inveniendi[26]) behandelt *Euler*, allmählich zu allgemeineren Fragen fortschreitend, schliesslich die Aufgabe, das Extremum des Integrals

$$W = \int_a^b f(x, v, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

zu bestimmen, wenn v durch eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$v' - g(x, v, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

gegeben ist. Durch eine höchst scharfsinnige Infinitesimalbetrachtung von der in Nr. 2 geschilderten Art gelangt er zur Methode des Multiplikators, d. h. er zeigt, dass die Grösse W, wenn λ diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{d\lambda}{dx} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{7}$$

ist, welche für $x = b$ verschwindet, und y an einer einzigen Stelle um ε wächst, den Zuwachs

$$P\varepsilon = \varepsilon \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y^{(n)}} \right) \right\}$$

erhält, sodass als notwendige Bedingung des Extremums folgt $P = 0$.

Dies Resultat beweist man leicht mittelst des Zeichens δ; *Lagrange* hat es in seiner ersten Arbeit[27]) für zwei nach verschiedenen Richtungen spezialisierte Fälle obiger Aufgabe gethan; *Euler* giebt sodann[28]) für das allgemeine Integral W bei der Annahme (6) die Transformation

$$\delta W = \int_a^b dx \delta (f + \lambda(g - v')) = \int_a^b P \delta y\, dx + \Big[R - \lambda \delta v \Big]_a^b, \tag{8}$$

wobei R nur von δy und den Ableitungen dieser Grösse abhängt. Wenn diese Grössen an den Grenzen und δv für $x = a$ verschwinden, so ergiebt die Gleichung

$$\lambda(b) = 0, \tag{9}$$

25) History p. 505.
26) Kap. III, § 6, 19, 31, 38, p. 118; Kap. IV, § 7, Nr. IV, V p. 133
27) Oeuvres 1, p. 347, 350; 10, p. 419.
28) Petrop. N. Comm. 10, p. 79.

dass δW sich auf das Integral allein reduziert; hieraus folgt $P = 0$, da für δy ausser den angegebenen keine weiteren Beschränkungen nötig sind. Dabei ist δv für $x = b$ im allgemeinen von Null verschieden; nur wo dies durch die Bedingungen der Aufgabe zugelassen wird, kann *Euler*'s Ableitung als streng gelten, z. B. für die von ihm gelöste Aufgabe der Brachistochrone im widerstehenden Mittel[29]). — Die Gleichung (9) für den bezeichneten Fall dürfte der Kern eines im allgemeinen unrichtigen Satzes von *C. Delaunay*[30]) sein.

In dem speziellen Falle $f = g$, den auch *Lagrange* behandelt, löst die *Euler*'sche Methode die Aufgabe, y so zu bestimmen, dass eine für $x = a$ gegebene Lösung der Differentialgleichung (7) für $x = b$ einen extremen Wert annimmt. Diese sehr allgemeine Art von Aufgaben, auf welche *Euler*[31]) und *Lagrange*[32]) mehrfach hinweisen, ist von *A. Mayer*[33]) auf Differentialgleichungen gebracht (s. Nr. **15**). *Euler* giebt als Beispiel die Bestimmung der Kurve, auf welcher ein mit Reibung fallender Punkt die grösste Geschwindigkeit erreicht[34]).

Lagrange dehnt in seiner zweiten Abhandlung[35]) die angedeutete Methode auf den Fall aus, dass höhere Ableitungen von v in f und g vorkommen, hat aber sonst die Theorie des Multiplikators, so vielfach er ihn, besonders in der Mechanik benutzt hat, nicht weiter gefördert. Die isoperimetrischen Aufgaben glaubte er durch obige Betrachtungen der Multiplikatorenmethode zugänglich gemacht zu haben, während *Euler* für die besondere Natur dieser Aufgaben ein gewisses Gefühl gehabt zu haben scheint (s. u.). Nach allem erscheint es nicht gerechtfertigt, die Multiplikatorenmethode nach *Lagrange* allein zu benennen.

9. Der Multiplikator bei isoperimetrischen Aufgaben. Isoperimetrisch im weiteren Sinne nennt man die Aufgabe, J_n zu einem Extremum zu machen, wenn für ein anderes Integral

$$K_n = \int_a^b g(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

ein fester Wert vorgeschrieben ist oder mehrere solcher Bedingungen

29) Meth. inv. Kap. III, § 46, p. 126.

30) J. éc. polyt. 17, cah. 29 (1843), p. 85.

31) Meth. inv. Kap. I, § 37, p. 17; Kap. IV, § 7, p. 133.

32) Oeuvres 1, p. 350.

33) Leipz. Ber. 30 (1878), p. 16. S. a. *Jermakoff*, Kiew Univ.-Nachr. 29, Dez. 1889, p. 105.

34) Meth. inv. p. 122.

35) Oeuvres 2, p. 40.

gegeben sind; ist speziell J_n ein Bogen-, K_n ein Flächenintegral oder umgekehrt, so hat man das isoperimetrische Problem im eigentlichen, engern Sinne. Eine notwendige Bedingung für ein solches begrenztes Extremum erhält man nach *Euler*, indem man

$$\delta J_n + \lambda \delta K_n = 0 \tag{10}$$

setzt, wobei λ eine gewisse Konstante bedeutet. Er beweist dies[36]), indem er nach der in Nr. 2 skizzierten Weise zwei aufeinanderfolgende Ordinaten y um ε und η vermehrt.

Ein anderer Beweis von *Euler* besteht darin[37]), dass er δJ_n und δK_n als lineare Formen der verschiedenen Werte von δy ansieht, und davon ausgeht, dass lineare Formen sich um einen konstanten Faktor unterscheiden, wenn das Verschwinden der einen stets die andere zum Verschwinden bringt. Ist nach partieller Integration

$$\delta J_n = \int_a^b M \delta y \, dx, \quad \delta K_n = \int_a^b M_1 \delta y \, dx,$$

so ergiebt sich, dass $M : M_1$ konstant sein, d. h. die Gleichung (10) bei passender Wahl von λ für willkürliche Variationen bestehen muss.

Einen strengeren Beweis hat *J. Bertrand*[38]) gegeben. Derselbe ist dem ersten *Euler*'schen Beweise verwandt und unterscheidet sich von ihm hauptsächlich dadurch, dass y an zwei beliebigen nicht benachbarten Stellen so variiert wird, dass δK_n verschwindet. Einen andern Beweis giebt *C. Sturm* in seinen Vorlesungen[39]); indem er $M_1 \delta y = \varphi'(x)$ ansetzt und unter φ irgend eine an den Integrationsgrenzen verschwindende Funktion versteht, bewirkt er, dass δK_n verschwindet und nach partieller Integration

$$\delta J_n = -\int_a^b \varphi(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{M_1}\right) dx$$

wird, woraus sich (10) ergiebt. *P. du Bois-Reymond*[40]) giebt auf Anregung von *Reiff* einen Beweis, der dem *Bertrand*'schen nahe verwandt ist; ein zweiter Beweis geht von folgendem Gedanken aus. Sind $\delta_1 y$ und $\delta_2 y$ irgend zwei Variationen, die nebst einer angemessenen Anzahl ihrer Ableitungen an den Grenzen verschwinden,

36) Meth. inv. Kap. V, § 27, p. 184.

37) Petrop. N. Comm. 10, p. 89.

38) J. de math. (1) 7 (1842), p. 55.

39) Cours d'analyse publ. p. Prouhet (5. éd., 1877), 2, p. 330. S. a. *Serret-Harnack*, Diff.- u. Int.-Rechn. 2^2, p. 359.

40) Math. Ann. 15 (1879), p. 310.

$\delta_v J_n$, $\delta_v K_n$ die der Variation $\delta_v y$ entsprechenden Variationen der Integrale, so verschwindet δK_n, wenn

$$\delta y = \delta_1 y \delta_2 K_n - \delta_2 y \delta_1 K_n;$$

bildet man den zugehörigen Wert von δJ_n, welcher ebenfalls verschwindet, so ergiebt sich (10). Einen diesem verwandten Beweis giebt *L. Scheeffer*[41]), indem er, einem Gedanken von *Weierstrass* folgend, ansetzt $\delta y = \delta_1 y + \varkappa \delta_2 y$, wobei $\varkappa$ eine Konstante ist; soll δK_n verschwinden, so ergiebt sich $\varkappa = \varkappa_0 \delta_1 K_n$, wobei $\varkappa_0$ eine von $\delta_1 y$ unabhängige Grösse ist. Setzt man mit diesem Werte von $\varkappa$ die Gleichung $\delta J_n = 0$ an, so erhält man (10) für $\delta y = \delta_1 y$.

Alle diese Beweise versagen in dem Ausnahmefall, dass längs der variierten, d. h. der gesuchten Kurve δK_n verschwindet. Die Ausdehnung auf den Fall mehrerer Bedingungen oder Unbekannten ist überall leicht.

10. Die Multiplikatoren und notwendigen Bedingungen für $\delta U_n = 0$. *A. Mayer*[42]) hat darauf hingewiesen, dass das in Nr. 8 erörterte Problem des Integrals W wesentlich neue Methoden erfordert, wenn der Werth von v für $x = b$ vorgeschrieben ist, wie es z. B. der Fall ist bei dem von *Euler* gelösten Problem der Brachistochrone im widerstehenden Mittel, wenn die Endgeschwindigkeit gegeben ist[43]). Dann gilt noch die Gleichung (8), wenn λ irgend eine Lösung der Gleichung (7) ist; ebenso erhält man, wenn man $f = g$ setzt und μ irgend eine Lösung der homogen gemachten Gleichung (7) ist,

$$\delta v = \int_a^x Q \delta y \, dx + \left[S - \mu \delta v \right]_a^x,$$

wobei S ein Ausdruck derselben Art wie R ist. Hieraus ergiebt sich, da δv für $x = b$ verschwinden soll, eine Gleichung, welche die Freiheit der Variation δy, abweichend von Nr. 8, beschränkt; wird angenommen, dass eine Anzahl Grenzwerte δy, $\delta y'$, ... verschwinden, so hat man

$$\delta W = \int_a^b P \delta y \, dx = 0, \quad \int_a^b Q \delta y \, dx = 0,$$

d. h. sobald die zweite Gleichung gilt, folgt die erste. Auf dieses Gleichungssystem sind die bei der isoperimetrischen Aufgabe benutz-

41) Math. Ann. 25 (1885), p. 583.
42) Math. Ann. 26 (1886), p. 74.
43) Meth. inv. Kap. V, § 52, p. 204.

ten Schlüsse anwendbar; *Mayer* erhält nach der von *Scheeffer* gegebenen Methode, wenn c eine Konstante ist, die Gleichung

$$P + cQ = 0, \quad \frac{\partial (f + \lambda_1 g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial (f + \lambda_1 g)}{dy'} + \cdots = 0,$$

wobei $\lambda_1 = \lambda + \mu c$ gesetzt ist, sodass λ_1 eine bestimmte Lösung der Gleichung (7) bedeutet. Diese spezielle Wahl des Multiplikators trifft auch *Euler* in dem erwähnten Beispiel. *Mayer* führt die Untersuchung für den allgemeinen Fall des Integrals:

$$U_n = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$(11) \quad \varphi_\varrho(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

durch und zeigt zum ersten Mal in strenger Weise, dass die Gleichungen

$$(12) \quad \frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_\nu'} = 0, \quad F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

notwendige Bedingungen des Extremums sind, wobei $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und die Grössen λ_ϱ Funktionen von x sind, welche zusammen mit den n Unbekannten aus den $n + m$ Gleichungen (11), (12) im allgemeinen zu bestimmen sind. — Auf das Problem des Integrals U_n kann der Fall, dass höhere Differentialquotienten vorkommen, durch Einführung neuer Unbekannten und neuer Bedingungsgleichungen von der Form $y_\nu' - y_{\nu+1} = 0$ reduziert werden, wie *A. Clebsch* bemerkt hat[44]). — *A. Mayer* hat ferner gezeigt[45]), dass die Multiplikatorenmethode anwendbar ist, wenn nicht ein bestimmtes Integral, sondern die Lösung einer Differentialgleichung ein Extremum werden soll (Nr. 8).

Der Fehler aller älteren Ableitungen der *Euler*'schen Regel bestand darin, dass man glaubte, bei dem Problem des Integrals U_n stets $n - m$ Variationen δy_ν als frei verfügbar ansehen zu können, während sie doch dadurch beschränkt sind, dass für $x = b$ alle n Variationen δy_ν verschwinden sollen. Dieser Fehler ist noch in neuester Zeit wiederholt.

Einen wesentlich neuen Beweis der Gleichungen (12), bei welchem nicht auf die isoperimetrische Aufgabe zurückgegangen wird, hat *B. Turksma*[46]) gegeben. Er betrachtet, was bei der Ableitung

44) J. f. Math. 55 (1858), p. 267.
45) Leipz. Ber. 47 (1895), p. 129.
46) Math. Ann. 47 (1896), p. 33. S. a. Fussn. 118.

notwendiger Bedingungen erlaubt ist, ein spezielles System von Variationen

$$\delta y_\nu = \alpha_{\nu 0} z + \frac{d(\alpha_{\nu 1} z)}{dx} + \frac{d^2(\alpha_{\nu 2} z)}{dx^2} + \cdots + \frac{d^\sigma(\alpha_{\nu \sigma} z)}{dx^\sigma},$$

in welchem z eine willkürliche Funktion bedeutet; setzt man diese Werte in die Gleichungen

$$\sum_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \delta y'_\nu = 0, \quad \delta \int f dx = 0$$

ein, so ergeben sich durch partielle Integration lineare Bedingungsgleichungen für die Funktionen α, deren Anzahl bei passender Wahl des Exponenten σ gleich der Anzahl der Grössen α ist. Bringt man zum Ausdruck, dass die linearen Formen der Grössen α, welche die linken Seiten dieser Gleichungen sind, linear abhängig sind, dass es also von den α unabhängige Multiplikatoren giebt, deren Produkte in die Koeffizienten einer beliebig fixierten Grösse α in jenen Formen die Summe Null ergeben, so bemerkt man durch einfache Rechnung, dass diese Multiplikatoren sich durch m Grössen λ und ihre ersten Ableitungen ausdrücken, wodurch die Gleichungen (12) resultieren.

Sowohl *Mayer* wie *Turksma*[47]) weisen auf gewisse Ausnahmefälle hin, welche sich den Beweisen für die Multiplikatorregel entziehen, übrigens aber noch nicht genau formuliert sind; hierher gehört der am Ende von Nr. 9 erwähnte Ausnahmefall, sowie das von *Lindelöf-Moigno* und *J. Vieille*[48]), von letzterem im wesentlichen richtig, erörterte Problem, zwischen zwei parallelen Ebenen eine Linie von gegebener Länge so zu ziehen, dass die durch sie gehende, auf den Ebenen senkrechte und von ihnen begrenzte Cylinderfläche ein Minimum ist.

Die ganze Theorie des Multiplikators lässt sich offenbar auf den in der Mechanik (Nr. 26) vorkommenden Fall übertragen, dass anstatt der Gleichung $\delta U_n = 0$ verlangt wird, dass das Integral einer linearen Form von Variationen verschwinden soll; denn in diese Gestalt wird die Grösse δU_n immer zuerst gebracht.

11. Formale Entwicklungen; Jacobi-Hamilton'sche Methode. Die Untersuchung der Vortheile, welche die Form der Differentialgleichungen in den Problemen der Variationsrechnung für die In-

47) Math. Ann. 26, p. 80; 47, p. 40.

48) Calc. des var. p. 299; *J. Vieille*, Cours complémentaire d'analyse et de mécanique, p. 118 (1851).

tegration darbietet, beginnt mit der unbewiesenen Bemerkung *C. G. J. Jacobi*'s[49]), dass die *Jacobi-Hamilton*'sche Methode der Dynamik (II A 5, Nr. **31**) auf das Problem $\delta J_1 = 0$ anwendbar sei. *M. Ostrogradsky*[50]) hat für ein Integral J, welches beliebig viele durch keine Bedingungsgleichungen verbundene Unbekannte und beliebig hohe Ableitungen derselben enthält, gezeigt, dass die Differentialgleichungen des Problems $\delta J = 0$ auf die *Hamilton*'sche kanonische Form gebracht werden können, und dass ihre Integration durch die einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung ersetzt werden kann; die Ableitung des letzteren Resultats entspricht dem von *Hamilton* gemachten Übergang vom Prinzip der kleinsten Aktion zu dem der variierenden Aktion sowie der von *Jacobi* herrührenden Vereinfachung dieser Methode[50a]). *Ostrogradsky* hat ferner für das bezeichnete Problem Entwicklungen gegeben, welche der *Jacobi-Poisson*'schen Theorie der Variation der Konstanten in der Dynamik analog sind.

A. Clebsch[51]) hat sodann bemerkt, dass die Differentialgleichungen des Problems $\delta U_n = 0$, wenn n beliebig ist, im allgemeinen gestatten, die Unbekannten y_ν, λ_ϱ durch x und $2n$ willkürliche Konstanten a_ν, dann aber auch letztere durch n willkürliche Konstanten α_ν und die n Grössen y_ν auszudrücken. Je nachdem ein von den Unbekannten abhängiger Ausdruck V in der ersten oder zweiten Form dargestellt wird, werde er durch $\overline{V}$ oder (V) bezeichnet. Setzt man z. B.

$$\overline{V} = \int_a^x \overline{F}\,dx = \int_a^x f\,dx,$$

womit auch (V) definiert ist, so ergiebt sich durch einfache Differentiationen

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial y_\nu'} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_\nu}\right), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}\right) = \beta_\nu, \tag{13}$$

wobei β_ν neue Konstanten sind. Da nun

$$F = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu' \left(\frac{\partial V}{\partial y_\nu}\right),$$

so kann man aus dieser Gleichung und den ersten n Gleichungen (13) die Grössen y_ν' eliminieren und so eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für (V) erhalten. Ist irgend ein n Konstanten enthaltendes

---

49) Werke 4, p. 50.

50) Petersb. Mém. (6) 4 (1850), p. 385.

50a) II A 5, Fussn. 178.

51) J. f. Math. 55 (1858), p. 260, 337.

Integral dieser letzten Gleichung gegeben, so geben die letzten n Gleichungen (13) die Funktionen $\bar{y}_\nu$, womit dann die Gleichungen (11), (12) gelöst sind. Damit ist die *Jacobi-Hamilton*'sche Methode auf das Problem $\delta U_n = 0$ ausgedehnt. *Mayer*[52]) hat auch die kanonische Form der Differentialgleichungen desselben gegeben. — *Jacobi* hat in seinen Vorlesungen die obige Methode für das Problem $\delta U_n = 0$ im Falle $m = 0$ entwickelt[53]) und in einer aus dem Nachlass publizierten Abhandlung[54]) den Multiplikator des Gleichungssystems $\delta J_n = 0$ bestimmt und für einen etwas allgemeineren Fall untersucht.

Die Frage, wann eine gegebene Differentialgleichung als aus einem Problem $\delta J_n = 0$ hervorgegangen betrachtet werden kann, haben *B. Imschenetzky*[55]), *N. Sonin*[56]), *G. Darboux*[57]), *A. Hirsch*[58]) untersucht; *Hirsch* beantwortet diese Frage zuerst vollständig, indem er vom Algorithmus der adjungierten linearen Differentialausdrücke Gebrauch macht.

12. Zweite Variation von J_1 nach Legendre. Als zweite Variation eines Integrals U_n oder J_n bei festen Grenzen und Grenzwerten der n Unbekannten bezw. der Unbekannten und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen ($\delta^2 U_n$, $\delta^2 J_n$) bezeichnen wir das von a bis b genommene Integral der doppelten Summe aller in den Variationen δy_ν, $\delta y_\nu'$ bezw. δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(n-1)}$ quadratischen Glieder, welche in der *Taylor*'schen Entwicklung des variierten Integranden, d. h. beziehentlich der Ausdrücke

$$f(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n, y_1' + \delta y_1', \ldots, y_n' + \delta y_n'),$$
$$f(x, y + \delta y, y' + \delta y', \ldots, y^{(n)} + \delta y^{(n)})$$

auftreten. *Legendre*[59]), bei dem dieser Begriff zuerst erscheint, nennt zweite Variation das Integral des einfachen Inbegriffs der quadratischen Glieder; aber nur die obige Definition lässt sich mit dem Algorithmus der höheren Variationen in Einklang bringen (Nr. 22); sie geht wesentlich auf *Jacobi*[60]) zurück. Bei den späteren Autoren findet sich bald die eine, bald die andere Definition.

52) J. f. Math. 69, p. 241.

53) Neunte Vorl., Werke Suppl. p. 143.

54) Werke 5, p. 465. Zuerst abgedruckt in der ersten Auflage der Dynamik. S. a. Werke 5, p. 282.

55) St. Pét. Bull. 31 (1886), p. 283.

56) Warschau Univ. Nachr. 1886.

57) Théorie générale des surfaces 3 (1894), p. 53.

58) Math. Ann. 49 (1897), p. 49.

59) Par. Hist. 1786 (1788), p. 7; Ostwald's Klass. Nr. 47.

60) Werke 4, p. 42.

Der Hauptzweck, dem die zweite Variation dienen soll, ist die Aufstellung *hinreichender* Bedingungen des Extremums; dazu sucht man zunächst das Zeichen der zweiten Variation zu bestimmen. *Legendre* transformiert zu diesem Zweck $\delta^2 J_1$, indem er den verschwindenden Ausdruck

$$\left[\alpha \delta y^2\right]_a^b = \int_a^b \frac{d(\alpha \delta y^2)}{dx}\, dx = \int_a^b dx (2\alpha \delta y \delta y' + \alpha' \delta y^2)$$

addiert:

$$(14)\quad \delta^2 J_1 = \int_a^b dx \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \delta y'^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \alpha\right) \delta y \delta y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha'\right) \delta y^2 \right\},$$

und setzt für die Grösse α folgende Differentialgleichung an:

$$(15)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha'\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \alpha\right)^2 = 0;$$

alsdann ist die quadratische Form, welche in der Gleichung (14) unter dem Integralzeichen steht, das Quadrat eines reellen, in δy und $\delta y'$ linearen Ausdrucks multipliziert mit $\partial^2 f : \partial y'^2$. Die zweite Variation hat also das Vorzeichen dieser Grösse. Analog zeigt *Legendre*, dass die Grössen

$$\delta^2 J_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$$

gleiches Zeichen haben. Für die isoperimetrische Aufgabe J_2 (Nr. 9) bei gegebenem Wert K_2 zeigt *V. Brunacci*[61]), indem er einen Irrtum *Legendre*'s berichtigt, nach der von diesem gegebenen Methode, dass die Grössen

$$\delta^2 J_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial y''^2}$$

gleiches Zeichen haben.

Lagrange[62]) hat eine wichtige Modifikation der *Legendre*'schen Untersuchungen gegeben, die freilich wenig Beachtung fand; er setzt nicht die Gleichung (15) an, sondern setzt nur ihre linke Seite positiv. Dann hat auch noch die quadratische Form auf der rechten Seite der Gleichung (14) bei beliebigen reellen Werten von δy ein konstantes Zeichen, solange dies von $\partial^2 f : \partial y'^2$ gilt; sie reduziert sich aber nicht auf ein einziges Quadrat. Man kann aus dieser Betrachtung in aller Strenge schliessen, dass bei hinreichender Beschränkung des Integrationsintervalls und konstantem Zeichen der Grösse $\partial^2 f : \partial y'^2$ das Integral J_1 wirklich ein Extremum ist, da bei der angegebenen

61) Mem. dell' istituto nazionale italiano 1^2 (1806), p. 191.

62) Oeuvres 9, p. 304.

Beschaffenheit der quadratischen Form gegen sie alle höheren Glieder in der Entwicklung von $f(x, y+\delta y, y'+\delta y')$ vernachlässigt werden können, während der Schluss *Legendre*'s vom konstanten Zeichen der Grösse $\delta^2 J_1$ auf das Eintreten eines Extremums anfechtbar ist (Nr. **20**). *Lagrange* weist ferner darauf hin, dass die *Legendre*'sche Transformation nur dann möglich ist, wenn α für das ganze Integrationsintervall als stetige Funktion bestimmt werden kann.

13. Transformation von $\delta^2 J_n$ nach Jacobi. Diese Schwierigkeit erledigt *Jacobi*[63]), indem er zeigt, dass die Integrale der Gleichung (15) durch blosse Differentiation gefunden werden können, sobald die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

integriert ist. Enthält die allgemeine Lösung die Konstanten c_1 und c_2 und sind C weitere Konstanten, so setzt *Jacobi*

$$u = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_2} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2}, \quad -\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{du}{dx};$$

kann man also die Grössen C so bestimmen, dass u im Integrationsgebiet nicht verschwindet, so ist α eine in diesem Gebiet stetige Lösung der Gleichung (15).

Bei dem allgemeinen J_n geht *Jacobi* von folgendem Lemma aus. Ist y eine Lösung der Gleichung

$$0 = Ay + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \cdots + \frac{d^n (A_n y^{(n)})}{dx^n} = Y,$$

so ist der mit einer unbestimmten Funktion u gebildete Ausdruck

$$y\left\{Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \cdots + \frac{d^n (A_n u^{(n)})}{dx^n}\right\}$$

integrabel und sein Integral von der Form

$$Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1} t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

wobei $ty = u$, A_r gegebene und B_r von u unabhängige Funktionen von x sind. Dieses von *Jacobi* ohne Beweis gegebene Lemma beweisen *V. Lebesgue*[64]), *C. Delaunay*[65]), *F. Minding*[66]) durch Rechnung, wobei letzterer explizite Ausdrücke der Grössen B angiebt;

63) J. f. Math. 17 (1837); Werke 4, p. 41.
64) J. de math. (1) 6 (1841), p. 17.
65) J. de math. (1) 6 (1841), p. 209.
66) J. f. Math. 55 (1858), p. 300.

Bertrand[67]) und *F. Eisenlohr*[68]) auf Grund der Integrabilitätstheorie, indem sie mehrfach den Schluss anwenden, dass eine Grösse von gewisser Form, wenn sie integrabel ist, identisch verschwindet; *E. Heine*[69]) mittelst des gleichzeitigen Gebrauchs zweier von einander unabhängiger Variationen. — *Jacobi* macht sodann die Bemerkung, dass die zweite Variation in die Form

$$\delta^2 J_n = \int_a^b \delta M \, \delta y \, dx$$

gebracht werden kann (M in der Bedeutung von Nr. 4); es kann dies leicht aus der Art, wie man in jeder *Taylor*'schen Entwicklung die quadratischen Glieder aus den linearen ableitet, geschlossen werden. Wenn es nun gelingt, δM auf die Form Y zu bringen, so nimmt $\delta^2 J_n$ nach *Jacobi*'s unbewiesener Angabe auf Grund des Lemmas durch mehrfache partielle Integration die Form

$$\delta^2 J_n = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} \, \omega^2 dx \tag{16}$$

an, wobei ω eine lineare Form der Grössen $\delta y, \delta y', \ldots, \delta y^{(n)}$ ist. Diese Formel findet sich für $n = 2$ schon bei *Legendre*. Hat also $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ ein konstantes Zeichen, so gilt von $\delta^2 J_n$ dasselbe.

Bei der angedeuteten Transformation braucht man Lösungen der linearen Gleichung $Y = 0$ oder $\delta M = 0$ mit der Unbekannten δy; da mit dem Symbol δ in den Ausdruck M genau so operiert wird wie mit dem Zeichen der Ableitung nach irgend einem Parameter, so hat man sofort als allgemeine Lösung der Gleichung $\delta M = 0$ den Ausdruck

$$\delta y = \sum_{\nu=1}^{2n} C_\nu \frac{\partial y}{\partial c_\nu}, \tag{17}$$

wenn c_ν die in der Lösung der Gleichung $M = 0$ vorkommenden Integrationskonstanten, C_ν neue Konstanten sind. Für $n = 2$ werden bei der Herstellung der Formel (16) zwei Ausdrücke (17) gebraucht, welche zusammen acht Konstanten C enthalten; sie treten aber in solchen Verbindungen auf, dass schliesslich die Form ω nur ebenso viel, nämlich drei willkürliche Grössen enthält wie bei *Legendre*. Die

---

67) J. éc. polyt. 17, cah. 28 (1841), p. 276.
68) Untersuchungen über Variationsrechnung, Mannheim 1853.
69) J. f. Math. 54 (1857), p. 68.

von *Jacobi* angegebenen Resultate für $n = 2$ hat *Eisenlohr*[70]) zuerst korrekt abgeleitet; denselben Fall behandeln *G. Mainardi*[71]) und *F. Brioschi*[72]). Dass allgemein δM auf die Form Y gebracht werden kann, hat *Delaunay*[73]) gezeigt. *S. Spitzer*[74]) geht von der Formel (16) aus, ohne auf ihre Herstellung durch partielle Integrationen zu achten, schliesst aus ihr, dass die Ausdrücke (17) auch Lösungen der linearen Gleichung $\omega = 0$ sein müssen, und bestimmt hierauf die Koeffizienten der Grössen $\delta y, \delta y', \ldots$ in ω; er führt die Rechnungen für $n = 1, 2, 3$ durch und zeigt, dass die Konstanten C in jenen Koeffizienten in gewissen Verbindungen auftreten. Die Anzahl der unabhängigen unter ihnen erweist sich in diesen Fällen gleich der Ordnung des Gleichungssystems, welches sich ergiebt, wenn man ansetzt

$$\delta^2 \int_a^x f(x, y', \ldots, y^{(n)})\, dx = \varpi + \int_a^x \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}\, dx, \tag{18}$$

unter ϖ eine quadratische Form von $\delta y, \delta y', \ldots, \delta y^{(n-1)}$ versteht, und die Koeffizienten der Formen ϖ und ω als Unbekannte ansieht. Dieses System ist die Verallgemeinerung der *Legendre*'schen Gleichung (15). — *Spitzer* behandelt auch die Form der zweiten Variation in den Ausnahmefällen, wenn die Differentialgleichung $M = 0$ von niedrigerer als der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist[75]).

14. Beweis der formalen Sätze von Jacobi durch Hesse und Frobenius. *O. Hesse*[76]) beweist und vervollständigt die Resultate von *Jacobi*, soweit sie formaler Natur sind. Er giebt zuerst die allgemeine Ableitung der Formel (16) durch partielle Integration; es dient dazu ein Algorithmus gewisser linearer Differentialausdrücke $\Psi, \Psi_1, \ldots$ deren erster dadurch definiert ist, dass $\delta M = \Psi(\delta y)$. Sind $u, v, w, s, \ldots$ n Integrale der Gleichung $\Psi(z) = 0$; setzt man ferner

$$\begin{gathered} z = uz_1, \quad z_1' = v_1' z_2', \quad z_2'' = w_2'' z_3'', \ldots \\ v = uv_1, \quad w = uw_1, \ldots, w_1' = v_1' w_2', \quad s_1' = v_1' s_2', \ldots \end{gathered} \tag{19}$$

und beschränkt jene Integrale durch die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen

70) Fussn. 68, p. 13.
71) Ann. fis. mat. 3 (1852), p. 149, 379.
72) Ann. fis. mat. 3, p. 322.
73) Fussn. 65, p. 211.
74) Wien. Ber. 12 (1854), p. 1027; 14 (1855), p. 41.
75) A. a. O. 12, p. 1031, 1040; *Euler*, Meth. inv. Kap. I, § 6, 26, 44.
76) J. f. Math. 54 (1857), Werke, p. 413.

$$\varphi_1(v_1') = \varphi_2(w_1') = \varphi_2(w_2') = \cdots = 0,$$

sodass sie nur $n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$ Konstanten enthalten, so ist nach *Hesse* für $z = \delta y$

$$\delta^2 J_n = \int_a^b \left(z_n^{(n)}\right)^2 u^2 v_1'^2 w_2''^2 \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} dx.$$

Der Integrand kann nach (19) als Quotient der Quadrate zweier aus $z, u, v, \ldots$ und den Ableitungen dieser Grössen gebildeten Determinanten dargestellt werden. In diesen treten die noch übrigen Konstanten der Integrale $u, v, \ldots$, wie *M. Stern*[77]) gezeigt hat, in $\frac{1}{2}n(n+1)$ unabhängigen Verbindungen auf, sodass im ganzen die *Hesse*'sche Transformation $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter, d. h. soviel wie die Form ϖ Koeffizienten enthält. Eine elegante Ableitung der ganzen *Jacobi-Hesse*'schen Theorie mittelst des Algorithmus der adjungierten linearen Differentialausdrücke giebt *G. Frobenius*[78]).

15. Transformation von $\delta^2 U_n$ nach Spitzer, Clebsch, Mayer, Lipschitz. *S. Spitzer*[79]) ist der erste, der $\delta^2 U_2$ für $m = 0$ betrachtet. Durch eine Betrachtung, welche der an die Gleichung (18) geknüpften analog ist, zeigt er, dass $\delta^2 U_2$ konstanten Zeichens ist, wenn von den Grössen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1' \partial y_2'}\right)^2$$

die erste von a bis b konstanten Zeichens, die zweite positiv ist, und beweist, dass die sechs Koeffizienten der Form ϖ in dem Analogon der Gleichung (18) durch ebenso viele Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt sind, deren Integrale durch die den Ausdrücken (17) analogen Grössen dargestellt werden können.

A. Clebsch stellt für das allgemeine Integral U_n mit beliebig vielen Bedingungsgleichungen ($m > 0$) analoge Untersuchungen an[80]), welche *A. Mayer* vereinfacht hat[81]). Die Variationen δy_r mögen an den Integrationsgrenzen verschwinden, und es sei $\Omega(u, r)$ der Koeffizient von $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ in der Entwicklung von F, wenn man y_r durch

77) Gött. Abh. 13 (1868), p. 53.

78) J. f. Math. 85 (1878), p. 185.

79) Wien. Ber. 14, p. 57.

80) J. f. Math. 55 (1858), p. 254, 335.

81) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale, Leipzig 1866.

$y_\nu + \varepsilon u_\nu$, λ_ϱ durch $\lambda_\varrho + \varepsilon r_\varrho$ ersetzt; der obere Index Null bedeute die Substitution $u_\nu = \delta y_\nu$, $r_\varrho = \delta \lambda_\varrho$. Dann ist

$$\delta^2 \int_a^x f\,dx = \delta^2 \int_a^x F\,dx = \int_a^x \Omega^0\,dx,$$

da die Glieder mit $\delta \lambda_\varrho$ rechts von selbst wegfallen. Ist nun B eine quadratische Form mit den Koeffizienten $\beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu}$ und den Argumenten u_ν, A eine andere mit den Koeffizienten $\frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu}$ und den Argumenten

$$\omega_\nu = u'_\nu + \alpha_{\nu 1} u_1 + \cdots + \alpha_{\nu n} u_n,$$

so macht *Clebsch* den Ansatz

$$(20) \quad \Omega(u_1, r) = A + B' + \sum_{\varrho=1}^{m} (r_\varrho + C_{\varrho 1} u_1 + \cdots + C_{\varrho n} u_n) \frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu};$$

da offenbar

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} u_\nu + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u'_\nu \right), \quad \frac{\partial \Omega^0}{\partial r_\varrho} = 0,$$

so ist nach (20)

$$\delta^2 U_n = \int_a^b A^0\,dx,$$

$$(21) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y'_\nu} = 0.$$

Die Transformation (20) beweist also, wenn sie möglich ist, folgendes. Das Vorzeichen $\delta^2 U_n$ ist bei den Bedingungsgleichungen $\delta \varphi_\varrho = 0$ konstant, wenn die Form A^0 bei den Bedingungen (21) ein konstantes Vorzeichen hat und nicht anders verschwindet, als wenn alle Grössen ω^0 verschwinden.

Die Gleichung (20) ergiebt nun durch Vergleichung der Koeffizienten von u und r

$$(22) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y_\varkappa} - \beta'_{h\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y'_\nu} - \beta_{h\nu} \right) \alpha_{\nu\varkappa} + \sum_{\varrho=1}^{m} C_{\varrho\varkappa} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_h},$$

$$(23) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y'_\varkappa} - \beta_{h\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\varkappa \partial y'_\nu} \alpha_{\nu 1} + \sum_{\varrho=1}^{m} C_{\varrho h} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\varkappa},$$

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_h} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \alpha_{\nu h}.$$

Die letzten beiden Systeme erlauben die Grössen α und C durch die β auszudrücken, während für letztere das Gleichungssystem (22) ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung ergiebt, wie ihre Anzahl beträgt. Die Transformation (20) ist also möglich und hängt von $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürlichen Parametern ab. Diese Differentialgleichungen sind aber als integriert anzusehen, sobald die Gleichungen des Problems $\delta U_n = 0$, d. h. die Gleichungen (12) integriert sind. Enthalten nämlich die Lösungen der letzteren die Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, und sind γ neue Konstanten, so ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial r_\varrho} = 0 \tag{24}$$

folgende

$$\begin{aligned} u_\nu &= \gamma_1 \frac{\partial y_\nu}{\partial a_1} + \cdots + \gamma_{2n} \frac{\partial y_\nu}{\partial a_{2n}}, \\ r_\varrho &= \gamma_1 \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a_1} + \cdots + \gamma_{2n} \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a_{2n}}; \end{aligned} \tag{25}$$

denn wendet man das Zeichen δ auf die Gleichungen (12) an, so erhält man

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial \delta y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega^0}{d\delta y_\nu'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega^0}{\partial \delta \lambda_\varrho} = 0,$$

woraus sich das obige Resultat ergiebt, wenn man δ durch irgend ein Zeichen $\partial : \alpha a$ ersetzt. Die Gleichungen (24) bestehen aber, wie man aus der Gleichung (20) sieht, auch wenn

$$\omega_\nu = 0, \quad r_\varrho + C_{\varrho 1} u_1 + \cdots + C_{\varrho n} u_n = 0. \tag{26}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind daher auch in der Form (25) enthalten. Hat man n verschiedene Lösungen derselben, so kann man die Grössen α und C, mithin nach dem obigen auch die Grössen β berechnen.

Es bleibt also die Aufgabe übrig, n verschiedene Grössensysteme (25) und Grössen β so zu bestimmen, dass die Gleichungen (22), (23), (26) bestehen; möglich ist eine solche Bestimmung nach dem obigen sicher. Differenziert man nun die Gleichung (20) nach u_ν', so folgt aus der Annahme (26) und (24)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu'} = \frac{\partial \Omega}{\partial u_\nu} = \beta_{\nu 1} u_1 + \beta_{\nu 2} u_2 + \cdots + \beta_{\nu n} u_n, \tag{27}$$

und umgekehrt folgen hieraus bei der über die Form A eingeführten Voraussetzung die Gleichungen (26) bei der Annahme (24). Es sind also n solcher Systeme zu finden, dass die letzten Gleichungen

$\beta_{\nu\mu} = \beta_{\mu\nu}$ ergeben und dabei, wenn jene Systeme durch $u_{1\nu}, r_{1\nu}$; $u_{2\nu}, r_{2\nu}$; ... bezeichnet werden, die Determinante $D = \sum \pm u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$ nicht verschwindet. Die Forderung $\beta_{\nu\mu} = \beta_{\mu\nu}$ erweist sich auf Grund der Gleichungen (27) als äquivalent mit der andern, dass allgemein

$$(28) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \left(u_{\tau\nu} \frac{\partial \Omega_\sigma}{\partial u'_{\sigma\nu}} - u_{\sigma\nu} \frac{\partial \Omega_\tau}{\partial u'_{\tau\nu}} \right) = 0 \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n)$$

sei, wenn Ω durch die Substitution $u_\nu = u_{\mu\nu}$, $r_\nu = r_{\mu\nu}$ in Ω_μ übergeht. Aus den Gleichungen (24) folgt übrigens leicht, dass für irgend zwei Integralsysteme u_ν die linke Seite der letzten Gleichung konstant ist.

Eine Methode, von den Gleichungen (28) ausgehend auf kürzerem Wege die Transformation (20) abzuleiten, hat *R. Lipschitz* für ein spezielleres Problem angegeben[82]). *Mayer* hat dieselbe[83]) auf die obige allgemeine Aufgabe angewandt und ihr folgende Form gegeben. Aus der Homogeneität der Funktion Ω folgt, dass die Formel

$$(29) \qquad 2\Omega(u, r) = \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial u'_\nu}$$

gilt, sobald u_ν, r_ϱ Lösungen der Gleichungen (24) sind. Sodann wird, wenn u_ν beliebig gegebene Funktionen von x sind, angesetzt

$$u_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu u_{\nu\mu}, \qquad r_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu r_{\nu\mu};$$

mittelst der Gleichung (29) wird Ω unter der Annahme, dass g_ν Konstante seien, gebildet und dann die aus der Variabilität dieser Grössen entspringende Modifikation angebracht. So ergiebt sich eine der Formel (20) äquivalente, in welcher

$$\omega_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g'_\nu u_{\nu\mu} = u'_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu u'_{\nu\mu};$$

dabei ist wegen der zweiten Gleichung (24)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u_\nu + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y'_\nu} u'_\nu \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \omega_\nu + \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} u_{\sigma\nu} + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u'_{\sigma\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu},$$

82) J. f. Math. 65 (1866), p. 26.
83) J. f. Math. 69 (1868), p. 237.

sodass, wenn $u_\nu = \delta y_\nu$ gesetzt wird, also $\delta \varphi_\varrho = 0$ ist, die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^0 \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu'} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen. *Lipschitz* giebt ferner für das von ihm behandelte Problem eine spezielle den Gleichungen (28) genügende Bestimmung der Konstanten γ_ν. Später hat *Mayer* gezeigt[84]), dass diese ganze Theorie ohne grosse Modifikationen gültig bleibt, wenn U_ν nicht durch eine Quadratur, sondern durch eine Differentialgleichung definiert ist (Nr. 8).

Clebsch[85]) giebt die allgemeinste Lösung der Gleichungen (28) vermittelst der verallgemeinerten *Jacobi-Hamilton*'schen Methode und zeigt, dass man immer setzen kann

$$\gamma_{\mu, n+\nu} = c_{1\nu}\gamma_{\mu 1} + c_{2\nu}\gamma_{\mu 2} + \cdots + c_{n\nu}\gamma_{\mu n} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$. Die Konstanten $\gamma_{\mu\nu}$ fallen dann aus den Ausdrücken $\beta_{\mu\nu}$ von selbst weg, und *Clebsch* erhält für diese sehr übersichtliche Determinantenausdrücke, die aus den Ableitungen von V zusammengesetzt sind und genau $\frac{1}{2}(n+1)n$ willkürliche Konstanten $c_{\mu\nu}$ enthalten, wie es zu erwarten ist. *Mayer*[86]) untersucht direkt die Verbindungen, in welchen die Grössen γ in den durch (27) definierten Ausdrücken $\beta_{\mu\nu}$ vorkommen und zeigt analog den spezielleren Resultaten von *Stern* (Nr. **14**), dass die Anzahl der unabhängigen unter diesen Verbindungen $\frac{1}{2}(n+1)n$ ist.

16. Das Vorzeichen von $\delta^2 U_n$ nach Mayer; konjugierte Punkte. Für das Transformationsproblem (20) genügt es, n bestimmte Systeme u_ν zu finden, welche den Gleichungen (28) genügen, und für D einen von Null verschiedenen Wert ergeben. Dies leistet *Mayer*[87]), indem er die Gleichungen

$$y_\nu = \bar{y}_\nu, \quad v_\nu = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}_\nu}, \tag{30}$$

in denen die Striche nach Nr. **11** zu deuten sind, nach $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ auflöst. Sind die erhaltenen Ausdrücke (a_1), (a_2), . . ., so kann nach *Mayer* gesetzt werden

84) Leipz. Ber. 30 (1878), p. 22.
85) J. f. Math. 55 (1858), p. 344. S. a. *Frobenius* [Fussn. 78].
86) Beiträge [Fussn. 81], p. 32.
87) J. f. Math. 69, p. 249.

$$\gamma_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial (a_\nu)}{\partial v_\mu}\right)_{x=x_1};$$

setzt man nämlich (a_ν) für a_ν in den Gleichungen (30) und differenziert die erhaltenen Identitäten nach y_ν und v_ν, so sieht man, dass für $x = x_1$ alle Grössen $u_{\mu\nu}$ verschwinden, womit die Gleichungen (28), deren linke Seiten von x nicht abhängen, bewiesen sind. Bei dieser Wahl der Grössen γ erhält man ferner

$$D = \left(\frac{\partial((a_1), (a_2), \ldots, (a_{2n}))}{\partial(y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_n)}\right)_{x=x_1} \cdot \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n, (y_1)_{x=x_1}, \ldots, (y_n)_{x=x_1})}{\partial(a_1, a_2, \ldots, \partial a_{2n})};$$

der zweite Faktor rechts wird durch $\Delta(x, x_1)$ bezeichnet.

Die Grösse D erscheint nun nach (27) als Nenner in den Ausdrücken β; die Gleichung (20) kann also nur dann zur Transformation von $\delta^2 U_n$ benutzt werden, wenn D in dem ganzen Intervall von a bis b von Null verschieden ist. Dies vorausgesetzt können aber die Grössen ω_ν^0 nur dann in dem ganzen bezeichneten Intervall verschwinden, wenn alle Grössen δy_n identisch verschwinden. Denn andernfalls hätten die Differentialgleichungen $\omega_\nu = 0$, deren allgemeine Lösungen in der Form

$$u_\nu = C_1 u_{1\nu} + C_2 u_{2\nu} + \cdots + C_n u_{n\nu}$$

dargestellt werden, ein System von Lösungen, welche an zwei Stellen gleichzeitig verschwänden, sodass an diesen Stellen $D = 0$ sein müsste, entgegen der Voraussetzung. Bei den für die Form A^0 und die Grösse D eingeführten Voraussetzungen ist also, wie *J. Richelot* bemerkt hat[88]), die Variation $\delta^2 U_n$ nur dann gleich Null, wenn alle Variationen von δy_ν identisch verschwinden. Hieraus ergiebt sich auf Grund der Bemerkungen am Anfang von Nr. **15** und der Gleichung (20) folgender Satz von *Mayer*[89]):

(I) Die quadratische Form $A = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} \omega_\mu \omega_\nu$ sei für $a \leqq x \leqq b$ konstanten Zeichens und von Null verschieden, so lange die Argumente den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} \omega_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

unterworfen sind und nicht sämtlich verschwinden.

(II) Für $a < x \leq b$ sei $\Delta(a, x)$ von Null verschieden.

88) *Mayer*, Beiträge [Fussn. 81], p. 52; J. f. Math. 69, p. 255.

89) Beiträge [Fussn. 81], p. 57. S. auch *G. von Escherich*, Wien. Ber. 97, II^a, p. 1416 (1888); 98, II^a, p. 1463 (1889).

Alsdann ist die Transformation von *Clebsch* (20) möglich; $\delta^2 U_n$ ist von Null verschieden und hat das Vorzeichen der Form A für alle Variationen, die den Bedingungsgleichungen $\delta\varphi_\varrho = 0$ genügen und an den Integrationsgrenzen, nicht aber identisch verschwinden.

Der Ausdruck $\Delta(a, b)$ hat aber eine Bedeutung unabhängig von der ganzen Transformationstheorie und ermöglicht es, einen Gedanken wieder aufzunehmen, der von *Jacobi* ausgesprochen, aber lange weit weniger als die in Nr. **13** erwähnten Entwicklungen formaler Natur beachtet worden ist. *Jacobi* sagt[90]), dass das Integral J_n aufhört ein Extremum zu sein, sobald die betrachtete Kurve, längs deren δJ_n verschwindet, die betrachtete Extremale, wie wir sagen wollen, mit einer ihr unendlich nahe benachbarten Extremale in zwei Punkten, welche dem Integrationsgebiet angehören, eine Berührung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat. Hier ist schon die Anschauungsweise der modernen Variationsrechnung in Gebrauch, welche darin besteht, dass man die Gesamtheit der den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannigfaltigkeiten oder Extremalen ins Auge fasst. *Jacobi* wendet seine Bemerkung an auf das Integral der Aktion bei der Planetenbewegung und hat dieses Beispiel sowie das der geodätischen Linien in seinen Vorlesungen ausführlich besprochen[91]). Nach einem misslungenen Versuch von *Eisenlohr*[92]) leitet *Hesse*[93]) das *Jacobi*'sche Resultat für $n = 1$ ab, wenigstens soweit es sich um das Zeichen der zweiten Variation handelt; er giebt folgende Bedingungsgleichung für zwei Punkte der angegebenen Beschaffenheit, deren Abscissen a und b sind:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial a_1}\right]_{x=a} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial a_2}\right]_{x=b} - \left[\frac{\partial y}{\partial a_2}\right]_{x=a} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial a_1}\right]_{x=b} = 0; \tag{31}$$

er leitet sodann durch eine ganz einfache Rechnung aus der Differentialgleichung des Problems $\delta J_1 = 0$ ab, dass der Quotient $q = \frac{\partial y}{\partial a_1} : \frac{\partial y}{\partial a_2}$ den Sinn seiner Änderung beibehält, solange $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ ein festes Zeichen besitzt, d. h. unter der Bedingung (I). Die Gleichung (31) kann also nur dann bestehen, wenn q in dem Intervall von a bis b alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ mindestens einmal durchläuft. Ist dies nicht der Fall, so kann man offenbar die Konstanten C_1 und C_2 (Nr. **13**) so bestimmen, dass u in dem ganzen Intervall nicht

90) Werke 4, p. 46.
91) Werke, Suppl. p. 46.
92) Untersuchungen [Fussn. 68], p. 15.
93) J. f. Math. 54 (1857), p. 259.

verschwindet, die *Legendre*'sche Transformation von $\delta^2 J_1$ also in der *Jacobi*'schen Form möglich ist.

Diese Resultate sind auf das Integral J_n sowie auf das einfachste isoperimetrische Problem von *C. E. Lundström*[94]) ausgedehnt worden, allerdings ohne völlig ausreichende Begründung; er hebt hervor, dass bei isoperimetrischen Problemen das Extremum dann aufhört, wenn der betrachtete Bogen in zwei Punkten mit einer unendlich nahen Extremale, d. h. den Differentialgleichungen des Problems genügenden Kurve, welche für das die isoperimetrische Bedingung liefernde Integral K_n zwischen jenen beiden Punkten bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung denselben Wert ergiebt, eine Berührung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat, sodass sich ein Analogon der Gleichung (31) ergiebt. Beim absoluten Extremum des Integrals J_n tritt an Stelle der Determinante (31) eine solche von der Ordnung $2n$, deren Elemente die für $x = a$ und $x = b$ genommenen Ableitungen der Grössen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ nach den $2n$ Integrationskonstanten sind. Etwas verallgemeinert finden sich diese Resultate auch in einer späteren Arbeit von *Lundström*[95]).

Für das allgemeinste Problem des Integrals U_n bei beliebig vielen Bedingungsgleichungen schliesst *Mayer*[96]) schon vor *Lundström*'s Publikationen aus der Form der Grösse Δ als Funktionaldeterminante, dass, wenn $\Delta(a, x) = 0$, von den Mannigfaltigkeiten erster Ordnung im Gebiet der Grössen $x, y_1, \ldots, y_n$, welche den Differentialgleichungen des Problems genügen und die Wertsysteme $(a, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ und $(x, y_1, \ldots, y_n)$ enthalten, zwei im allgemeinen verschiedene zusammenfallen; diese nennt man nach *Weierstrass* konjugierte Punkte. Die Bedingung (II) kann also auch so formuliert werden: Das Integrationsgebiet darf keinen zu dem Anfangspunkt $(a, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ konjugierten Punkt enthalten.

Ist dagegen $\Delta(a, b) = 0$, so folgt aus der allgemeinen Beziehung der Grössen D und Δ zu einander, dass die Gleichungen (24) ein System von Lösungen zulassen, bei welchen alle Grössen u_ν für $x = a$ und $x = b$ verschwinden. Nach (29) ist aber, wenn $\delta y_\nu = \varepsilon u_\nu$ gesetzt wird, $\delta^2 U_n = 0$; dieses Resultat wird von gewissen Bemerkungen *Hesse*'s[97]) und *Jacobi*'s[98]) gestreift. Hieraus schliesst man leicht, dass

94) Utkast till isoperimetriska problemers fullständiga solution, Upsala 1866, p. 31, 98.

95) Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique, Nova acta soc. Upsaliensis, (3) 7 (1869).

96) Beiträge [Fussn. 81], p. 60.

97) Werke, p. 451.

98) Werke, 4, p. 45.

wenn der zum Anfangspunkt konjugierte Punkt dem Integrationsgebiet nicht angehört, dasselbe kein Paar konjugierter Punkte enthält, da andernfalls $\delta^2 U_n$ auch bei den Bedingungen (I), (II) verschwinden könnte.

Da bei dieser ganzen Untersuchung die Grössen δy_ν an beiden Grenzen verschwinden sollten, sind Probleme der in Nr. 8 besprochenen Art ausgeschlossen. Für diese ist bis jetzt nicht nur keine hinreichende Bedingung des Extremums, sondern auch nichts über das Zeichen der zweiten Variation bekannt.

Bei isoperimetrischen Aufgaben vereinfacht sich, wie *Mayer*[99]) gezeigt hat, die Bedingung (I) und die Determinante $\Delta(a, x)$, wenn man die in diesem Falle konstanten Multiplikatoren und die gegebenen Werte der die Bedingungen ausdrückenden Integrale unter die Konstanten a_ν aufnimmt. Mit der von *Mayer* für diesen Fall abgeleiteten Form von $\Delta(a, x)$ im wesentlichen identisch ist die von *W. Howe*[100]), *G. Hormann*[101]), *R. Venske*[102]) nach *Weierstrass* angegebene.

Illusorisch würden diese Entwicklungen, wenn $\Delta(a, x)$ identisch verschwände. *Mayer* hat darauf hingewiesen, dass dies unmöglich ist, wenn das Problem $\delta U_n = 0$ bei gegebenen Grenzwerten im allgemeinen lösbar sein soll. Indessen fehlt noch eine genaue Angabe, welche Eigenschaften die Funktionen f, φ haben müssen, damit $\Delta(a, x)$ sicher nicht identisch gleich Null sei. Für $m = 0$ hat *L. Scheeffer* gezeigt, dass $\Delta(a, x)$ nicht identisch verschwindet[103]).

17. Die auf konjugierte Punkte bezügliche notwendige Bedingung des Extremums von J_1 nach Erdmann. *G. Erdmann*[104]) hat zuerst nachgewiesen, dass beim Integral J_1 ein Extremum sicher *nicht* vorhanden ist, sobald das Integrationsgebiet ein Paar konjugierter Punkte enthält. Es sei etwa $\Delta(a, x_0) = 0$, $a < x_0 < b$; da für das Integral J_1 der Quotient q (Nr. **16**) zwischen zwei konjugierten Punkten alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, folgt leicht, dass es einen Wert x_1 geben muss, für den $\Delta(x_1, b) = 0$, $a < x_1 < x_0$; und es sei $x_1 < x_2 < x_0$. Dann kann man die Grösse u (Nr. **13**) so bestimmen, dass sie für $x = a$ verschwindet, für $x = x_2$ den positiven Wert ε

99) Math. Ann. 13 (1878), p. 53.
100) Diss. Berlin 1887, p. 5.
101) Diss. Göttingen 1887, p. 10.
102) Diss. Göttingen 1891, p. 13.
103) Math. Ann. 25 (1885), p. 564.
104) Zeitschr. Math. Phys. (2) 23 (1878), p. 367.

annimmt, zwischen a und x_2 aber nicht verschwindet; ferner so, dass sie für $x = b$ verschwindet, für $x = x_2$ den Wert ε annimmt, zwischen x_2 und b aber nicht verschwindet; in letzterem Falle heisse sie $\bar{u}$. Dann setzt *Erdmann* $\delta y = \varepsilon u$ für $a < x \leqq x_2$, $\delta y = \varepsilon \bar{u}$ für $x_2 \leqq x \leqq b$; die Formel (29) ergiebt dann, dass $\delta^2 J_1$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}$ entgegengesetzte Zeichen haben, J_1 also Inkremente verschiedenen Vorzeichens erhalten kann.

Auf verwandten Prinzipien beruht der Beweis dieses Resultats, welchen *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegeben hat[104a]).

Das Integral J_1 hört aber auch schon auf, ein Extremum zu sein, wenn die Endpunkte P_a und P_b des Integrationsgebiets konjugiert sind. *A. Kneser*[105]) hat nämlich gezeigt, dass die Schar der durch P_a gehenden Extremalen eine in P_b beginnende Enveloppe hat und dass das längs dieser, etwa von M bis N genommene Integral $\int f(x\, y\, y')dx$ gleich der Differenz der Integrale längs der Kurven $P_a M$ und $P_a N$ ist, welche der definierten Schar angehören. Hieraus folgt, dass immer beliebig nahe der ursprünglichen Kurve $P_a P_b$ gelegene Kurven vorhanden sind, längs deren das Integral $\int f dx$ genau den Wert J_1 annimmt.

18. Scheeffer's neue Methode; Ausdehnung des Satzes von Erdmann. *L. Scheeffer*[106]) betrachtet zuerst grundsätzlich die Gesamtheit aller „Minimalkurven", d. h. den Differentialgleichungen eines Problems genügenden einfachen Mannigfaltigkeiten oder, wie wir auch hier sagen, Extremalen, und wendet als neues Untersuchungsmittel die Konstruktion von Extremalen durch gegebene Punkte an. Allerdings sind bei der analytischen Durchführung die betrachteten Kurven nicht genau als Extremalen anzusehen, sondern weichen von solchen um Grössen höherer Ordnung im Verhältnis zu den Variationen ab. Diejenige Extremale, an der das Extremum eines Integrals J_a oder U_a untersucht werden soll, sei $\mathfrak{E}$. Eine von ihr unendlich wenig abweichende Extremale erhält man durch Variation der Konstanten a_ν, und hierdurch wird die Einführung der Grössen $\partial y_\mu : \partial a_\nu$ auf eine andere Weise als bei *Jacobi* und seinen älteren Nachfolgern (Nr. 13) motiviert.

Scheeffer betrachtet nun folgende spezielle Variation δ_0 der

---

104a) *S. Kobb*, Acta math. 16, p. 111.

105) Math. Ann. 50 (1897), p. 27.

106) Math. Ann. 25 (1885), p. 522.

Kurve $\mathfrak{C}$. Es seien A_0, A_2 zwei ihrer Punkte, A_1 liege ihr unendlich nahe; für A_μ sei $x = x_\mu$, und $x_0 < x_1 < x_2$. Durch A_0 und A_1 werde eine, durch A_1 und A_2 eine andere Extremale gelegt, und $A_0 A_1 A_2$ als Abänderung der Kurve $\mathfrak{C}$ zwischen A_0 und A_2 betrachtet. Ist η_ν die Differenz der Werte, welche y_ν für $x = x_\nu$ auf $\mathfrak{C}$ und im Punkte A_1 annimmt, so hat man bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung eine der beiden Gleichungen

$$\delta_0 y_\nu = \sum_{\mu=1}^{2n} b_{\nu\mu} \frac{\partial y}{\partial a_\mu} = \Phi_\nu, \qquad \delta_0 y_\nu = \sum_{\mu=1}^{2n} c_{\nu\mu} \frac{\partial y}{\partial a_\mu} = \Psi_\nu,$$

je nachdem $x_0 < x < x_1$ oder $x_1 < x < x_2$, und die Konstanten b, c sind durch folgende Forderungen bestimmt: für $x = x_0$ verschwinden alle Φ_ν, für $x = x_2$ alle Ψ_ν, und für $x = x_1$ ist $\Phi_\nu = \Psi_\nu = \eta_\nu$. Diese Bestimmung ist möglich, wenn $\Delta(x_0, x_1)$ und $\Delta(x_1, x_2)$ nicht verschwinden. Die Ausdrücke Φ_ν und Ψ_ν genügen als Funktionen von x_0 bei passender Wahl von r_ϱ, für u_ν gesetzt, den Gleichungen (24); setzt man ferner

$$u_{\tau\nu} = \Phi_\nu, \quad u_{\sigma\nu} = \Psi_\nu,$$

so bestehen die Gleichungen (28), da ihre linken Seiten für das Argument x_0 verschwinden. Überhaupt sind die Grössen Φ_ν mit den von *Lipschitz* und *Mayer* betrachteten Grössen u_ν (Nr. 15) identisch, wenn man in diesen x_1 für x setzt. Nach Formel (29) reduziert sich $\delta_0^2 U_n$ auf den integrierten Teil; lässt man x_1 gegen den zu x_0 konjugierten Punkt $\bar{x}_0$ konvergieren, so zeigt die Ausrechnung, dass $\delta_0^2 U_n \cdot \Delta(x_0, x_1)$ sich einer im allgemeinen nicht verschwindenden Grösse unbegrenzt annähert, und zwar einer und derselben, gleichviel ob $\lim (x_1 - \bar{x}_0) = \pm 0$. Ändert also $\Delta(x_0, x_1)$ für $x_1 = \bar{x}_0$ sein Zeichen, so gilt dasselbe von $\delta_0^2 U_n$, und U_n ist in dem Intervall von x_0 bis x_2 sicher kein Extremum. Soll also U_n ein Extremum sein, so darf $\Delta(a, x)$ für $a < x \leq b$ sein Zeichen jedenfalls nicht wechseln. Ersetzt man daher das Verschwinden durch den Wechsel des Zeichens, so wird (II) eine notwendige Bedingung des Extremums.

Ebenso sucht *Scheeffer* die Notwendigkeit der Bedingung (I) darzuthun, indem er A_1 festhält, A_0 und A_2 aber zusammenrücken lässt, wodurch sich $\delta_0^2 U_n$ auf die Form $\int \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} \eta_\mu \eta_\nu$ reduziert. Indessen sind bei der so modifizierten Variation die Grössen $\delta y'_\nu$ nicht mehr sicher kleine Grössen, was implicite bei allen bisherigen Betrachtungen vorausgesetzt wird, sodass dieser Teil von *Scheeffer*'s Untersuchung einer Ergänzung bedarf[107]).

107) Math. Ann. 25, p. 570.

Liegt ferner A_1 auf einer Kurve $A_0 A_2$, welche als Variation von $\mathfrak{C}$ betrachtet werden kann und der Variation $\delta y_\nu = \eta_\nu$ entspricht, so zeigt der erwähnte Ausdruck von $\delta_0^2 U_n$ in Verbindung mit einer Rechnung, die mit der *Mayer-Lipschitz*'schen (Nr. **15**) identisch ist, dass die Differenz der zweiten Variationen längs beider Bögen $A_0 A_1$ folgende Form hat:

$$\delta^2 \int_{x_0}^{x_1} f\,dx - \delta_0^2 \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y_\nu' \partial y_\mu'}\, \omega_\nu\, \omega_\mu ,$$

wobei

$$\omega_\nu = \frac{d\eta_\nu}{dx_1} - \left(\sum_{\mu=1}^{2n} b_{\nu\mu} \frac{d}{dx} \frac{\partial y_\nu}{\partial a_\mu} \right)_{x=x_1}$$

und für diese Grössen aus denselben Gründen wie in Nr. **15** die Gleichungen (21) gelten. Führt man eine ähnliche Betrachtung für die beiden Bögen $A_1 A_2$ durch, so hat man eine anschauliche Deutung für die Transformation der zweiten Variation in die spezielle Form von *Mayer* (Nr. **16**), wodurch diese vor der allgemeineren Transformation von *Clebsch* bevorzugt erscheint.

19. Kritische Untersuchungen; Inbegriff der Variationen. In den von Nr. **12** an besprochenen Arbeiten gilt es, soweit vom Extremum eines Integrals J_n oder U_n die Rede ist, für selbstverständlich, dass der Zuwachs des Integrals bei Variation der unbekannten Funktionen, wenn die erste Variation verschwindet, das Vorzeichen der zweiten Variation besitzt; ist dieses konstant, so folgert man, dass das Integral wirklich ein Extremum besitzt. Noch *Scheeffer* glaubt durch die Betrachtung der zweiten Variation die Bedingungen (I) und (II) als hinreichend für das Extremum nachgewiesen zu haben, weist aber in einer zweiten Arbeit[108]) nachdrücklich darauf hin, dass auch wenn die zweite Variation ein konstantes Zeichen hat und nur verschwindet, wenn alle δy_ν identisch verschwinden, das Extremum noch nicht als gesichert angesehen werden kann. Der Fehlschluss der gewöhnlichen Argumentation beruht auf folgendem. Variiert man z. B. bei dem Integral J_1 eine Extremale in der speziellen von *Euler* (Nr. **5**) angegebenen Weise, indem man y durch $y + \varepsilon u$ ersetzt, so erhält man für verschiedene Werte der Konstanten ε eine Schar benachbarter Kurven. Innerhalb dieser Schar ist, wenn die zweite Variation konstantes Vorzeichen besitzt, ein Extremum von J_1 für die Extremale gesichert, da die zweite Variation den Wert

108) Math. Ann. 26 (1886), p. 197.

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0}$$

besitzt, $\partial J_1 : \partial \varepsilon$ aber für $\varepsilon = 0$ verschwindet. Aber hieraus folgt noch nicht, dass J_1 auch innerhalb der Gesamtheit aller denkbaren Scharen ein Extremum ist; es könnte sein, dass man immer von einer Schar zu einer anderen übergehend eine Reihe von Kurven konstruierte, welche sich der Extremale unbegrenzt annäherten und das Zeichen des Zuwachses von J_1 von dem Zeichen der zweiten Variation verschieden machten. Dies trifft bei einem von *Scheeffer* gegebenen Beispiel wirklich ein, und zwar wenn man wie gewöhnlich δy und $\delta y'$ als kleine Grössen ansieht (s. u.).

Eine zweite kritische Bemerkung *Scheeffer*'s bezieht sich auf die Natur der Variationen δy,; er hebt angeregt durch *Weierstrass* hervor, dass ebenso wie die Variationen selbst, auch ihre Ableitungen $\delta y'$, als kleine Grössen anzusehen sind, wenn die Variationsrechnung bestehen soll. *Euler*, *Lagrange* und ihre nächsten Nachfolger haben diese Voraussetzung als selbstverständlich angesehen und stillschweigend eingeführt, indem sie z. B. setzen

$$\delta f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y';$$

denn nur bei kleinen Inkrementen aller variierten Grössen kann man mit dem Zeichen δ nach den Regeln des Differentialzeichens operieren. *Legendre* [109]) zeigt, dass man beim Problem der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes zu einer durch die gewöhnlichen Regeln erhaltenen Extremale eine ihr beliebig nahe verlaufende Zickzacklinie konstruieren kann, längs deren das betrachtete Integral kleiner wird als längs der Extremale, während die zweite Variation positiv ist. *Todhunter* [110]) hat zuerst allgemein bemerkt, dass die Voraussetzung, $\delta y'$ sei klein, den Begriff der zulässigen Variationen und damit des Extremums *spezialisiere*, und dass diese Voraussetzung in der Variationsrechnung gemacht werden müsse; er betrachtet ebenfalls an Beispielen Variationen, bei denen die Grössen $\delta y'$ endlich sind, und weist darauf hin, dass die erhaltenen Resultate denen der Variationsrechnung widersprechen können. Derartige Widersprüche erklären sich dadurch, dass der Begriff des Extremums einerseits in der Variationsrechnung, andrerseits bei speziellen Untersuchungen von der Art der *Legendre*'schen, verschiedenen Inhalt hat. Dieser Begriff hängt davon

109) Ostwald's Klass. 47, p. 72.

110) Researches in the calculus of variations, London und Cambridge 1871, p. 169, 269; History p. 3, 426. Vgl. *Euler*, Inst. calc. int. 3, p. 407 (ed. II).

ab, mit was für „benachbarten" Mannigfaltigkeiten man die gesuchte vergleicht. Vergleicht man z. B. den Wert von J_1 längs einer Kurve mit dem Wert längs einer andern, deren Punkte den entsprechenden (Nr. 4) der ersteren nahe liegen, während die Tangenten entsprechender Punkte endliche Winkel bilden können, und verlangt, dass die Differenz der Werte von J_1 längs der beiden Kurven ein vorgeschriebenes Zeichen habe, so hat man den weiteren, von *Weierstrass* (Nr. 21) untersuchten Begriff des Extremums. Verlangt man dagegen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten nahezu parallel seien, so kommt man auf den gewöhnlichen, engeren Begriff, der in der Variationsrechnung zu Grunde gelegt wird und werden muss, wenn nicht der Formalismus der Variationsrechnung zusammenbrechen und schon die Formeln (1) ihre Gültigkeit verlieren sollen. Für den Fall des Integrals J_n hat *E. Zermelo*[111]) die verschiedenen Arten von Nachbarschaft systematisch unterschieden.

Ob man Extrema der engern oder weitern Art betrachten will, ist natürlich zunächst freigestellt. In vielen Fällen entscheidet die Natur der Extremumsaufgabe selbst darüber; z. B. hat *F. August*[112]) gezeigt, dass bei dem Problem der Fläche kleinsten Widerstandes die physikalische Bedeutung der Aufgabe verlangt, die Variationen, bei denen $\delta y'$ nicht klein ist, und damit die *Legendre*'sche Zickzacklinie auszuschliessen. Ebenso führen die dynamischen Anwendungen der Variationsrechnung mit Notwendigkeit auf die speziellere Variationsart, da die Geschwindigkeiten ebenso wie die Koordinaten kleine Änderungen erfahren. Die geometrischen Extremumsaufgaben haben im allgemeinen bei beiden Variationsarten einen Sinn.

20. Hinreichende Bedingungen des Extremums von J_1 nach Scheeffer. *L. Scheeffer*[113]) hat in einer früheren Arbeit, ebenso wie dem Anschein nach *Weierstrass*[114]), die Theorie der zweiten Variation deshalb für mangelhaft erklärt, weil die allgemeinere Variationsart sich ihr entzieht. Sodann hat *Scheeffer* aber bemerkt (Fussn. 108), dass jene Theorie auch bei der spezielleren Variationsart in ihrer älteren Form nicht ohne weiteres hinreichende Bedingungen des Extremums ergiebt, und hat solche für J_1 aus der *Jacobi*'schen Form der zweiten Variation nach einer neuen Methode abgeleitet. Aus dieser Form folgt zunächst, wenn $u\xi = \delta y$ gesetzt wird, und c^2 eine von δy unabhängige, positive Konstante bedeutet,

111) Untersuchungen p. 28.

112) J. f. Math. 103 (1888), p. 22.

113) Math. Ann. 25 (1885), p. 594.

114) *Schwarz*, Ges. math. Abh. 1, p. 235.

$$|\delta^2 J_1| > c^2 \int_a^b \zeta'^2\, dx.$$

Ist nun R_3 der nach den quadratischen Gliedern folgende Rest in der nach δy und $\delta y'$ fortschreitenden *Taylor*'schen Entwicklung von $f(x, y + \delta y, y' + \delta y')$, sind ferner c_1 und c_2 Konstante, so hat man

$$|R_3| < c_1 (|\xi| + |\xi'|)(\xi^2 + \xi'^2),$$

$$\left| \int_a^b R_3\, dx \right| < c_1 (\xi_0 + \xi_0') \left\{ \int_a^b \xi^2\, dx + \int_a^b \xi'^2\, dx \right\},$$

wobei ξ_0, ξ_0' die oberen Grenzen von ξ und ξ' sind. Weiter beweist *Scheeffer* das Lemma

$$\int_a^b \xi^2\, dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b \xi'^2\, dx$$

für willkürliche Funktionen ξ; daraus folgt

$$\left| \frac{1}{\delta^2 J_1} \int_a^b R_3\, dx \right| < c_2 (\xi_0 + \xi_0'). \tag{32}$$

Die Grössen ξ_0, ξ_0' werden aber unendlich klein, wenn dies von den oberen Grenzen der Grössen δy, $\delta y'$ gilt; da nun die genaue Gleichung

$$\int_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx = J_1 + \frac{1}{2}\, \delta^2 J_1 + \int_a^b R_3\, dx$$

besteht, so lehrt die Gleichung (32), dass der Zuwachs des Integrals das Zeichen der zweiten Variation hat, sobald δy, $\delta y'$ im ganzen Integrationsgebiet hinlänglich klein genommen werden. Damit sind für das Integral J_1 die Bedingungen (I), (II) als hinreichend für das Bestehen eines Extremums im gewöhnlichen, engeren Sinne nachgewiesen. Dasselbe Ziel erreicht *Kneser*[115]) für das engere Extremum des Integrals U_n (m beliebig) auf Grund der Theorie der Transformation der zweiten Variation mittelst der von *Lagrange* (Nr. **12**) gegebenen Modifikation der *Legendre*'schen Theorie.

Hier werde noch auf einige verfehlte oder ergänzungsbedürftige Versuche, hinreichende Bedingungen des Extremums abzuleiten, hingewiesen. *C. E. Lundström*[116]) sucht die Bedingungen (I), (II) (Nr. **16**) für den Fall des Integrals J_n ohne die Transformation der zweiten Variation abzuleiten; er beweist, indem er die Ordnungen der Kleinheit von

115) Math. Ann. 51 (1898), p. 321.

116) Fussn. 94, p. 28; Fussn. 95, p. 10, 20.

δy und $\delta y'$ vergleicht, dass bei hinreichend engem Integrationsintervall die Vorzeichen von $\delta^2 J_n$ und $\frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(n)})^2}$ übereinstimmen. Dass dies aber auch noch gilt, solange das Intervall den zum Anfangspunkt konjugierten nicht umfasst, wird nur bewiesen vermittelst der keineswegs selbstverständlichen Annahme, es gebe, wenn man an einer bestimmten Stelle a zu integrieren beginnt, eine erste Stelle a_1 von der Beschaffenheit, dass die zweite Variation des von a bis a_1 erstreckten Integrals J_n verschwinden kann, ohne dass δy identisch verschwindet. Auf sehr ähnlichen Bahnen bewegen sich die Versuche von *E. Culverwell* [117]) und *B. Turksma* [118]). *W. Jermakoff* [119]) geht aus von der verallgemeinerten *Jacobi-Hamilton*'schen Methode; er untersucht aber nicht, in welchem Umfang die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen existieren; die Bedingung (II) tritt infolge dessen garnicht auf, während doch ihre Notwendigkeit nach *Scheeffer* und *Erdmann* feststeht.

21. Hinreichende Bedingungen nach Weierstrass; das isoperimetrische Problem im engeren Sinne. *K. Weierstrass* [120]) sieht x und y als Funktionen eines Parameters t an, wodurch es ermöglicht wird, auch solche Kurven ins Auge zu fassen, längs deren y nicht eine eindeutige Funktion von x ist. Es wird dabei eine willkürliche Funktion eingeführt, und gewisse Ausdrücke müssen als von dieser unabhängig nachgewiesen werden, was *Zermelo* [121]) für den Fall des Integrals J_n durchgeführt hat. Bei der folgenden Darstellung ist von dieser formalen Neuerung abgesehen und die bisherige Bezeichnung beibehalten.

Weierstrass geht, um eine hinreichende Bedingung des Extremums zu erhalten, von der Betrachtung des Aggregats

$$(A_0 A_1) + \overline{(A_1 A_2)} - (A_0 A_2) \tag{33}$$

aus, wobei die Klammer $(A_\mu A_\nu)$ den Wert des gegebenen Integrals U_n bedeutet, wenn man längs der die A_μ und A_ν verbindenden Ex-

117) Lond. Trans. 178 (1888), p. 95; Proc. London math. soc. 23 (1892), p. 241.

118) De eerste en tweede variatie van enkelvoudige integraalen en hare toepassing op het beghinsel van Hamilton en dat der kleinste werking, Amsterdam 1894, p. 18, 22.

119) Kiew Univ.-Nachr. 31, September 1891.

120) *Zermelo,* Untersuchungen [Fussn. 19]; *Harris Hancock,* Annals of math. 9 (1895/96), p. 180; 10, p. 81; 11, p. 20; *Mayer,* Leipz. Ber. 48 (1896), p. 438.

121) *Zermelo,* Untersuchungen p. 2.

tremale integriert, die überstrichene Klammer die analoge Bedeutung hat, wenn man längs einer beliebigen A_0 und A_2 verbindenden Kurve $\mathfrak{C}'$ integriert. Speziell wird der Fall ins Auge gefasst, dass A_1 an A_2 unendlich nahe heranrückt, sodass die Extremale A_0A_1 als Variation von A_0A_2 mit Verschiebung des einen Endpunktes angesehen werden kann. Wendet man die *Euler*'sche Variationsformel (4) an und setzt längs der Kurve $\mathfrak{C}'$ allgemein $dy_\nu : dx = p_\nu$, so ergiebt sich

$$(A_0A_1) - (A_0A_2) = \left[\delta x\left(F + \sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu - y'_\nu)\frac{\partial F'}{\partial y'_\nu}\right)\right]_{x=x_2}.$$

Nun ist offenbar

$$-\overline{(A_1A_2)} = [\delta x F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)]_{x=x_2},$$

also

$$(A_0A_1) + \overline{(A_1A_2)} - (A_0A_2) = (\overline{E}\delta x)_{x=x_2},$$

wenn gesetzt wird

$$\overline{E} = F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) - F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}(y'_\nu - p_\nu)\frac{\partial F(x, \ldots, y'_1 \ldots y'_n)}{\partial y'_\nu}.$$

Liegt nun A_1 irgendwo auf der Kurve $\mathfrak{C}'$ und ist A_1' der auf dieser von A_1 nach A_0 hin benachbarte Punkt, so kann man die letzte Formel auf das Aggregat

$$(A_0A_1') + \overline{(A_1'A_1)} - (A_0A_1)$$

anwenden, welches als Differential der Grösse (33) angesehen werden kann, wenn A_1 längs der Kurve $\mathfrak{C}'$ von A_2 nach A_0 hin läuft. Ist daher die Grösse $\overline{E}\delta x$ konstanten Zeichens, so gilt dasselbe von dem bezeichneten Differential und der Grösse (33), mithin auch, wenn A_1 in die Lage A_0 rückt, von der Differenz

$$\overline{(A_0A_2)} - (A_0A_2) = \delta\int_{x_0}^{x_2} f\,dx.$$

Da nun $\mathfrak{C}'$ nur dann als Variation der Extremale A_0A_2 oder $\mathfrak{C}$ auftreten kann, wenn

$$(34) \qquad \varphi_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m);$$

da ferner die Konstruktion der Extremalen A_0A_1 nur dann eindeutig bestimmt ist, wenn $\mathfrak{C}$ zwischen A_0 und A_2 kein Paar konjugierter Punkte enthält, so schliesst *Weierstrass*: wenn die Grösse $\overline{E}\delta x$ unter der Voraussetzung (34) längs des betrachteten Extre-

malenstücks ein konstantes Zeichen hat und die Bedingung (II) erfüllt ist, so ist ein Extremum sogar im weiteren Sinne vorhanden; denn es wird nicht benutzt, dass in entsprechenden Punkten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ die entsprechenden Grössen $dy_\nu : dx$ wenig von einander abweichen.

Nimmt man dagegen an, die Differenzen $p_\nu - y'_\nu$ seien klein, womit man auf den gewöhnlichen, engeren Begriff des Extremums zurückkommt, so läuft das *Weierstrass*'sche Kriterium auf die beiden Bedingungen (I), (II) hinaus. Denn unter dieser Voraussetzung ist δx stets negativ, und man kann offenbar entwickeln:

$$\overline{E} = -\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 F(x\,y\,y')}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} (p_\mu - y'_\mu)(p_\nu - y'_\nu) + \cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in den Grössen $p_\nu - y'_\nu$ von mindestens dritter Dimension sind, und die Gleichungen (34) ergeben in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $\varphi_\varrho(x, \ldots, y'_n) = 0$

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho(x\,y\,y')}{\partial y'_\nu} (p_\nu - y'_\nu) + \cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in den Grössen $p_\nu - y'_\nu$ von mindestens zweiter Dimension sind. Die Grösse $\overline{E}$ hat also jetzt ein konstantes Zeichen, sobald die Bedingung (I) erfüllt ist; die Bedingungen (I), (II) wären somit als hinreichend für das Eintreten des Extremums nachgewiesen.

Eine authentische Darstellung dieser *Weierstrass*'schen Untersuchungen liegt nicht vor[121a]); *Zermelo* (Fussn. 19) hat sie für den Fall des Integrals J_n durchgeführt. Die Hauptschwierigkeiten, welche bei einer solchen Darstellung zu überwinden wären, dürften folgende sein: 1) der Nachweis, dass die Extremalen $A_0 A_1$ konstruiert werden können, oder dass die Determinante Δ nicht identisch verschwindet; 2) der Nachweis, dass $\overline{E}$ nicht längs einer Kurve $\mathfrak{C}'$ überall verschwinden kann. Übrigens betrachtet *Weierstrass* nicht direkt die Grösse $\overline{E}$, sondern eine davon durch einen gewissen Faktor unterschiedene Grösse E, welche für J_1 so definiert wird, dass die Grösse (33), wenn A_1 unendlich nahe bei A_2 liegt, und ds das Bogenelement der Kurve $\mathfrak{C}'$ ist, den Wert $E\,ds$ erhält.

Beispiele (U_2, $m = 1$) für die *Weierstrass*'sche Methode giebt *H. A. Schwarz*[122]); in seinem Beweis des Satzes, dass der Kreis

121a) Auf Vorlesungshefte ist im vorliegenden Referat keine Rücksicht genommen, da dies für den Leser ohne Nutzen wäre, ausserdem auch die handschriftliche Tradition sehr unsicher ist.

122) Gött. Nachr. 1884, Ges. Abh. 2, p. 327.

kleineren Umfang hat als jede geschlossene Linie von gleichem Flächeninhalt, kommt die Methode dadurch zur Geltung, dass, wenn A_0A_2 ein Bogen der variierten Kurve ist, ein Kreisbogen A_0A_1 konstruiert wird, der mit seiner Sehne dieselbe Fläche wie der erstgenannte Bogen A_0A_2 einschliesst; eine analoge Konstruktion wird benützt beim Beweis des Satzes, dass unter den Rotationsflächen gegebenen Volumens die Kugel die kleinste Fläche hat.

Weierstrass hat übrigens bewiesen[123]), dass bei J_1 die Grösse E nicht konstanten Zeichens sein kann, wenn $f(x, y, y')$ eine rationale Funktion von y' ist. In diesem Falle, der offenbar beim Problem der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes eintritt, kann also nur von einem Extremum im engeren Sinne die Rede sein. Für $n > 1$ gilt der Satz nicht mehr, wie *Zermelo* zeigt.

22. Höhere Variationen; hinreichende Bedingungen bei variablen Grenzen. Die bisher besprochenen hinreichenden Bedingungen des Extremums beziehen sich auf den Fall fester Integrationsgrenzen und lehren nichts, wenn es sich darum handelt, das Extremum bei variablen, gewissen Bedingungen unterworfenen Grenzwerten zu sichern. Notwendige Bedingungen auch für diesen Fall hat schon *Lagrange* (Nr. 3) aufstellen gelehrt; *Todhunter*[124]) scheint zuerst den Zuwachs, der unendlich klein zweiter Ordnung ist, bei variablen Grenzen in einem speziellen Falle explicite aufgestellt zu haben. *Lindström*[125]) hat sodann ohne völlig ausreichende Begründung die hinreichenden Bedingungen des Extremums bei variablen Grenzen angegeben. Später hat man den Algorithmus der höheren Variationen herangezogen.

Offenbar kann die Variation irgend einer Grösse δu als eine Funktion von x angesehen und selbst wieder variiert werden, d. h. vermehrt um eine willkürliche Funktion von x, die im Verhältnis zu δu selbst klein ist und durch $\delta^2 u$ bezeichnet wird; ebenso kann man von dieser eine im Verhältnis zu ihr kleine Variation $\delta^3 u$ bilden u. s. f. Die Operationsregeln für das wiederholte Zeichen δ werden dann ebenso wie für das einfache mit denen des Differentialzeichens identisch sein. Eine klare und zugleich hinreichend allgemeine Erörterung dieses Begriffs der höheren Variationen scheint trotz mancher Diskussionen[126]) nicht vorzuliegen. *Erdmann*[127]) giebt

123) *Zermelo,* Untersuchungen [Fussn. 19], p. 62.

124) History, p. 330.

125) S. Fussn. 95, p. 24.

126) *Schnuse,* Einleitung der Übersetzung von *Jellett.*

127) Zeitschr. Math. Phys. 22 (1877), p. 324; 23 (1878), p. 370; 26 (1881), p. 75.

eine Erörterung auf Grund des in Nr. **5** erwähnten speziellen Begriffs der einfachen Variation und setzt

$$\delta^k u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\, dt^k,$$

womit die Operationsregeln gesichert sind. Man erhält so z. B., wenn $\delta x = 0$:

$$\delta^2 J_1 = \delta \int_a^b dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y'\right)$$

$$= \int_a^b dx \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\delta y^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\,\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,\delta y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta^2 y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta^2 y'\right\};$$

die mit $\delta^2 y$, $\delta^2 y'$ behafteten Glieder lassen sich aber durch partielle Integration wegschaffen, wenn $\delta J_1 = 0$, sodass in diesem Falle die zweite Variation von J_1 dieselbe Bedeutung hat, wie bisher.

Im Fall variabler Grenzen erhält *Erdmann* für $\delta^2 J_1$ einen komplizierteren Ausdruck; die Verallgemeinerung für das Integral U_n hat *Mayer*[128]) gegeben. *Erdmann* führt die bei der *Jacobi-Hesse*'schen Transformation (Nr. **13**) gebräuchlichen Grössen ein, und leitet mit Hülfe des so erhaltenen Ausdrucks von $\delta^2 J_1$ hinreichende Bedingungen des Extremums bei variablen Grenzen ab. Er wendet seine Methode mit Erfolg an auf das Beispiel einer Kurve gegebener Länge, welche mit einer festen Kurve einen extremen Flächenraum einschliessen soll, während der Endpunkt auf der festen Kurve nach Belieben gewählt werden kann; ferner auf das Problem der kürzesten Linie zwischen gegebenen Kurven. Eine etwas speziellere Fassung gab *Mayer*[129]) der Aufgabe des Extremums bei variablen Grenzwerten, indem er unter allen Extremalen, die den Grenzbedingungen genügen, diejenige sucht, welche das Integral zum Extremum macht. In dieser Fassung hat man im Grunde ein Problem des gewöhnlichen Extremums vor sich, dessen Lösung, wie *Mayer* zeigt, durch Benutzung der *Jacobi-Hamilton*'schen Methode erleichtert werden kann. *Erdmann* hat diese schon früher erwähnte Problemstellung beanstandet[130]); in der That liefert eine Extremale noch nicht mit Sicherheit ein Extremum unter allen Kurven überhaupt, wenn sie unter allen Extremalen ein Extremum ergiebt. Später hat *Mayer*[129]) die Aufgabe auch in der allgemeineren Fassung betrachtet und hin-

128) Leipz. Ber. 36 (1884), p. 29.
129) Leipz. Ber. 48 (1896), p. 436.
130) Zeitschr. Math. Phys. (2) 23, p. 362.

reichende Bedingungen des Extremums abgeleitet; es sind dieselben wie sie sich bei der spezielleren Aufgabe ergeben. *Mayer* betrachtet u. a. das Beispiel der Kurve gegebener Länge, deren Schwerpunkt möglichst tief liegt, während einer ihrer Endpunkte einer gegebenen Kurve angehört. Dass man bei der Ableitung dieser Kriterien vom Zeichen der Glieder zweiter Dimension auf das des ganzen Zuwachses schliesst, ist in demselben Umfang wie beim gewöhnlichen Extremum berechtigt.

Die Betrachtungen *Erdmann*'s über höhere Variationen, um über das Extremum bei einem durch zwei konjugierte Punkte begrenzten Extremalenstück zu entscheiden, können nicht als völlig ausreichend angesehen werden aus denselben Gründen, wie die älteren Untersuchungen über die zweite Variation (Nr. 19).

23. Steiner's Sätze über Figuren extremen Flächeninhalts; diskontinuierliche Lösungen. *J. Steiner*[131]) hat die isoperimetrische Aufgabe im engeren Sinne nach fünf verschiedenen geometrischen Methoden behandelt, von denen die zweite und dritte auf den mit elementaren Mitteln ableitbaren Extremumseigenschaften der in und um den Kreis beschriebenen Polygone, die übrigen auf den Symmetrieeigenschaften des Kreises beruhen. Alle diese Methoden geben ein Verfahren, eine nicht kreisförmige Figur des gegebenen Umfangs zu verkleinern, zeigen aber nicht, dass die fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens konvergiert, d. h. zu einer bestimmten Grenzfigur führt, ein Mangel, der übrigens z. B. bei der vierten Methode leicht zu heben sein dürfte. *Steiner* behandelt dann eine grosse Anzahl von Aufgaben, in denen das Minimum des Inhalts bei gegebenem Umfang unter der Voraussetzung gewisser Schranken gesucht wird, d. h. es wird festgesetzt, dass die gesuchte Kurve ein gewisses Gebiet nicht überschreiten, oder mit gewissen Linien Teile oder einzelne Punkte gemein haben soll. Eine spezielle Aufgabe dieser Art hat schon *Legendre*[132]) mittelst der Variationsrechnung behandelt. *Steiner* bestätigt an allen von ihm behandelten Aufgaben eine Gruppe von Sätzen, die er ohne Beweis ausgesprochen hatte[133]), indem er statt des gewöhnlichen isoperimetrischen Problems die Aufgabe nimmt, auf einer beliebigen Fläche die Kurve kürzesten Umrings zu konstruieren, d. h. die Kurve, deren Umfang bei gegebener Fläche mini-

131) J. f. Math. 18 (1839), Werke 2, p. 75; J. de math. (1) 6; J. f. Math. 24, Werke 2, p. 177, 243.

132) Ostwald's Klass. Nr. 47, p. 76.

133) Berl. Ber. 1839, Werke 2, p. 165.

mal ist. Diese Kurven hatte vor *Steiner* schon *F. Minding*[134]) behandelt, und mit Benutzung der *Gauss*'schen krummlinigen Koordinaten durch Variationsrechnung gezeigt, dass die gesuchten Kurven konstante geodätische Krümmung besitzen. Die allgemeinen *Steiner*schen Sätze sind nun folgende. Wenn auf irgend einer Fläche eine Figur von gegebenen Umfang und maximalem Inhalt die Seiten irgend eines krummlinigen Polygons nicht überschreiten soll, aber mit ihnen Punkte oder Strecken gemein haben darf, so sind die freien Teile des Umfangs der gesuchten Linie Kurven kürzesten Umrings mit gleichen Werten der konstanten geodätischen Krümmung; jede Seite des Vielecks wird von den an sie stossenden freien Teilen der gesuchten Kurve berührt oder unter gleichen Winkeln geschnitten; und zwar tritt, was *Steiner* bei allen Beispielen bestätigt, Berührung ein, wenn die Kurve durch ein endliches Stück mit der Vieleckseite zusammenfällt. In der Ebene sind natürlich die Kurven kürzesten Umrings Kreisbögen, deren Radius das Reziproke ihrer geodätischen Krümmung ist; ebenso auf der Kugelfläche, für welche *Steiner* ebenfalls Beispiele behandelt.

Minding[135]) hat für die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen ein erstes Integral der Gleichung der Kurven kürzesten Umrings abgeleitet; er behandelt ferner die Aufgabe, die geschlossene Kurve kürzesten Umrings bei gegebener Fläche zu konstruieren, die verschiedenen Beschränkungen unterworfen wird, z. B. innerhalb einer von zwei Breitenkreisen begrenzten Zone der Rotationsfläche liegen, oder zum Teil gegeben sein soll; die erhaltenen Resultate können als Bestätigung der *Steiner*'schen Sätze angesehen werden. *Minding* beweist ferner[136]), indem er die Kurven kleinsten Umrings als Gleichgewichtsfiguren eines unausdehnbaren Fadens bei einer zur Fläche tangential, zum Faden normal wirkenden konstanten Kraft ansieht, die *Steiner*'schen Sätze, ohne jedoch den Fall zu betrachten, dass die Kurve kürzesten Umrings und die Polygonseite einen von Null verschiedenen Winkel bilden, und dehnt die bei den Rotationsflächen durchgeführten Betrachtungen auf alle Flächen aus, für welche man eine Schar geschlossener Linien kürzesten Umrings kennt.

Todhunter[137]) hat für eine Reihe von Einzelaufgaben des Extremums isoperimetrische und andere Untersuchungen durchgeführt,

134) J. f. Math. 5 (1830), p. 297.

135) Petersb. Bull. 21 (1876), p. 252; 24 (1877), p. 328; 25, p. 190. Mélanges math. 5.

136) J. f. Math. 86 (1879), p. 279.

137) Researches [Fussn. 110].

welche den *Steiner*'schen analog sind, indem er davon ausgeht, dass schon wenn Anfangs- und Endpunkt gegeben sind, oft eine sie verbindende Extremale nicht konstruiert werden kann. Dasselbe gilt noch mehr, wenn Beschränkungen anderer Art vorliegen, z. B. Schranken, welche nicht überschritten werden sollen. Er versucht in solchen Fällen durch Kombination verschiedener Extremalen ein Extremum zu erreichen; die erhaltenen Kurven sind im allgemeinen diskontinuierlich, d. h. mindestens einige der Unbekannten oder ihrer Ableitungen haben einzelne Unstetigkeiten. Ohne die den *Steiner*'schen analogen Sätze anders als teilweise und induktiv zu erhalten, hebt er doch[138]) als den allgemeinen analytischen Charakter der Extremumsaufgaben mit Beschränkungen hervor, dass die Variationen der Unbekannten wenigstens streckenweise, z. B. an den Schranken, Ungleichungen unterworfen sind, wodurch die in Nr. 6 besprochenen Schlüsse ihre Gültigkeit verlieren. In einigen Aufgaben[138a]) wird auch der Begriff des Extremums dadurch beschränkt, dass die gefundene Kurve nur mit andern verglichen wird, in denen die Konkavität nach derselben Seite gerichtet ist u. dgl.

E. Heine[139]) hat als von *Weierstrass* herrührend den Satz angegeben, dass wenn δJ_n verschwinden soll und man längs einer diskontinuierlichen Kurve integriert, die Grössen $R_0, R_1, \ldots$ (Nr. 4) in jeder Unstetigkeitsstelle stetig bleiben müssen. Für $n = 1$ also würde dies von der einen Grösse $\partial f : \partial y'$ gelten. *Erdmann*[140]) hat sodann bewiesen, dass für $n = 1$ die beiden Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

stetig sein müssen; seine Argumentation geht über die von *Heine* gegebene hinaus, indem er nicht, wie dieser, δx in den Unstetigkeitsstellen $= 0$ setzt. Natürlich gelten seine Schlüsse nur, wenn blos eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten zugelassen werden. — Derselbe Satz findet sich in den Mittheilungen von *Harris Hancock*[141]) über *Weierstrass*' Untersuchungen in etwas modifizierter Form. *Erdmann* behandelt ferner die Aufgabe, J_1 zu einem Minimum zu machen, wenn die gesuchte Kurve auf ein gewisses Gebiet beschränkt bleiben soll. Dieses werde dadurch definiert, dass in ihm die Gleichung $y = \varphi(x, z)$ für z reelle Werte ergebe, sodass $\varphi'(z) = 0$ die Glei-

138) Researches, p. 14.
138a) Researches, p. 76.
139) Math. Ann. 2, p. 190.
140) J. f. Math. 82 (1877), p. 21.
141) Ann. of math. 11, p. 31.

chung der Grenzlinie ist; dann kann die gestellte Aufgabe dadurch ersetzt werden, dass man das Extremum des Integrals

$$J_1 = \int f(x, \varphi(x, z), \varphi'(x))dx$$

aufsucht, dessen Extremalen durch die Gleichung

$$\varphi'(z)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

definiert werden, in welcher man y durch $\varphi(x, z)$ ersetzt. Indem er auf diese Gleichung den erwähnten Satz anwendet, schliesst *Erdmann*, dass die Lösung der Aufgabe aus Stücken der Grenzkurve und Extremalen des Integrals J_1 zusammengesetzt sein müsse, und dass zwei endlich ausgedehnte Linienstücke dieser beiden Arten sich berühren müssen, wo sie zusammentreffen. Die Angaben über den Fall, dass zwei Extremalenstücke in einem Punkt der Grenzlinie zusammentreffen, sind nicht vollständig. Für die Sicherung der ganzen Argumentation wären über das analytische Verhalten von $\varphi(x, z)$ in den betrachteten Wertsystemen genauere Voraussetzungen zu machen. Für die kürzeste Linie in einem beliebig begrenzten Flächenstück hat *Darboux* [142]) eine Reihe von Sätzen bewiesen, speziell dass ein der kürzesten Linie angehöriges Begrenzungsstück von dem sich anschliessenden geodätischen Bogen berührt wird.

Weierstrass [143]) scheint aus der Definition des Zeichens E (Nr. 21) folgenden Satz abgeleitet zu haben. Es seien AB und CB zwei Extremalenstücke eines Integrals J_1 mit isoperimetrischer Bedingungsgleichung $K_1 = \text{const.}$, B ein Punkt der Begrenzung; die Sinus der Winkel, welche die Begrenzung in B mit den Bögen BA und BC macht, verhalten sich, wenn die Kurve ABC das Integral zum Extremum macht, wie die Grössen E, die man im Punkte B für AB erhält, indem man p durch die Richtung BC, und für CB, indem man p durch die Richtung BA definiert. Damit ist ein bisher noch nicht vollständig erledigter Teil der *Steiner*'schen Sätze verallgemeinert. *Weierstrass* scheint ferner bewiesen zu haben, dass ein Extremalenstück, wenn es mit einem Stück der Grenzlinie zusammen das Integral zum Extremum macht, dieses Stück berühren muss, d. h. dass der von *Erdmann* aufgestellte Satz auf isoperimetrische Aufgaben übertragen ist.

24. Mehrfache Integrale; Transformation der ersten Variation. Bei Doppelintegralen, welche über eine unbekannte Fläche erstreckt

142) Théorie générale des surfaces, 3, p. 106 f. S. auch *E. B. Christoffel*, Berl. Abh. 1868, p. 129.

143) Vgl. *Kobb*, Acta math. 17 (1893), p. 343.

werden und bei den analogen Aufgaben für höhere Mannigfaltigkeiten ist die Fragestellung und der Zusammenhang zwischen dem Extremum und dem Verschwinden der ersten Variation derselbe wie bei einfachen Integralen, doch sind die meisten Darstellungen hier noch weniger streng. *Lagrange*[144]) bildet die Variation eines Doppelintegrals, wenn z eine unbekannte Funktion von x und y und p, q ihre ersten Ableitungen sind, unter der Annahme $\delta x = \delta y = 0$, d. h. es wird die variierte Fläche auf die ursprüngliche durch Parallele zur z-Axe eindeutig bezogen. Alsdann ist das Zeichen δ mit dem der partiellen Differentiation nach x und y vertauschbar, und man erhält, da die zweite Formel (1) auch für Doppelintegrale gilt,

$$(35)\qquad \begin{aligned}\delta J &= \delta \iint dx\,dy\, f(x, y, z, p, q)\\ &= \iint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right)\delta z\\ &+ \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right) + \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\,\delta z\right),\end{aligned}$$

wobei die Differentiation nach x und y auch auf z, p, q, δz erstreckt wird.

Wird nun die Projektion der Fläche auf die Ebene $z = 0$ von den Linien $y = \text{const.}$ in den Punkten 1 und 2 getroffen, so hat man in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$(36)\qquad \iint dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right) = \int dy \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial p}\,\delta z\right)_1\right\};$$

dieser Ausdruck verschwindet, wenn δz an der Grenze des Integrationsgebiets verschwindet, ähnliches gilt vom letzten Gliede der rechten Seite in (35), und eine Argumentation analog der in Nr. **6** angedeuteten ergiebt als notwendige Bedingung des Extremums

$$(37)\qquad H = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0.$$

Nach einem misslungenen Versuch von *Euler*[145]) hat *Poisson*[146]) die Variation des Integrals J ohne die Voraussetzungen $\delta x = \delta y = 0$ gebildet, indem er x, y, z als Funktionen von zwei der Variation nicht unterworfenen Parametern u, v ansieht, sodass die Zeichen $\partial : \partial u$ und $\partial : \partial v$ mit δ vertauschbar sind. Er erhält auf diese Weise ein Analogon der *Euler*'schen Formel (4), und zwar auch für den Fall, dass Ableitungen beliebig hoher Ordnung vorkommen.

144) Oeuvres 1, p. 353.
145) Inst. calc. int., Appendix § 141, p. 464 (ed. II).
146) Par. Mém. 12 (1832), p. 290, 294.

Gauss[147]) bringt zuerst die Glieder von der Form (36) für spezielle Integrale, darunter das Oberflächenintegral, in eine zur Diskussion geeignete Form, sodass die Betrachtung der Extrema bei variablen Integrationsgrenzen möglich wird. Er führt eine bestimmte Fortgangsrichtung auf der Begrenzungslinie ein; hierdurch gelingt es ihm, die beiden Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (36) auf dieselbe Form zu bringen und das ganze Integral in ein längs der Begrenzungslinie in der festgesetzten Richtung erstrecktes umzuwandeln. Es ist dies eine von *Gauss* vielfach angewandte Betrachtung, welche auch den *Green*'schen Umwandlungen von Flächenintegralen in Linienintegrale (II A 2, Nr. 45) zu Grunde liegt. *Poisson* (Fussn. 146) führt die *Gauss*'sche Betrachtung für allgemeine Integrale J durch und untersucht die Folgerungen, die man allgemein aus der Gleichung $\delta J = 0$ bei variablen Grenzen ziehen kann, z. B. wenn die Grenzlinie auf einer gegebenen Fläche liegen soll, und stellt Schätzungen darüber an, inwiefern die bei der Integration der Gleichung (37) auftretenden willkürlichen Funktionen durch Grenzbedingungen bestimmt werden. Er betrachtet den Fall, dass unter dem Integralzeichen $dx\,dy$ mit dem Quadrat der mittleren Krümmung multipliziert ist; ein etwas allgemeineres Integral tritt in *Poisson*'s Theorie der elastischen Platte auf, welche von *Kirchhoff* (s. Nr. 26) erweitert und berichtigt ist. — *Ostrogradsky*[148]) dehnt *Poisson*'s Untersuchungen, besonders auch die Verwandlung von Integralen verschiedener Vielfachheit in einander auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen aus. Mit der formalen Umgestaltung der ersten Variation vielfacher Integrale beschäftigen sich ausgedehnte Untersuchungen von *Sarrus*[149]) und *Cauchy*[150]) sowie eine Note von *Lindelöf*[151]).

25. Zweite Variation und hinreichende Bedingungen des Extremums von Doppelintegralen. Versuche, *hinreichende* Bedingungen des Extremums abzuleiten, sind nur für den Fall einer festen Grenze des Integrationsgebiets angestellt. *V. Brunacci*[152]) hat die Untersuchung von *Legendre* (Nr. 12), und zwar in der ihr von *Lagrange* gegebenen Modifikation, auf das Doppelintegral J übertragen. Unter der Annahme (37) hat man offenbar

147) Gott. Comm. 7, Werke 5 (1830), p. 60.
148) J. f. Math. 15 (1839), p. 332.
149) Par. sav. [étr.] 10 (1848), p. 1.
150) Exercices d'anal. et de phys. math. 3 (1844), p. 50.
151) Par. C. R. 50 (1860), p. 85.
152) Memorie dell' istituto nazionale italiano 2 (1810), p. 121.

$$\Delta = \iint f(x, y, z+\delta z, p+\delta p, q+\delta q)\,dx\,dy - J$$
$$= \iint dx\,dy\left(\tfrac{1}{2}\varphi + R\right),$$

wobei φ eine quadratische Form von δz, δp, δq bedeutet und R die Variationen nur in mindestens dritter Dimension enthält. *Brunacci* addiert nun zu Δ die Grösse

$$\iint dx\,dy\left(\frac{\partial(\alpha\,\delta z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\,\delta z^2)}{\partial y}\right),$$

welche $= 0$ ist, da δz am Rande des Integrationsgebiets, welches natürlich dasselbe wie bei J sein soll, verschwindet. Es ergiebt sich so

$$\Delta = \iint dx\,dy\left(\tfrac{1}{2}\psi + R\right),$$

wobei ψ eine quadratische Form derselben Argumente wie φ ist; setzt man

$$D_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \quad D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\right)^2,$$
$$D_2 = D_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q} + \beta\right)^2$$
$$+ 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q} + \beta\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p} + \alpha\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p} + \alpha\right)^2,$$

so ist die Form ψ definit positiv oder negativ, je nachdem das erste oder zweite der folgenden Ungleichungssysteme gilt:

(38) $\quad D_0 > 0,\ D_1 > 0,\ D_2 > 0; \quad D_0 < 0,\ D_1 > 0,\ D_2 < 0.$

Da D_2 die Determinante der Form ψ ist und nicht verschwindet, so kann man, was *Brunacci* nicht ausführt, zeigen, dass Δ und ψ dasselbe Zeichen haben, J also ein Extremum ist. Man hat also, wenn $D_1 > 0$, α und β als stetige Funktionen so zu bestimmen, dass $D_0 D_2 > 0$, was offenbar bei hinreichender Beschränkung des Integrationsgebiets möglich ist. Mit der Untersuchung von *Brunacci* stimmt die von *Delaunay*[153]) im wesentlichen überein, erstreckt sich aber auch auf den Fall, dass der Integrand höhere Ableitungen enthält.

Clebsch[154]) bringt die zweite Variation auf eine zur Beurteilung des Zeichens geeignete Form, indem er die quadratische Form im Integranden durch eine andere von weniger Argumenten ersetzt. Für das obige Integral J kann man setzen:

---

153) J. éc. polyt. 17, cah. 29 (1843), p. 90.
154) J. f. Math. 55 (1858), p. 270.

$$\iint dx\,dy\,\varphi(\delta z,\ \delta p,\ \delta q)$$

$$= \iint dx\,dy \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta z}{m}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial p}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta z}{m}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta z}{m}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta z}{m}\right)^2 \right\},$$

wenn für m folgende Bedingungsgleichung besteht:

$$0 = -m\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial m}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial m}{\partial y}\right), \tag{39}$$

deren rechte Seite aus δH entsteht, wenn man m für δz setzt. Sie hat daher die Lösung

$$m = \sum_{\nu} C_\nu \frac{\partial z}{\partial c_\nu},$$

wenn z der Gleichung (37) genügt und die Konstanten c_ν enthält; C_ν sind weitere Konstanten. Die zweite Variation ist also unter den Voraussetzungen $D_0 > 0$, $D_1 > 0$ sicher positiv, sobald eine im ganzen Integrationsgebiet nicht verschwindende Grösse m existiert. Die Kurve $m = 0$ auf einer der Gleichung (37) genügenden Fläche, welche demnach der Umfang des Integrationsgebiets nicht erreichen darf, wenn das Zeichen der zweiten Variation nicht unsicher werden soll, kann also als Schnitt zweier benachbarter, der Gleichung (37) genügender Flächen angesehen werden und entspricht den konjugierten Punkten bei einfachen Integralen. — In einer weiteren Abhandlung[155]) bringt *Clebsch* die zweite Variation eines beliebig vielfachen Integrals mit beliebig vielen Unbekannten und Bedingungsdifferentialgleichungen auf eine zur Beurteilung des Zeichens geeignete Form; er verfolgt einen ähnlichen Gedankengang, wie bei den einfachen Integralen. Auf eine andere, den *Lipschitz-Mayer*'schen Entwicklungen (Nr. **15**) verwandte Art hat *Sabinin*[156]) die Resultate von *Clebsch* abgeleitet.

G. Kobb[157]) führt in das Integral J die *Poisson*'schen Parameter u, v ein, sodass z nicht eine im ganzen Integrationsgebiet eindeutige Funktion von x und y zu sein braucht. Er stellt hinreichende Bedingungen des Extremums auf, von denen die ersten beiden mit den Bedingungen von *Brunacci* (38) identisch sind, die letzte aber verlangt, dass eine gewisse Grösse E, welche der für einfache Integrale von *Weierstrass* (Nr. **12**) eingeführten analog ist, ein konstantes Zeichen haben soll. Es ist aber zu bezweifeln, ob diese Bedingung

155) J. f. Math. 56, p. 122.
156) Petersb. Bull. 15 (1871), p. 70.
157) Acta math. 16, p. 65; 17 (1892/93), p. 321.

für den von *Kobb* betrachteten Fall etwas besonderes verlangt; es werden nämlich nur Variationen betrachtet, bei welchen in entsprechenden Punkten die Tangentialebenen der ursprünglichen und der variierten Fläche einander nahe liegen, und für den hierdurch definierten Begriff des Extremums sind die Bedingungen von *Brunacci* allein schon hinreichend. — *Kobb* weist ferner den Zusammenhang der Gleichungen $D_2 = 0$ und (39) nach, woraus leicht geschlossen wird, dass $D_2 > 0$, wenn eine im Integrationsgebiet positive Lösung der Gleichung (39) existiert. Der Zusammenhang zwischen der rechten Seite dieser Gleichung und H (s. o.) führt ferner auf Grund einer der Formel (14) analogen Darstellung der zweiten Variation zu dem Satze, dass diese sowohl positiv wie negativ werden, ein Extremum also nicht vorhanden sein kann, wenn das Integrationsgebiet eine geschlossene Kurve $m = 0$ umfasst. — In einer zweiten Abhandlung giebt *Kobb* einen strengen Beweis der Multiplikatorregel für den Fall, dass ein Integral derselben Form wie J einen gegebenen Wert haben und dann J zum Extremum gemacht werden soll; dieser Beweis ist dem in Nr. 9 erwähnten *Scheeffer-Weierstrass*'schen verwandt. *Kobb* überträgt ferner die *Weierstrass*sche Verallgemeinerung eines *Steiner*'schen Satzes (Nr. 23) auf Doppelintegrale.

Schon *Lagrange*[158]) hat die Methode der Variationen auf das Integral des Flächeninhalts angewandt und die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen aufgestellt. Ein Bericht über die ausgedehnte Theorie derselben gehört nicht hierher[159]). Die Frage, wann eine Minimalfläche ein Minimum der Fläche liefert, ist von *H. A. Schwarz* behandelt[160]). Er bringt die zweite Variation des Inhalts einer Minimalfläche durch passende Wahl der unabhängigen und abhängigen Variablen auf die Formen

$$\iint d\xi\, d\eta \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{8 w^2}{(1+\xi^2+\eta^2)^2} \right)$$
$$= \iint d\xi\, d\eta \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{w}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{w}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 \right),$$

wobei ψ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8\psi}{(1+\xi^2+\eta^2)^2} = 0 \tag{40}$$

ist und w am Rande des Integrationsgebiets verschwindet. Diese

158) Oeuvres 1, p. 353.
159) *Darboux*, Surfaces 1, p. 267.
160) Berl. Ber. 1872, ges. Abh. 1, p. 151.

Transformation ist der von *Clebsch* gegebenen (s. o.) offenbar verwandt, indem sie wie diese die Zahl der Quadrate unter dem Integralzeichen vermindert. Hat man eine im Integrationsgebiet nicht verschwindende Grösse ψ, so ist die zweite Variation positiv. In einer späteren Arbeit[161]) hebt *Schwarz* hervor, dass aus dem Zeichen der zweiten Variation nicht mit Sicherheit auf das Eintreten des Minimums geschlossen werden könne, und beweist, dass ein Minimalflächenstück einen minimalen Inhalt hat verglichen mit allen benachbarten Flächen, welche dieselbe Randlinie haben und aus einer endlichen Anzahl analytischer Flächen zusammengesetzt sind, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: das betrachtete Minimalflächenstück kann in eine Schar ihm beliebig nahe kommender Minimalflächenstücke eingebettet werden, von denen je zwei einander unendlich nahe in ihrer ganzen Ausdehnung stets um unendlich kleine Strecken gleicher Ordnung abstehen. Die hierzu führende Betrachtung ist eine Anwendung der in Nr. 21 besprochenen Methode von *Weierstrass* auf den Fall des Flächenintegrals. *Schwarz* stellt sodann eine eingehende Untersuchung über die Integration einer allgemeinen Klasse partieller Differentialgleichungen an, zu denen die Gleichung (40) gehört, und über die Bedingungen, unter denen diese Gleichungen ein in einem gegebenen Bereich nicht verschwindendes Integral besitzen. *Schwarz*[162]) und *A. Otte*[162a]) haben ferner die Frage nach dem Eintreten des Minimums an verschiedenen speziellen Fällen untersucht[162]). Dass bei variablen Grenzen sogar der Flächeninhalt einer Minimalfläche in gewissem Sinne ein Maximum sein kann, hat *Steiner*[163]) bemerkt.

26. Übersicht der Beispiele und Anwendungen. Als reichhaltigste Sammlung von der Variationsrechnung zugänglichen Extremumsaufgaben ist noch heute *Euler*'s klassisches Werk zu nennen. Sodann sind eine Abhandlung von *K. Schellbach*[164]) und eine schon erwähnte Arbeit von *Lundström* (Fussn. 94) zu erwähnen; unter den Lehrbüchern neueren Datums steht das von *Moigno* und *Lindelöf* oben an. *Schellbach* benutzt allerdings nicht den Formalismus der Variationsrechnung, sondern Infinitesimalbetrachtungen von der in Nr. 2 erwähnten Art; er betrachtet auch eine Anzahl von Problemen mit variablen Grenzwerten, geht aber nirgends über die Aufstellung

161) Fenn. acta 15 (1885), ges. Abh. 1, p. 222.
162) Gött. Abh. 34 (1887), ges. Abh. 1, p. 270.
162a) Diss. Göttingen 1894.
163) Berl. Ber. 1840, Werke 2, p. 176.
164) J. f. Math. 41 (1851), p. 293.

notwendiger Bedingungen hinaus, während *Lundström* mehrfach Ansätze zur Ableitung hinreichender Bedingungen macht. Ausführliche Monographien der Brachistochrone und verwandter Probleme lieferten *J. N. Haton de la Goupillière*[165]) und *E. Vicaire*[166]). Wir erwähnen noch die isoperimetrischen Aufgaben von *S. Rumowski*[167]), *H. Kiessling*[168]) und *G. Darboux*[169]). Ohne eine Zusammenstellung der bisher bearbeiteten Einzelaufgaben[170]) zu versuchen, können wir dieselben, abgesehen von den rein analytischen, welche bisher keine grosse Bedeutung gewonnen haben, in drei Gruppen anordnen: die geometrischen, diejenigen mechanischen, in denen durch die Extremumsforderung ein zu den Daten des mechanischen Vorgangs gehöriges funktionales Verhältnis bestimmt wird, und diejenigen mechanischen, in welchen der Bewegungs- oder Gleichgewichtszustand durch ein Extremum wie das der potentiellen Energie, Aktion oder des *Hamilton*'schen Integrals definiert wird. Bei den ersten beiden Gruppen ist die Thatsache des Extremums von vornherein der Gegenstand des Interesses und die Ableitung notwendiger und hinreichender Bedingungen direkt gefordert. Bei der dritten Gruppe handelt es sich zunächst darum, aus dem Verschwinden der ersten Variation eines begrifflich einfachen Integrals die Differentialgleichungen des mechanischen Vorgangs abzuleiten; die Aufstellung hinreichender Bedingungen des Extremums wird erst erforderlich, wenn man dazu übergeht, die Stabilität des Gleichgewichts- oder Bewegungszustandes zu untersuchen.

Bei den Aufgaben der ersten beiden Gruppen ist die Bestimmung der konjugierten Punkte und damit die Aufstellung hinreichender Bedingungen des Extremums nur in verhältnismässig wenigen Fällen durchgeführt, z. B. von *L. Lindelöf*[171]) für die Kettenlinie als Meridian der kleinsten Rotationsfläche und für die gewöhnliche Brachistochrone, von *Dienger*[172]) für die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes, von *Lundström* (Fussn. 95) und *Mayer*[173]) für die Kettenlinie als Linie tiefsten Schwerpunktes bei gegebener Länge, von *Howe* und *Hormann* (Fussn. 100, 101) für die kleinste Rotationsfläche gegebenen

165) Par. sav. [étr.] 27 (1883) Nr. 4; 29 (1884).
166) Par sav. [étr.] 31 (1885).
167) Petrop. N. comm. 8 (1763), p. 189.
168) Progr. Berlin 1866.
169) Surfaces 3 (1894), p. 149.
170) Ein Verzeichnis giebt *Pascal* p. 190.
171) *Moigno-Lindelöf*, p. 209, 231.
172) Grundriss p. 25.
173) Math. Ann. 13 (1878), p. 65.

Volumens, von *Venske*[174]) für einen speziellen Fall der kürzesten Raumkurve von konstanter erster Krümmung, von *Todhunter*[175]) und *Sonin* (Fussn. 56) für das Integral $\int yf(y')dx$, und einige andere Aufgaben, wobei aber *Todhunter* unvollständig ist und fehlerhafte allgemeine Behauptungen aufstellt[176]). Vom isoperimetrischen Problem im engeren Sinne ist in Nr. 21 und 23 die Rede gewesen. Für die geodätischen Linien, welche auch als Lösung einer Aufgabe der dritten Gruppe auftreten, hat *O. Bonnet*[177]) gezeigt, dass die konjugierten Punkte durch die Nullstellen der Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \varkappa u = 0$$

bestimmt werden, wenn $\varkappa$ das Krümmungsmass, s den geodätischen Bogen bedeutet. Daraus folgt, dass wenn längs einer geodätischen Linie das Krümmungsmass negativ ist, überhaupt kein Paar konjugierter Punkte vorhanden sind, wie auch *Jacobi* in seinen Vorlesungen ohne Beweis bemerkt[178]). Ferner untersucht diese Punkte *E. B. Christoffel*[179]), für Flächen zweiter Ordnung *Jacobi*[180]) und *H. von Mangoldt*[181]).

Zu der dritten der bezeichneten Gruppen gehört erstens jede Aufgabe der Statik, in welcher es sich um das Gleichgewicht einer stetigen, in ihrer Gestalt veränderlichen Mannigfaltigkeit materieller Punkte handelt; hier fordert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, dass das Integral einer linearen Form von Variationen gleich Null gesetzt werde. Nachdem im Anschluss an *D. Bernoulli Euler*[182]) die Gestalt einer elastischen Feder durch Extremumsbetrachtungen bestimmt hatte, wandte *Lagrange*[183]) seine Methode der Variationsrechnung auf die Statik der biegsamen und elastischen Fäden sowie der Flüssigkeiten an; bei letzteren[184]) ist seine Anwendung der Multiplikatormethode bis heute noch nicht ausreichend begründet, da eine Differentialgleichung zwischen den Variationen selbst als Bedingung

174) Diss. Gött. 1881, p. 24.
175) Researches, p. 28.
176) Researches, p. 95.
177) Par. C. R. 40, p. 1311; 41 (1855), p. 32.
178) Werke 7, p. 72.
179) Berl. Abh. 1868.
180) Werke, Suppl. p. 47.
181) J. f. Math. 91, p. 23. Das. weitere Litteratur.
182) Meth. inv. p. 245, Additam. I.
183) Oeuvres 11, p. 77, 145 ff.
184) Oeuvres 11, p. 210.

vorgeschrieben wird, während die Anwendung jener Methode auf einfache Mannigfaltigkeiten durch die neueren Untersuchungen im allgemeinen zu rechtfertigen sein dürfte. Hierher gehört auch die Untersuchung von *Gauss* (Nr. **24**) über Kapillarität. — Ein Extremumsproblem liegt nur dann vor, wenn ein durch die Lage des Punktsystems allein bestimmter Ausdruck der potentiellen Energie vorhanden ist. Ist diese in der Gleichgewichtslage ein Minimum, so ist das Gleichgewicht stabil; die Bestimmung der konjugierten Punkte würde also zur Beurteilung der Stabilität nöthig sein. Es scheint aber diese Untersuchung nur da durchgeführt zu sein, wo die statische Aufgabe mit einer der oben erwähnten Aufgaben der ersten beiden Gruppen zusammenfällt.

Ein Problem der Dynamik gehört zur dritten Gruppe, sobald man die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Aktion oder dem *Hamilton*'schen Prinzip ableitet. Ersteres, vielleicht schon von *Leibniz* aufgestellt, erscheint in seiner engeren Form bei *Euler*[185]) für den Fall der Bewegung eines Punktes, allgemein bei *Jacobi*[186]); in dieser Form setzt es die Existenz eines von der Zeit unabhängigen Potentials voraus und reduziert die Bestimmung der Bahnkurven eines dynamischen Problems, wie *R. Lipschitz*[187]) eingehend erörtert, auf die Bestimmung der geodätischen Linien in einer Mannigfaltigkeit von gegebenem Bogenelement, wobei die Länge dem Aktionsintegral entspricht. *W. Thomson* und *P. Tait*[188]) haben diese Anschauung für spezielle Fälle benutzt.

Lagrange[189]) hat dem Prinzip der kleinsten Aktion eine weitere Form gegeben, bei welcher kein Potential zu existieren braucht. Das Verhältnis der weiteren zur engeren Form des Prinzips der kleinsten Aktion ist vielfach diskutiert; wesentlich ist für erstere, wie *O. Rodrigues*[190]) zuerst betont hat, dass die Zeit variiert werden muss, was in den Entwicklungen von *Lagrange* nicht zum Ausdruck kommt, ihnen aber auch nicht widerspricht. *Mayer*[191]) hat den Zusammenhang der beiden Formen mit einander und dem *Hamilton*'schen Prinzip klargelegt, indem er zeigte, dass bei einem sehr allgemeinen Variationsproblem drei diesen Prinzipien entsprechende Ansätze ge-

185) Meth. inv. p. 311, Additam. II.
186) Werke, Suppl. p. 41.
187) J. f. Math. 74 (1872), p. 116.
188) Treatise on natural philosophy 1^1, §§ 358—361, p. 428 (ed. II).
189) Oeuvres 1, p 376; 11, p. 315.
190) Correspondance sur l'école polytechnique 3, p. 159.
191) Leipz. Ber. 38 (1886), p. 343.

macht werden können. *O. Hölder*[191a]) hat beide Prinzipien aus einer allgemeinen, dem *d'Alembert*'schen Prinzip äquivalenten Formel durch Spezialisierung der Variationen abgeleitet, und den Begriff der variierten Bewegung genauer erörtert.

Das *Hamilton*'sche Prinzip, welches der von *Lagrange* in seiner Mechanik benutzten Umformung des *d'Alembert*'schen Prinzips verwandt ist, unterscheidet sich von dem Aktionsprinzip dadurch, dass die Zeit unvariiert bleibt; als Beispiele für die Multiplikatorenmethode in Verbindung mit dem *Hamilton*'schen Prinzip seien *G. Kirchhoff*'s[192]) ursprüngliche Darstellungen der Theorie schwingender Platten und Stäbe, sowie der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit hervorgehoben.

Ein dem *Hamilton*'schen formal ähnliches Prinzip, welches sich auf stationäre Bewegungszustände bezieht und die Form des Potentials als variierbar voraussetzt, hat *R. Clausius* aufgestellt und den Begriff der auszuführenden Variation erörtert[193]).

Die konjugierten Punkte bei dem *Jacobi*'schen Aktionsintegral haben *Thomson* und *Tait* (Fussn. 188) als kinetische Brennpunkte betrachtet und auf den Zusammenhang derselben mit der Frage der kinetischen Stabilität hingewiesen. *Darboux*[194]) hat für die Bewegung eines Punktes in der Ebene gezeigt, dass das *Hamilton*sche Integral, erstreckt über ein hinreichend kurzes Zeitintervall, ein Minimum ist. *D. Bobyleff*[195]) hat die zweite Variation des *Hamilton*schen wie des *Jacobi*'schen Aktionsintegrals allgemein auf eine zur Beurteilung des Zeichens geeignete Form gebracht und für hinreireichend kleine Integrationsgebiete als positiv nachgewiesen; er hat ferner die konjugierten Punkte der bezeichneten beiden Integrale betrachtet und als kinetische Brennpunkte der gleichzeitigen und der konservativen Wege unterschieden; letztere sind die Verallgemeinerung der *Thomson-Tait*'schen Brennpunkte, erstere sind Lagen des Massensystems, zwischen denen zwei unendlich wenig verschiedene Übergänge des Systems in derselben Zeit möglich sind. *Bobyleff* wendet seine Betrachtungen auf Beispiele an; unter diesen kommt auch ein solches vor, bei dem die lebendige Kraft in den Geschwindigkeiten lineare Glieder enthält. *B. Turksma*[196]) hat ebenfalls die konjugier-

191a) Gött. Nachr. 1896, Heft 2. Das, sowie bei *Mayer* weitere Litteratur.
192) Ges. Abh., p. 237, 285, 376.
193) Ann. Phys. Chem. 92, p. 433; J. de math. (2) 17, p. 193.
194) Théorie générale des surfaces 2, p. 451.
195) Berichte (Sapiski) der Akad. St. Petersburg 61 (1889), Beilage 5.
196) Diss. [Fussn. 118], p. 69.

ten Punkte des *Hamilton*'schen Integrals betrachtet und für den freien Fall und die Planetenbewegung bestimmt; er stellt sie als tautochrone Brennpunkte den konservativen d. h. auf das Aktionsintegral bezüglichen gegenüber.

Extreme von derselben Form wie beim Prinzip der kleinsten Aktion werden in der theoretischen Optik, ausgehend von der Emissionstheorie, auf Grund des Prinzips der kürzesten Zeitdauer der Lichtbewegung gefordert, wenn der Brechungsindex eine Funktion des Ortes ist. Ein Beispiel dieser optischen Interpretation einer Aufgabe der Variationsrechnung liefert schon *J. Bernoulli*'s Behandlung der Brachistochrone[197]); allgemein ist dieselbe von *W. R. Hamilton* gegeben, der sie zum Ausgangspunkt der allgemeinen dynamischen Untersuchung macht[198]); die kinetischen Brennpunkte erscheinen dabei als Verallgemeinerung der optischen.

197) *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, p. 400 (2. Aufl.).

198) *F. Klein*, Deutsche Math.-Ver. 1, (1891/92), p. 35. S. auch *P. Appell*, Traité de mécanique rationelle 1, p. 215.

(Abgeschlossen im September 1900.)

II A 8a. WEITERENTWICKELUNG DER VARIATIONSRECHNUNG IN DEN LETZTEN JAHREN

VON

E. ZERMELO UND H. HAHN

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

1. Die Grundlagen der *Weierstrass*'schen Theorie.
2. Notwendige und hinreichende Bedingungen im einfachsten Falle.
3. Isoperimetrische Probleme.
4. Allgemeinere Probleme.
5. Beispiele und Anwendungen.
6. Existenzfragen.

1. Die Grundlagen der Weierstrass'schen Theorie (vgl. II A 8, Nr. 21, *Kneser*). Die Weiterentwickelung der Variationsrechnung seit dem Jahre 1900 steht vorwiegend unter dem Einflusse der *Weierstrass*schen Theorie, die in *A. Kneser*'s Lehrbuche[1]) zuerst eine systematische Darstellung gefunden hat. Die formale Grundlage dieser Theorie, die Umformung der Integraldifferenz ΔJ vermittelst der E-Funktion, wird hier in ihrer geometrischen Bedeutung für sich untersucht und es wird ihr Zusammenhang mit der *Hamilton-Jacobi*'schen Theorie der Dynamik nachgewiesen. Ein „Feld" wird nach *Kneser*[2]) definiert durch eine einparametrige Schar $y = f(x, a)$ von Extremalen, d. h. von Lösungen der zu dem Integral:

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

1) Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900. (Im Folgenden stets als „Lehrbuch" zitiert.) Eine sehr übersichtliche und exakte Darstellung dieser Theorie giebt auch *W. F. Osgood*, Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 105.

2) Lehrbuch § 14. Doch bedient sich *Kneser* hier immer der „homogenen" Parameterdarstellung der Kurven, von der wir hier absehen, um die Formeln zu vereinfachen und besseren Anschluss an die Arbeiten anderer Forscher zu gewinnen.

gehörenden *Lagrange*'schen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

soweit auf ihnen der Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial a}$ nicht verschwindet, sodass sie einen Bereich der Ebene einfach überdecken. Vergleicht man innerhalb eines solchen Feldes die Integralwerte J auf benachbarten Extremalen, so reduziert sich die erste Variation δJ vermöge der Differentialgleichung auf die vom Integralzeichen freien „Grenzglieder", welche von der Verschiebung der Endpunkte herrühren. In jedem Punkte des Feldes giebt es aber eine Verschiebungsrichtung, für die auch die entsprechenden Grenzglieder verschwinden, und die Kurven, welche in jedem ihrer Punkte diese Richtung besitzen, bedecken wieder das ganze Feld und werden als die „Transversalen" des Feldes bezeichnet[3]). Dabei gilt der Satz, dass alle Extremalenbögen zwischen zwei Transversalen gleiche Integralwerte J ergeben[4]), eine Verallgemeinerung des *Gauss*'schen „Orthogonalitätssatzes" über geodätische Linien[5]). Extremalen und Transversalen bilden somit ein neues krummliniges Koordinatensystem innerhalb des Feldes, wobei der Parameter a der Extremalenschar und der Integralwert u längs einer Extremalen, gerechnet von einer festen Transversalen bis zu einem variabelen Endpunkte[6]), als Koordinaten erscheinen. Mit Hülfe dieser Transformation lässt sich nun die Differenz ΔJ der Integrale J längs einer Feldextremalen und einer beliebigen innerhalb des Feldes verlaufenden „Vergleichskurve" $\mathfrak{c}$ darstellen durch das Integral der *Weierstrass*'schen E-Funktion, genommen über die Vergleichskurve[7]).

---

3) *Kneser* braucht diesen Ausdruck nicht, sondern spricht von „Kurven, die von den Extremalen transversal geschnitten werden".

4) Lehrbuch § 15. Man vgl. auch *Darboux,* Théorie des surfaces 2, Nr. 521 ff. und Nr. 544 ff.

5) *Gauss,* Disq. c. superf. curv. 15—16.

6) Als Funktion von x und y betrachtet genügt u einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die eine Verallgemeinerung der *Jacobi-Hamilton*'schen Gleichung der Dynamik darstellt. Ist umgekehrt $u(x, y)$ eine beliebige Lösung dieser Differentialgleichung, so können die Kurven $u = \text{const.}$ als Transversalen einer Schar von Extremalen aufgefasst werden, die durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden wird. Kennt man eine Lösung $u(x, y, c)$ unsrer partiellen Differentialgleichung, die eine willkürliche Konstante c enthält, so liefert die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial c} = \text{const.}$ die Gesamtheit der Extremalen. Lehrbuch § 19. Vgl. auch *Darboux,* Théorie des surfaces 2, Nr. 538 f. und II A 8, Nr. 11 (*Kneser*).

7) Lehrbuch § 20. Als Vergleichskurven gelten dabei alle Kurven, deren

Dieselbe Umformung erreicht *D. Hilbert*[8]) auf folgendem Wege. An Stelle des gegebenen Integrales:

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

betrachtet er das folgende:

$$J^* = \int \{f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p)\}\, dx$$

und sucht p als Funktion von x und y so zu bestimmen, dass dieses Integral J^* vom Integrationswege unabhängig wird. So ergiebt sich für p die partielle Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial p}{\partial y}\right) f_{pp} + p f_{py} + f_{px} - f_y = 0,$$

deren Charakteristiken die Extremalen des Problems, d. h. die Lösungen der entsprechenden *Lagrange*'schen Differentialgleichung sind, und man erhält eine Lösung p, indem man eine beliebige einparametrige Schar von Extremalen zu Grunde legt und in jedem Punkte x, y ihres Feldes die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ längs der durch den Punkt gehenden Extremalen bildet. Für jede so bestimmte Funktion p wird also das Integral J^* vom Wege unabhängig; dieses Theorem bezeichnet *Hilbert* als den „Unabhängigkeitssatz". Das „Feldintegral" J^* verschwindet dann auf jeder Transversalen des Feldes; auf jeder Feldextremalen aber reduziert es sich auf das „Grundintegral" J[9]) und ist daher, als Funktion des oberen Endpunktes betrachtet, identisch mit der *Kneser*'schen Funktion u. Vermöge des Unabhängigkeitssatzes lässt sich nun das Grundintegral über einen Extremalenbogen ausdrücken als das Feldintegral J^* über eine Vergleichskurve $\mathfrak{c}$ (siehe Fussnote 7)), und die Subtraktion der beiden Integrale J und J^* über dieselbe Kurve $\mathfrak{c}$ liefert schliesslich die *Weierstrass*'sche Transformation der Integraldifferenz ΔJ.

2. Notwendige und hinreichende Bedingungen im einfachsten Falle. Aus der *Weierstrass*'schen Umformung der Integraldifferenz schliesst man, dass ein Extremalenstück einen grösseren oder kleineren

---

Anfangs- und Endpunkt auf denselben Transversalen des Feldes liegen, wie Anfangs- und Endpunkt des zu vergleichenden Extremalenbogens.

8) Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongress zu Paris 1900, Gött. Nachr. 1900, p. 291; Comptes rendus du deuxième congrès international des mathématiciens p. 106; Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 231 (mit einigen Zusätzen).

9) Beide Bezeichnungen finden sich bei *Hilbert* nicht.

Integralwert ergiebt als jede Vergleichskurve $\mathfrak{c}$, längs deren die E-Funktion ein beständig positives oder negatives Vorzeichen besitzt.

Unterscheidet man nun mit *Kneser*[10]) ein „starkes" und ein „schwaches" Extremum, je nachdem nur die Punkte oder auch die Tangentenrichtungen der Vergleichskurven den entsprechenden der Extremalen benachbart sein müssen, so ergiebt sich innerhalb des Feldes für das *starke* Extremum das *Weierstrass*'sche Kriterium als notwendig und hinreichend, nach welchem das Vorzeichen der E-Funktion definit sein muss für eine willkürliche Richtung der Vergleichskurve[11]). Für das *schwache* Extremum dagegen braucht dieses Kriterium nur für hinreichend kleine Abweichungen der Tangentenrichtungen erfüllt zu sein, und ist dann äquivalent dem *Legendre*'schen Kriterium[11a]), das ein definites Vorzeichen der Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ längs der Extremalen erfordert.

Das Problem reduziert sich hiernach, im Falle vorgeschriebener Endpunkte, auf die Frage, ob das betrachtete Extremalenstück mit einem Felde umgeben werden kann. Bei einem hinreichend kleinen Extremalenbogen ist dies immer der Fall; und die Grenzen, an denen diese Eigenschaft aufhört, bestimmen sich durch das *Jacobi*'sche Kriterium der „konjugierten Punkte" (II A 8, Nr. **16** u. **17**, *Kneser*). Dass dieses Kriterium auch notwendig ist, beweist *Kneser*[12]) durch Betrach-

10) Lehrbuch § 16—17.

11) Doch vgl. hierzu ein Beispiel von *O. Bolza* (Bull. Am. math. soc. (2) 9 (1901), p. 1), sowie die sich darauf beziehenden Bemerkungen von *E. R. Hedrick* (Bull. Am. math. soc. (2) 9 (1901), p. 245). *W. F. Osgood* (Amer. Trans. 2 (1901), p. 273) beweist für den Fall des starken Extremums weiter: Bezeichnet J den von der Extremale gelieferten Integralwert und S ein gewisses die Extremale umgebendes Gebiet, so muss jede Schar ganz in S gelegener Kurven, die mit der Extremale Anfangs- und Endpunkt gemein haben, und deren Integralwerte gegen $\overline{J}$ konvergieren, die Extremale zur Grenzkurve haben. Auf Grund dieses Satzes erweitert *Osgood* die Klasse der zulässigen Vergleichskurven mit Hülfe einer geeigneten Verallgemeinerung des Begriffes des Kurvenintegrals. Vereinfachungen des *Osgood*'schen Beweises geben *O. Bolza* (Amer. Trans. 2 (1901), p. 422) und *E. Goursat* (Amer. Trans. 5 (1904), p. 110).

11a) Diese Bezeichnungsweise weicht von der in *Kneser*'s Lehrbuche ab, da dort auch von einem *Legendre*'schen Kriterium für das *starke* Extremum gesprochen wird.

12) Lehrbuch § 25; vgl. auch II A 8, Nr. **17**, *Kneser*, sowie *E. Zermelo*, Diss. Berl. 1894, p. 96. Über das Verhältnis dieser Methode zu den älteren, die zweite Variation benützenden vgl. Lehrbuch, p. 105. — Die Untersuchung eines von zwei konjugierten Punkten begrenzten Extremalenbogens durch Betrachtung der dritten und vierten Variation hat *A. Korn* (Münch. Ber. 1901, p. 76) kürzlich von Neuem aufgenommen, wobei er wieder zu den *Erdmann*'schen Kriterien (II A 8, Nr. **22**, *Kneser*) gelangte.

tung der Enveloppe, die zu den vom Anfangspunkte der Integration ausgehenden Extremalen gehört: er zeigt, dass es in jeder Nähe eines von zwei konjugierten Punkten begrenzten Extremalenbogens Kurven giebt, die dem Integrale denselben Wert erteilen, wie die Extremale. Dieser Beweis versagt, wenn die Enveloppe auf der betrachteten Extremalen einen Rückkehrpunkt besitzt, der seine Spitze dem Integrationsintervall zukehrt. *W. F. Osgood*[13]), der unabhängig von *Kneser* diesen Umstand bemerkte, zeigt, dass in diesem Ausnahmefalle der von zwei konjugierten Punkten begrenzte Extremalenbogen noch ein Extremum liefert.

Eine ganz analoge Schlussweise gilt, wenn der Anfangspunkt der Integration auf einer vorgeschriebenen „Grenzkurve" $\mathfrak{K}$ variieren kann; man hat dann ein Feld von Extremalen zu verwenden, welche die Kurve $\mathfrak{K}$ transversal schneiden[14]). Der erste Punkt, in dem die betrachtete Extremale die Enveloppe dieses Feldes berührt, heisst der zur Kurve $\mathfrak{K}$ gehörige „kritische Punkt"[15]); in ihm hört die Extremale auf, ein Extremum zu liefern[16]). Er liegt immer diesseits des zu dem Schnittpunkte unsrer Extremale mit der Kurve $\mathfrak{K}$ gehörigen konjugierten Punktes; seine Lage hängt nur ab von der Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ in diesem Schnittpunkte[17]).

Sind beide Endpunkte 1, 2 auf zwei Kurven $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ variabel, so müssen beide Grenzkurven die Extremale transversal schneiden, und

13) Amer. Trans. 2 (1901), p. 166. Es wird dort auch gezeigt, dass beim Probleme der kürzesten Linien auf dem Rotationsellipsoide dieser Ausnahmefall thatsächlich eintritt. Übrigens findet sich ein Hinweis auf die Möglichkeit eines solchen Rückkehrpunktes schon bei *H. Poincaré*, „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" 3 (1899), Nr. 371, anlässlich einer Diskussion des Prinzips der kleinsten Wirkung. Ein regulärer Punkt der Enveloppe aller durch einen Punkt gehenden Extremalen (trajectoires) wird dort als „foyer ordinaire" bezeichnet; ein Rückkehrpunkt, der seine Spitze dem Integrationsintervalle zukehrt, als „foyer en pointe", ein nach der entgegengesetzten Richtung liegender Rückkehrpunkt als „foyer en talon".

14) Dass sich ein die Kurve $\mathfrak{K}$ transversal schneidender Extremalenbogen in der Umgebung dieser Kurve stets mit einem solchen Felde umgeben lässt, beweist *A. Kneser*, Lehrbuch § 30. Die transversale Lage der Kurve $\mathfrak{K}$ und der Extremale ergiebt sich bekanntlich als notwendig durch Betrachtung der ersten Variation (vgl. II A 8, Nr. 6, *Kneser* und Lehrbuch § 12).

15) *Kneser* bezeichnet diesen Punkt als „konjugierten Brennpunkt"; die Terminologie des Textes rührt von *G. A. Bliss* her.

16) Lehrbuch § 25. Der daselbst mitgeteilte Beweis unterliegt derselben Ausnahme, wie im Falle fester Endpunkte. Ein von *G. A. Bliss*, Amer. Trans. 3 (1902), p. 132 durch Betrachtung der zweiten Variation geführter Beweis gilt allgemein, sofern der Extremalenbogen über den kritischen Punkt hinausgeht.

17) Lehrbuch § 30; *G. A. Bliss*, l. c. p. 139.

der kritische Punkt d_1, der zur Kurve $\mathfrak{K}_1$ gehört, darf, wenn ein Extremum stattfinden soll, weder in das Integrationsintervall 12 noch zwischen 2 und den zu $\mathfrak{K}_2$ gehörenden kritischen Punkt d_2 fallen. Die Notwendigkeit dieser letzten neu hinzukommenden Bedingung beweist *G. A. Bliss*[18]), indem er einen Punkt 3 zwischen d_1 und d_2 auf der Extremalen annimmt, sodass diese bei der Anordnung $12d_13d_2$ zwar zwischen $\mathfrak{K}_2$ und 3, aber nicht mehr zwischen $\mathfrak{K}_1$ und 3 ein Minimum des Integrales liefert. Dann giebt es also eine benachbarte Kurve $1'2'3$, welche $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in $1'$ und $2'$ schneidet und für welche $J_{1'2'3'} < J_{123}$, zugleich aber $J_{2'3} > J_{23}$, sodass sich in der That:

$$J_{1'2'} = J_{1'2'3} - J_{2'3} < J_{123} - J_{23} = J_{12}$$

ergiebt. Liegt dagegen d_2 zwischen 2 und d_1, während im ganzen betrachteten Intervalle das *Legendre*'sche, bezw. das *Weierstrass*'sche Kriterium erfüllt ist, und ist $1'2'$ eine willkürliche benachbarte Vergleichskurve zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so kann man ihren Endpunkt $2'$ so mit dem zwischen d_1 und d_2 liegenden Punkte 3 verbinden, dass umgekehrt $J_{2'3} < J_{23}$, aber $J_{1'2'3} > J_{123}$ und somit $J_{1'2'} > J_{12}$ wird, d. h. die Extremale 12 liefert hier wirklich ein Minimum[18a]). Ein zugleich notwendiges und hinreichendes Kriterium, das auch für den Fall gilt, wo d_1 und d_2 zusammenfallen, erhält *Bliss* endlich durch Betrachtung der Kurve T, welche durch 2 geht und von allen Extremalen transversal geschnitten wird, die auf $\mathfrak{K}_1$ transversal stehen. Es wird nämlich ein Minimum dann und nur dann stattfinden, wenn diese Transversale T, welche $\mathfrak{K}_2$ in 2 berührt, in der Umgebung von 2 ganz auf der einen, $\mathfrak{K}_1$ zugekehrten Seite von $\mathfrak{K}_2$ liegt, vorausgesetzt, dass auf 12 überall das *Legendre*'sche bezw. das *Weierstrass*'sche Kriterium erfüllt ist und im Punkte 2 ausserdem $f > 0$ ist.

3. Isoperimetrische Probleme[19]) (II A 8, Nr. 9, *Kneser*). Die Anwendung der *Weierstrass*'schen Ideen auf isoperimetrische Probleme findet sich in vollständiger Durchführung zuerst bei *Kneser*[20]). Das

18) Math. Ann. 58 (1904), p. 70.

18a) *G. A. Bliss* selbst (l. c.) beweist sein *hinreichendes* Kriterium nicht wie angegeben, sondern durch Benutzung der auf $\mathfrak{K}_1$ transversal stehenden Feldextremalen $1'2'$ und durch zweimalige Differentiation des entsprechenden Integrales $J_{1'2'} = J(\gamma)$ nach dem Parameter γ des Feldes. Bezüglich analoger Untersuchungen von *G. Erdmann* und *A. Mayer* vgl. II A 8, Nr. 22 (*Kneser*).

19) Die isoperimetrischen Probleme sind als Spezialfall in dem im nächsten Abschnitte behandelten allgemeinen Probleme enthalten, so dass alle dort angegebenen Sätze auch im Falle des isoperimetrischen Problemes ihre Anwendung finden. An dieser Stelle werden nur diejenigen Untersuchungen erwähnt, die sich speziell mit dem einfachsten isoperimetrischen Probleme befassen.

20) Lehrbuch § 32—42.

einfachste Problem dieser Art verlangt, unter allen, zwei gegebene Punkte verbindenden Kurven, welche dem „isoperimetrischen Integrale“:

$$K = \int g(x, y, y')\, dx$$

einen vorgeschriebenen Wert erteilen, diejenige zu finden, für welche das Integral:

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

ein Extremum wird. Da hier die zugehörige *Lagrange*'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial y'} = 0$$

den Multiplikator λ (die „isoperimetrische Konstante“) als Parameter enthält, so bilden die von einem festen Punkte ausgehenden Extremalen eine zweiparametrige Schar und in der Umgebung des Ausgangspunktes ein räumliches Feld[21]), wenn man den Wert des isoperimetrischen Integrales als dritte Raumkoordinate einführt. In diesem Felde gelten die analogen Transformationen wie im einfachsten Falle. Doch ist diese „*Weierstrass*'sche Konstruktion“ nur möglich, wenn die Vergleichskurve, als Raumkurve betrachtet, ganz innerhalb des räumlichen Feldes verläuft[22]). Wenn daher auch das *Weierstrass*'sche und das *Legendre*'sche Kriterium für das starke und das schwache Extremum auf den isoperimetrischen Fall übertragen werden können[23]), so ist dabei das „starke“ Extremum nur in dem modifizierten Sinne aufzufassen, der eine *räumliche* Nachbarschaft der verglichenen Kurven, also auch hinreichend kleine Abweichungen des isoperimetrischen Integrales in entsprechenden Punkten erfordert.

Auch das *Jacobi*'sche Kriterium lässt sich in entsprechender Form auf isoperimetrische Probleme übertragen. Dass die so erhaltene Bedingung notwendig ist, beweist *Kneser*, indem er aus der zweiparametrigen Extremalenschar, die das Feld bildet, eine einparametrige Schar so auswählt, dass sie eine Enveloppe besitzt, wodurch dann dieselben Schlüsse ermöglicht werden wie im einfachsten Falle[24]). In einer späteren Abhandlung[24a]) giebt *Kneser* einen anderen Beweis durch Betrachtung der zweiten Variation.

---

21) Lehrbuch § 41. 22) Vgl. Lehrbuch § 38.

23) Lehrbuch § 36. Das *Legendre*'sche Kriterium kann auch durch Betrachtung der zweiten Variation erhalten werden. Vgl. *O. Bolza*, Amer. Trans. 3 (1902), p. 305 = Decennial publications of the university of Chicago 9 (1902).

24) Lehrbuch § 40. In gewissen Ausnahmefällen versagt dieser Beweis.

24a) Math. Ann. 55 (1902), p. 86. Der Grundgedanke stammt aus Vorlesungen von *Weierstrass*. Auch dieser Beweis umfasst einen gewissen Ausnahmefall nicht,

Es sei noch bemerkt, dass bei allen diesen Entwickelungen vorausgesetzt ist, dass die untersuchte Extremale nicht gleichzeitig Extremale des isoperimetrischen Integrales im Sinne des absoluten Extremums sei; eine Behandlung dieses Ausnahmefalles liegt bisher nicht vor[25]).

4. Allgemeinere Probleme. Eine vollständig durchgeführte Übertragung der *Weierstrass*'schen Methoden auf einfache Integrale mit beliebig vielen unbekannten Funktionen, zwischen denen Bedingungsdifferentialgleichungen bestehen, liegt bisher nicht vor. Doch liesse sich unter Verwendung aller von den verschiedenen Autoren bisher erhaltenen Resultate, auf deren Wiedergabe wir uns hier beschränken, eine solche Theorie wohl herstellen. Einen Ansatz nach dieser Richtung geben die Untersuchungen von *A. Kneser*[26]). Er beweist, dass innerhalb eines Feldes von Extremalen, dessen Existenz vorausgesetzt wird, die dem *Weierstrass*'schen und *Legendre*'schen Kriterium analogen Bedingungen für ein starkes, bezw. schwaches Extremum hinreichen. Unter derselben Voraussetzung beweist *A. Mayer* für dieses „allgemeine" Problem den *Hilbert*'schen Unabhängigkeitssatz[27]) sowie seinen Zusammenhang mit der Integration der *Jacobi-Hamilton*'schen partiellen Differentialgleichung, die zu dem Variationsprobleme oder dem entsprechenden *Lagrange*'schen Differentialgleichungssysteme gehört.

Mit demselben allgemeinen Probleme beschäftigt sich *G. v. Escherich* in einer Reihe von Abhandlungen[28]). Er geht aus von der Betrachtung des durch Variation der *Lagrange*'schen Gleichungen entstehenden linearen Differentialgleichungssystemes, das er als „accessorisches System" bezeichnet[29]). Aus einer zwischen gewissen Lösungen desselben bestehenden Identität ergiebt sich unmittelbar die Über-

---

den aber *O. Bolza* mit Hülfe einer von *H. A. Schwarz* in seinen Vorlesungen vorgetragenen Methode erledigt (Math. Ann. 57 (1903), p. 44). Ein ganz allgemeiner Beweis für das *Jacobi*'sche Kriterium ergiebt sich aus den unten besprochenen Arbeiten von *G. v. Escherich*. Vgl. *H. Hahn*, Math. Ann. 58 (1904), p. 166.

25) Nach mündlichen Mitteilungen von *C. Carathéodory* können in solchen Ausnahmefällen diskontinuierliche Lösungen des Variationsproblems auftreten, die den entsprechend modifizierten *Weierstrass*'schen Methoden noch zugänglich sind.

26) Lehrbuch §§ 56—61. Das dort behandelte Problem ist etwas allgemeiner als das im Text angegebene.

27) Leipz. Ber. 1903, p. 131 = Math. Ann. 58 (1904), p. 235. Der Fall zweier unbekannter Funktionen auch bei *N. Gernet*, Diss. Gött. 1902.

28) Zusammengefasst in Wien. Ber. 110 (1901), p. 1355, wo sich *v. Escherich* der homogenen Darstellung durch einen Parameter bedient. Vgl. Fussn. 2).

29) Über seine Lösungen wird eine grosse Anzahl von Sätzen bewiesen: Wien. Ber. 107 (1898), p. 1234 ff., 1294 ff.; ibid. 110 (1901), p. 1367 ff. Als besonders wichtig erweist sich dabei der für dieses System geltende *Green*'sche

führung der zweiten Variation in die von *Clebsch* angegebene „reduzierte“ Form[30]) (II A 8, Nr. **15**, *Kneser*), aus der nun weiter das *Legendre*'sche Kriterium als notwendige Bedingung folgt[31]). Für das Folgende wird nun diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, und es wird ein „Hauptfall“ und ein „Ausnahmefall“ unterschieden[32]). Im Hauptfalle hat, wie gezeigt wird, die *Mayer*'sche Determinante $\Delta(x, x_0)$ (II A 8, Nr. **16**, p. 596, *Kneser*) (die „Determinante des dem Punkte x_0 konjugierten Systemes“) im Punkte x_0 eine isolierte Nullstelle, d. h. ein genügend kleiner von x_0 ausgehender Extremalenbogen lässt sich mit einem Felde im *Weierstrass*'schen Sinne umgeben, während im Ausnahmefalle $\Delta(x, x_0)$ identisch verschwindet[33]). Im Hauptfalle lässt sich also (durch die Nullstellen von $\Delta(x, x_0)$) zu jedem Punkte x_0 ein konjugierter Punkt definieren, und die Notwendigkeit des *Jacobi*'schen Kriteriums wird nun auf zwei verschiedenen Wegen bewiesen[34]). Ferner giebt *v. Escherich* durch Betrachtung der zweiten Variation einen Beweis, dass auf einem keine zwei konjugierten Punkte enthaltenden Extremalenbogen ein definites Zeichen der quadratischen Form, in welche die zweite Variation transformiert wird, ein schwaches Extremum zur Folge hat, m. a. W., dass innerhalb des Feldes das *Legendre*'sche Kriterium für ein schwaches Extremum hinreicht[35]).

Mit analogen Methoden behandelt *H. Hahn* den Fall, dass unter den Bedingungsgleichungen des Problems auch endliche Gleichungen vorkommen[36]).

Satz (l. c. 107, p. 1244), insbesondere die in demselben auftretende bilineare Differentialform $\psi(z, r; u, \varrho)$.

30) l. c. 110, p. 1390 ff. Vgl. auch l. c. 107, p. 1242 ff. und 108, p. 1278 ff.

31) l. c. 107, p. 1383 ff.; 110, p. 1396 ff.

32) Der Ausnahmefall tritt dann und nur dann ein, wenn die betrachtete Extremale zugleich Extremale für ein einfacheres Variationsproblem ist (*H. Hahn*, Math. Ann. 58 (1904), p. 148), oder anders gesprochen, wenn ein gewisses überbestimmtes System linearer Differentialgleichungen eine von Null verschiedene Lösung besitzt (*G. v. Escherich*, Wien. Ber. 108 (1899), p. 1287 ff.).

33) Wien. Ber. 108 (1899), p. 1299; 110 (1901), p. 1405.

34) Wien. Ber. 110 (1901), p. 1409 ff. Der eine dieser Beweise ist eine Übertragung des *Erdmann-Weierstrass*'schen Beweises (Lehrbuch § 28) auf unser allgemeines Problem; der zweite giebt eine exakte Durchführung der von *L. Scheeffer* (Math. Ann. 25 (1885), p. 522) verwendeten Methode. Die dabei festgehaltene Voraussetzung, dass die Bedingungsgleichungen, denen die Variationen unterliegen, durch die linearen Glieder ihrer *Taylor*'schen Entwickelungen ersetzt werden können, ist im „Hauptfalle“ immer zulässig (*H. Hahn*, Math. Ann. 58 (1904), p. 158).

35) Math. Ann. 55 (1902), p. 108.

36) Monatsh. Math. Phys. 14 (1903), p. 3.

Einen auf wesentlich anderen Grundlagen beruhenden, allerdings nicht ganz allgemeinen Beweis des *Jacobi*'schen Kriteriums liefert *A. Kneser*[37]) durch eine Verallgemeinerung der von ihm im einfachsten Falle benutzten Schlussweise, welche auf der Existenz gewisser Enveloppen beruht.

Es sei endlich noch eine von *H. Hahn*[38]) gegebene Methode zur Aufstellung des *Lagrange*'schen Differentialgleichungssystemes erwähnt, welche nicht von vornherein voraussetzt, dass die gesuchte Kurve zweimal differentiierbar sei, sondern aus der Existenz stetiger erster Ableitungen auch die der zweiten Derivierten folgert[39]).

Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, dass, solange es sich um einfache Integrale handelt, das Auftreten mehrerer unbekannter Funktionen unter dem Integralzeichen zwar eine grössere Komplikation der Rechnungen und Beweise zur Folge hat, dass aber die Resultate den für den Fall einer unbekannten Funktion erhaltenen durchaus analog bleiben. *J. Hadamard*[40]) macht nun darauf aufmerksam, dass dies bei mehrfachen Integralen nicht mehr durchaus der Fall ist. So ist es bei mehrfachen Integralen mit mehreren unbekannten Funktionen für das Eintreten eines Extremums nicht notwendig, dass die „reduzierte" quadratische Form, in welche nach *Clebsch*[40a]) die zweite Variation transformiert werden kann, definit sei[41]).

5. Beispiele und Anwendungen. Die Fruchtbarkeit der von *Weierstrass* eingeführten neuen Methoden zeigt sich besonders darin, dass sie die vollständige Erledigung klassischer Variationsprobleme gestatten, die vorher nur unvollkommen behandelt werden konnten, und umgekehrt geben diese speziellen Aufgaben wieder sehr häufig

37) Charkow Math. Mitt. (2) 7 (1902).

38) Monatsh. Math. Phys. 14 (1903), p. 325.

39) Diese Problemstellung geht zurück auf *P. du Bois-Reymond*, der den Fall eines Integrales mit n Ableitungen ohne Nebenbedingung untersucht (Math. Ann. 15 (1879), p. 564). Eine dieselbe Frage behandelnde Abhandlung von *E. Zermelo* wird demnächst in den Math. Ann. erscheinen. Für den einfachsten Fall der Variationsrechnung gab *D. Hilbert* eine sehr anschauliche Methode an, die wiedergegeben ist bei *J. R. Whittemore*, Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 130 und *N. Gernet*, Diss. Gött. 1902, p. 15.

40) Bull. soc. math. 30 (1903), p. 253.

40a) J. f. Math. 56 (1859), p. 122 (vgl. II A 8, Nr. 25, *Kneser*).

41) Mit Doppelintegralen beschäftigen sich ferner ausser dem einschlägigen Abschnitte in *Kneser*'s Lehrbuche (§§ 62—69): *D. Hilbert* (Mathem. Probleme (siehe Fussn. 8)) und *W. F. Osgood* (Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 125), die auf dieselben den Unabhängigkeitssatz übertragen, und *A. Sommerfeld* (Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 188) der das Analogon des *Jacobi*'schen Kriteriums beweist.

Anlass zu neuen Fragestellungen und neuen Gesichtspunkten und damit auch zur Weiterentwickelung der allgemeinen Theorie.

So behandelt *A. Kneser*[42]) das *Newton*'sche Problem von der Rotationsfläche kleinsten Widerstandes und zeigt, dass ein schwaches Extremum vorhanden ist, wenn der Rotationskörper an der Spitze unter dem Randwinkel 45° durch eine kreisförmige Scheibe abgestumpft wird[43]). Derselbe Autor erledigt[44]) das „Problem der Dido", zwei nicht vorgeschriebene Punkte einer gegebenen Kurve durch eine zweite Kurve von gegebener Länge so zu verbinden, dass der von beiden eingeschlossene Flächeninhalt ein Maximum wird. Das sogenannte „isoperimetrische Problem auf einer Fläche" oder das „Problem der Kurven kürzesten Umrings" wird behandelt von *J. R. Whittemore*[45]) und *O. Bolza*[45a]): es soll auf einer gegebenen Fläche die kürzeste Linie gefunden werden, die zwei vorgeschriebene Punkte einer gegebenen Kurve verbindet und mit dieser einen gegebenen Flächeninhalt einschliesst; als Lösung ergeben sich bekanntlich die Kurven konstanter geodätischer Krümmung. Eine ausführliche Theorie der geodätischen Linien auf einer Ringfläche giebt *G. A. Bliss*[46]).

Ferner beweist *A. Kneser*[47]) die Stabilität des Gleichgewichtes schwerer hängender Fäden. Wird nämlich um die Kettenlinie, welche die potentielle Energie des Fadens zu einem Minimum macht, ein Gebiet S abgegrenzt, und wird der Faden so gebogen, dass er nicht mehr ganz in S liegt, so besitzt die Zunahme seiner potentiellen Energie eine von Null verschiedene untere Grenze[48]). Mit Hilfe dieses Satzes führt die von Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden her bekannte *Dirichlet*'sche Schlussweise (IV 1, Nr. 45, Fussn. 275, *Voss*) auch hier zum Ziele.

Als eine wichtige Ergänzung des *Jacobi*'schen Kriteriums beweist

42) Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 267.

43) Dass im Falle eines Extremums der Winkel zwischen „Stirnfläche" und „Mantelfläche" notwendig 45° beträgt, wurde von *E. Armanini* bewiesen (Ann. di mat. (3) 4 (1900), p. 131). Dort findet sich auch die Litteratur über den Gegenstand zusammengestellt (l. c. p. 149).

44) Math. Ann. 56 (1903), p. 169.

45) Ann. of math. (2) 2 (1901), p. 176.

45a) Decennial publications of the university of Chicago 9 (1902) und Math. Ann. 57 (1903), p. 48. Vgl. auch *Darboux*, Théorie des surfaces 3, Nr. 651 ff. und *Kneser*, Lehrbuch § 34.

46) Ann. of math. (2) 4 (1902), p. 1.

47) J. f. Math. 125 (1903), p. 189.

48) Dieser Satz ist vollständig analog dem in Fussn. 11) angegebenen Satze von *Osgood*.

G. Darboux[49]) und später *E. Zermelo*[50]) einen Satz, nach welchem der Bogen einer geodätischen Linie im allgemeinen schon vor dem nächsten konjugierten Punkte aufhören muss, die „allerkürzeste" Verbindungslinie seiner Endpunkte zu sein, sondern zuletzt nur die kürzeste unter den benachbarten darstellt. *Zermelo* zeigt ferner, dass innerhalb eines begrenzten einfach zusammenhängenden ebenen Bereiches die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte (II A 8, Nr. 23, *Kneser*)[50a]) immer eindeutig bestimmt sind, und er betrachtet schliesslich auf einer vorgelegten Fläche $z = \varphi(x, y)$ die „kürzesten Linien von begrenzter Steilheit" $\left(\frac{dz}{ds} \leq k\right)$ als Beispiel eines Problems mit Differentialungleichungen. Es treten hier diskontinuierliche Lösungen auf, wie dies bei Ungleichungen in der Regel der Fall zu sein scheint.

Um auch die isoperimetrischen Probleme mit Doppelintegralen der allgemeinen Methode zugänglich zu machen, behandelt *J. O. Müller*[51]) als wichtigstes Beispiel die schon von *H. A. Schwarz*[52]) bewiesene Eigenschaft der Kugel, eine kleinere Oberfläche zu besitzen als alle geschlossenen Flächen vom gleichen Volumen, indem er, entsprechend dem *Weierstrass*'schen Ideengange, ein Feld von Kugeln konstruiert und mittelst desselben den Wert der Kugeloberfläche darstellt durch ein Flächenintegral über eine beliebige geschlossene Vergleichsfläche gleichen Volumens, wobei der Integrand beständig < 1 ist. Dasselbe Theorem ergiebt sich übrigens bei *H. Minkowski*[53]) als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes über Volumina und Oberflächen konvexer Körper.

Eine Aufgabe die als Umkehrung eines Problemes der Variationsrechnung bezeichnet werden kann, löst *G. Hamel*[54]), indem er alle Geometrien, d. h. alle Massbestimmungen in der Ebene aufstellt, für welche die geraden Linien die kürzesten sind. Es kommt dies darauf hinaus, das allgemeinste Integral $\int f(x, y, y')\, dx$ aufzufinden, welches durch die Geraden der Ebene zu einem Minimum gemacht wird. Hierdurch ist der Anschluss an diejenigen Untersuchungen gewonnen, die zu einer vorgelegten Differentialgleichung die zugehörigen Variationsprobleme suchen[55]). *Hamel* geht insofern über diese hinaus, als er

49) Théorie des surfaces 3, Nr. 623.

50) Deutsche Math.-Ver. 11 (1902), p. 184.

50a) Vgl. *Darboux* l. c. Nr. 632 und *Kneser*, Lehrbuch § 44.

51) Gött. Nachr. 1902, p. 176; Diss. Gött. 1903.

52) Gött. Nachr. 1884, p. 1 = Ges. Abh. 2, p. 327.

53) Deutsche Math.-Ver. 9 (1901), p. 115; Math. Ann. 57 (1903), p. 474. Dabei sind als Vergleichskörper nur konvexe Körper zugelassen.

54) Diss. Gött. 1901; Math. Ann. 57 (1903), p. 231.

55) Für den Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

verlangt, dass auch die hinreichenden Bedingungen der Variationsrechnung erfüllt seien.

Eine Anwendung der Variationsrechnung auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen geben *Yoshiye*[56]) und *E. R. Hedrick*[57]), indem sie, einen von *D. Hilbert* in seinen Vorlesungen gegebenen Gedanken ausführend, nachweisen, dass die Gleichungen der charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster oder zweiter Ordnung immer übereinstimmen mit den *Lagrange*'schen Gleichungen eines gewissen Variationsproblemes.

6. Existenzfragen. Während die klassische Methode der Variationsrechnung von einer gegebenen Lösung der *Lagrange*'schen Differentialgleichung ausgeht, das Randwertproblem also als gelöst betrachtet und nun untersucht, ob diese Lösung wirklich ein Extremum liefert, stellt sich *D. Hilbert*[58]) die Aufgabe, in gewissen Fällen von vornherein die Existenz einer Kurve oder Fläche von grösstem oder kleinstem Integralwerte zu beweisen, welche dann auf Grund dieser Eigenschaft die Differentialgleichung unter den gegebenen Randbedingungen erfüllen muss und damit einen Schluss auf die Lösbarkeit des Randwertproblemes gestattet.

ist diese Theorie durchgeführt bei *Darboux*, Théorie des surfaces 3, Nr. 604—606, wo u. a. der Satz bewiesen wird, dass zu jeder Gleichung $y'' = \varphi(x, y, y')$ sich unendlich viele Integrale $\int f(x, y, y')\,dx$ finden lassen, deren Extremalen die Lösungen der Gleichung sind (vgl. hierüber auch *J. Kürschák*, Math. Ann. 56 (1903), p. 163). — *A. Hirsch* (Math. Ann. 49 (1897), p. 49) beweist weiter: Wenn der aus der Gleichung $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = 0$ abgeleitete lineare Differentialausdruck $\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} u^{(k)}$ „sich selbst adjungiert" ist (II A 4b, Nr. **26**, *Vessiot*), lässt sich durch Quadraturen ein Integral $\int f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$ finden, dessen Extremalen durch die Gleichung $F = 0$ gegeben sind. Es wird ferner die Gültigkeit eines analogen Satzes für partielle Differentialausdrücke der zweiten Ordnung mit zwei oder drei unabhängigen Veränderlichen bewiesen; die Vermutung, es gelte dies für eine beliebige Anzahl unabhängiger Veränderlicher, wurde von *W. Hertz* (Diss. Kiel 1903) für $n = 4, 5$ bestätigt. Weitere Litteratur dieses Gegenstandes giebt *Hamel*. — Hierher gehört auch das von *A. Guldberg* (Christiania Skrift. 1902, Nr. 7) behandelte Problem, das allgemeinste Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ aufzufinden, das invariant bleibt bei einer kontinuierlichen Gruppe von Transformationen. Es zeigt sich, dass für solche Integrale die *Lagrange*'sche Gleichung sich auf Quadraturen oder auf eine Gleichung erster Ordnung zurückführen lässt.

56) Math. Ann. 57 (1903), p. 185.

57) Ann. of math. (2) 4 (1903), p. 141, 157.

58) Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 184.

Seinen Gedankengang entwickelt *Hilbert* zunächst an dem Beispiel der kürzesten Linien auf Flächen. Da die Bogenlängen aller zwei gegebene Punkte der Fläche verbindenden Kurven eine untere Grenze l besitzen, so existiert eine unendliche Folge von Kurven, deren Bogenlängen diesen Wert l zur Grenze haben. Diese Kurven konvergieren aber gegen eine Grenzkurve, von der sich beweisen lässt[59]), dass sie differentiierbar ist und die minimale Bogenlänge l besitzt. Dieselbe Schlussweise überträgt *Ch. A. Noble*[60]) unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen auf einfache Integrale, die eine oder zwei unbekannte Funktionen und deren erste Ableitungen enthalten.

Hilbert[61]) selbst verwendet seine Methode zu einer strengen Begründung der als „*Dirichlet*'sches Prinzip" bekannten Beweismethode (II A 7b, Nr. **24** u. **25**, *Burkhardt* u. *Meyer*), auf Grund deren *Riemann* die Existenz der überall endlichen Integrale auf einer vorgelegten *Riemann*'schen Fläche erschloss (II B 2, Nr. **12**, *Wirtinger*). Es handelt sich hier darum, die Existenz einer auf der ganzen *Riemann*'schen Fläche regulären Potentialfunktion $u(x, y)$ nachzuweisen, welche entlang einer geschlossenen, die Fläche nicht zerstückelnden Kurve C, die man immer aus geraden, den Koordinatenaxen parallelen Stücken bestehend annehmen kann, den Sprung 1 erleidet. Bildet man für alle beliebigen dieser Randbedingung genügenden Funktionen das über die ganze Fläche erstreckte „*Dirichlet*'sche Integral":

$$\int\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

so haben die Integralwerte eine untere Grenze d. Es sei nun U_1, U_2, $U_3, \ldots$ eine Folge von Funktionen, deren *Dirichlet*'sche Integrale die Grenze d ergeben, und die etwa so gewählt seien, dass die über ein gewisses Stück der x-Axe erstreckten Integrale $\int U_n dx$ sämtlich den

59) Eine Ausführung des Beweises giebt *Ch. A. Noble* (Diss. Gött. 1901, p. 10) auf Grund der Thatsache, dass zwei genügend nahe Punkte der Fläche sich immer durch eine geodätische Linie verbinden lassen, die auch die kürzeste ist. Ein hiervon unabhängiger Beweis liesse sich mit den von *Hilbert* zum Beweise des *Dirichlet*'schen Prinzips verwendeten Methoden führen. — Aus der Differentiierbarkeit der gefundenen Kurve folgt unmittelbar, dass sie eine geodätische Linie sein muss, und somit auf einer analytischen Fläche selbst analytisch ist.

60) Diss. Gött. 1901.

61) Über das *Dirichlet*'sche Prinzip, Gött. Festschrift, Berlin 1901. Bezüglich der Anwendung auf die gewöhnliche Randwertaufgabe der Potentialtheorie vgl. *D. Hilbert*, Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 186. Doch ist die dort skizzierte Methode etwas verschieden von der im Texte angegebenen. Eine etwas weitere Ausführung dieser älteren *Hilbert*'schen Methode bei *E. R. Hedrick*, Diss. Gött. 1901, p. 69 ff.

Wert Null haben. Dann lässt sich aus ihnen eine andere Folge u_1, u_2, u_3, ... so auswählen, dass für beliebige (a, b) der Grenzwert:

$$v(x, y) = \lim_{n=\infty} \int_a^x \int_b^y u_n \, dx \, dy$$

existiert und eine stetige Funktion von x und y darstellt, solange das Integrationsgebiet keinen Verzweigungspunkt enthält und von der Kurve C nicht geschnitten wird. Der von (a, b) unabhängige Ausdruck:

$$u(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \lim_{\varepsilon=0,\, \eta=0} \lim_{n=\infty} \frac{1}{\varepsilon \eta} \int_x^{x+\varepsilon} \int_y^{y+\eta} u_n \, dx \, dy$$

ist dann die gesuchte Potentialfunktion, wie folgendermassen bewiesen wird. Für eine willkürliche Funktion ζ und ein beliebiges Rechteck R muss die Gleichung bestehen:

$$\lim_{n=\infty} \int\int_{(R)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) dx \, dy = 0,$$

welche hier dieselbe Rolle spielt, wie das Verschwinden der ersten Variation in der klassischen Variationsrechnung. Durch partielle Integrationen und Ausführung des Grenzüberganges unter den Integralzeichen erhält man den Satz, dass eine Funktion w, für welche $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = v(x, y)$ ist, für willkürliche ζ der Gleichung genügen muss:

$$\int\int_{(R)} \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} \Delta w \, dx \, dy = 0,$$

und hieraus folgt[62]), dass Δw die Form haben muss:

$$\Delta w = Xy^2 + X'y + X'' + Yx^2 + Y'x + Y'',$$

wo X, X', X'' nur von x abhängen, Y, Y', Y'' nur von y. Durch Hinzufügung leicht zu bildender Integrale kann man daher aus w eine Funktion z ableiten, die der Gleichung $\Delta z = 0$ genügt und mit u und v durch die Beziehung verbunden ist:

$$\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = u(x, y),$$

wodurch die Potentialeigenschaft von u erwiesen ist.

Nach *Hilbert*'schen Prinzipien behandelt *E. R. Hedrick*[63]) die

62) l. c. § 4. Dieses Beweisverfahren zeigt eine grosse Analogie mit dem von *P. du Bois-Reymond* für einfache Integrale angewandten (siehe Fussn. 39), geht aber wesentlich weiter, da es auch die Existenz erster Derivierter der Minimalfunktion zu erschliessen gestattet.

63) Diss. Gött. 1901, p. 64 ff.

Randwertaufgabe für die *Liouville*'sche Gleichung $\Delta u = e^u$ (II A 7 c, Nr. 12, *Sommerfeld*). *Ch. M. Mason*[64]) gelangt durch Betrachtung des einfachen Integrales $\int_a^b y'^2 dx$ mit der Nebenbedingung:

$$\int_a^b A(x) y^2 dx = 1 \qquad (A(x) > 0)$$

zu einer Behandlung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + \lambda A(x) y = 0$ (II A 7 a, *Bôcher*). Er bestätigt die in der Physik aus blossen Analogiegründen zugelassene Annahme, dass zu jeder „homogenen" Randbedingung unendlich viele „ausgezeichnete" Werte von λ gehören, und insbesondere, dass es bei periodischem $A(x)$ unendlich viele Werte von λ giebt, für welche die Gleichung periodische Lösungen besitzt[65]).

64) Diss. Gött. 1903, p. 29 ff. Diese Beweismethode ist nachgebildet der von *H. Weber* (Math. Ann. 1 (1869), p. 1) auf die partielle Differentialgleichung der schwingenden Membran (II A 7 c, Nr. 9, *Sommerfeld*) angewandten Betrachtungsweise. Ihre Durchführung bei *Mason* ist aber nicht überall einwandfrei.

65) l. c. p. 52 ff.

(Abgeschlossen im Januar 1904.)

II A 9a. TRIGONOMETRISCHE INTERPOLATION (MATHEMATISCHE BEHANDLUNG PERIODISCHER NATURERSCHEINUNGEN)

VON

H. BURKHARDT

IN ZÜRICH.

Inhaltsübersicht.

1. Bezeichnungen.
2. Hülfsformeln.
3. Vorgeschichte.

I. Erscheinungen mit einer bekannten Periode.

4. Die Begründung der trigonometrischen Interpolation für äquidistante Argumente durch *Fr. W. Bessel.*
5. Trigonometrische Interpolation für beliebige Argumente.
6. Trigonometrische Interpolation für sehr zahlreiche Argumente.
7. Das Verfahren von *Leverrier.*
8. Interpolation ausgefallener Beobachtungen.
9. Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Funktion.
10. Behandlung der Extreme bei trigonometrischer Interpolation.
11. Berechnung des Ganges einer periodischen Erscheinung während einer längeren Periode aus Mittelwerten für kürzere Zeiträume.
12. Verwendung der trigonometrischen Interpolation zu mechanischer Quadratur. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen aus möglichst wenig Beobachtungen.
13. Trigonometrische Interpolation von Funktionen zweier Argumente.

II. Separation mehrerer bekannter Perioden.

14. Vorbemerkungen, insbesondere über theoretische und praktische Inkommensurabilität.
15. Elimination von säkularen Störungen.
16. Separation zweier Perioden von gleicher Grössenordnung.
17. Verfahren in komplizierteren Fällen. Die harmonische Analyse der Gezeiten.
18. Bestimmung der Komponenten aus Beobachtungen der Extrema allein.
19. Abgekürztes Verfahren.
20. Zusammenfassung mehrerer periodischer Terme zu einem einzigen von veränderlicher Amplitude und Phase.

III. Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

21. Die Methode von *Lagrange*.
22. Die Sätze von *Nervander* und *Buys-Ballot*.
23. Pulling und Pushing.
24. Neuere Ansätze.
25. Kritik vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

IV. Hülfsmittel zur Ausführung der Rechnungen.

26. Rechenschemata für spezielle Werte der Anzahl Beobachtungen.
27. Tabellen und Schablonen.
28. Instrumentelle Hülfsmittel zum Rechnen mit den Formeln.
29. Hülfsmittel zur Ableitung der Formeln (harmonische Analysatoren).
30. Hülfsmittel zur Trennung verschiedener Perioden und zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

Litteratur.

Ein zusammenfassendes Lehrbuch über den ganzen hier behandelten Fragenkomplex existiert nicht; die einzelnen Untersuchungen sind von Vertretern der verschiedenen Anwendungen nach Bedürfnis behandelt worden, sehr häufig ohne Kenntnis davon, dass sie bei Gelegenheit einer anderen Anwendung bereits erledigt waren.

Eine ausführlichere Darstellung der historischen Entwicklung findet sich bei *H. Burkhardt*, Jahresbericht d. M.-V. 10, 1902, § 25, p. 228—342; eine spezielle Geschichte der meteorologischen Anwendungen bei *A. Schmidt*, Progr. Gotha 1894.

1. Bezeichnungen. Als *periodisch mit der Periode* T (im *engeren* Sinne) wird eine Funktion einer unabhängigen Veränderlichen t zunächst dann bezeichnet, wenn sie sich bei Vermehrung des Arguments um T nicht ändert, wenn also für jedes t:

$$f(t + T) = f(t) \tag{1}$$

ist. Die einfachsten Funktionen dieser Art sind diejenigen, die die Gleichung einer *„einfachen harmonischen Schwingung“* geben:

$$y = A \cos kt + B \sin kt = R \sin (kt + \alpha) = R \cos k(t - t_0); \tag{2}$$

$k = 2\pi/T$ heisst *Schwingungszahl*, A und B *Koeffizienten*, R *Amplitude**), R^2 *Intensität*, α *Phasenkonstante*, t_0 *Epoche* (des Maximums). Eine Funktion, deren Periode ein Submultiplum von T ist, ist zugleich eine Funktion von der Periode T; desgleichen eine Summe von solchen Funktionen. Eine Summe von einfachen Schwingungen, deren Perioden alle Submultipla von einer von ihnen sind, heisst eine

*) In der Litteratur findet man häufig auch $2R$ als Amplitude oder „range“ bezeichnet.

zusammengesetzte Schwingung; der zur grössten Periode gehörige Bestandteil, in erweitertem Gebrauch eines akustischen Terminus, *Grundton*, die übrigen seine *Obertöne*. Dass jede analytische periodische Funktion durch eine zusammengesetzte Schwingung dargestellt werden kann, kann vermittelst der Substitution $z = e^{it}$ aus dem *Laurent*'schen Satze (II B 1, Nr. 9, *Osgood*) abgeleitet werden[1]); die Frage, wie weit auch nicht analytische Funktionen eine solche Darstellung zulassen, ist für die hier zu besprechenden Aufgaben irrelevant.

Wo im folgenden von solchen periodischen Funktionen im engeren Sinne die Rede ist, wird zur Vereinfachung der Formeln stets angenommen, die Einheit, in der die Variable t gemessen wird, sei so gewählt, dass die Periode des Grundtons gleich 2π ist[2]).

In *weiterem* Sinne wird hier eine Funktion auch dann noch als periodisch bezeichnet, wenn sie sich durch eine Summe von Termen der Form (2) — ihren *Komponenten* — ausdrücken lässt, auch ohne dass die Perioden der einzelnen Komponenten Submultipla von einer von ihnen zu sein brauchen.

Im folgenden wird die (an und für sich natürlich unbestimmte) Aufgabe[3]) behandelt, von einer solchen Funktion einen analytischen Ausdruck zu finden, wenn zu einer Anzahl Argumentwerte t_μ die zugehörigen Funktionswerte y_μ gegeben sind. Diese Werte y_μ sollen dabei kurz als die *Beobachtungen* bezeichnet werden, die Werte t_μ als ihre *Argumente* oder auch als ihre *Termine*. Das Intervall zwischen dem ersten und dem letzten Beobachtungstermin heisst der *Beobachtungszeitraum*.

2. Hülfsformeln. Von den für das Rechnen mit trigonometrischen Interpolationsformeln fundamentalen Relationen

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{m} \sin \mu t = \dfrac{\sin \frac{mt}{2} \sin \frac{(m+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}, \\ \sum_{\mu=0}^{m} \cos \mu t = \dfrac{\cos \frac{mt}{2} \sin \frac{(m+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \end{cases}$$

1) *A. Cauchy*, Par. C. R. 12 (1841), p. 323; Oeuvres (1) 6, p. 79.

2) *A. Schuster*, Terr. Magn. 3 (1898), Nr. 15, p. 35 schlägt vor: Von einer „Periodizität T" solle man nur dann reden, wenn die Funktion in der Zeit T nur ein Maximum und ein Minimum erreicht; die Gesamtheit der zu T und seinen Submultiplis gehörenden Terme könne man eine „Oscillation" oder eine „Variation" nennen.

3) Der Name *„harmonische Analyse"* für die Lösung dieser Aufgabe scheint

oder

$$\frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{m} \cos \mu t = \frac{\sin \frac{(2m+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

ist die erste der Sache nach in einem Satz des *Archimedes*[4]) enthalten, die zweite in der zweiten Form von *W. Snellius*[5]) gegeben. Die allgemeineren Formeln:

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{\mu=0}^{m} \sin (a + \mu t) = \dfrac{\sin \left(a + \frac{mt}{2}\right) \sin \frac{(m+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}, \\ \sum_{\mu=0}^{m} \cos (a + \mu t) = \dfrac{\cos \left(a + \frac{mt}{2}\right) \sin \frac{(m+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \end{cases}$$

gewinnt *L. Euler*[6]), indem er die linken Seiten als rekurrierende Reihen auffasst. Der bequemste Weg, um sie ohne Benutzung komplexer Grössen zu erhalten, ist Multiplikation der linken Seiten (nicht mit $2 \sin t$ oder $2 \cos t$, sondern) mit $2 \sin t/2$ und Umformung der auftretenden Produkte je zweier trigonometrischen Funktionen in Summen von solchen[7]).

---

um 1860 in England in Gebrauch gekommen zu sein; einen bestimmten Urheber kann ich für ihn nicht angeben. Er hat übrigens Sinn nur für die unter I zu besprechenden Aufgaben; seine Anwendung auf die unter II zu besprechenden ist eine — wohl nicht mehr auszurottende — Gedankenlosigkeit.

4) De sphaera et cylindro, prop. 22; Opera ed. Heiberg 1, p. 98. Vgl. *G. Enström*, Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 444.

5) Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor, 1627 (posthum), prop. 3, p. 44; vgl. *A. Braunmühl*, Geschichte der Trigonometrie 1, Leipzig 1900, p. 240.

6) Misc. Berol. 7 (1743), p. 133. — Introd. in analysin infinitorum 1, Laus. 1748, Nr. 259, p. 218 erhält *Euler* die Formeln (4) als Differenzen zweier divergenter unendlicher Reihen; Petrop. N. Comm. 18 (1773) [74], p. 26 durch Benutzung der Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen reeller und Exponentialfunktionen rein imaginärer Argumente.

Auf Identitäten der im Text erwähnten Art, bezw. auf entsprechende Relationen für Summen von Potenzen trigonometrischer Funktionen lässt sich auch ein Teil der 1746 von *M. Stewart* ohne Beweis mitgeteilten „general theorems" zurückführen. Vgl. darüber *L. Ellis*, Cambr. Math. J. 2 (1841), p. 271; *T. S. Davies*, Edinb. Trans. 15 (1844), p. 573 (p. 603 Angaben über ältere mir nicht zugängliche Litteratur); Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), p. 229; *P. Breton (de Champ)*, J. de math. 13 (1848), p. 281.

7) Diese Bemerkung *A. J. Lexell*'s (Petrop. N. Comm. 18 (1773) [74], p. 38) ist später vielfach nicht beachtet und von *Dippe* (Arch. Math. 7 (1846), p. 110) aufs neue gemacht worden.

Setzt man in den Gleichungen (3) $t = 2\varkappa\pi/n$, unter $\varkappa$ eine ganze Zahl verstanden, so erhält man:

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{2\varkappa\nu\pi}{n} = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos\frac{2\varkappa\nu\pi}{n} = \begin{cases} 0 \text{ für } \varkappa \not\equiv 0, \\ n \text{ für } \varkappa \equiv 0 \end{cases} \pmod n$$

und daraus wieder mit Hülfe der Umformung von Produkten trigonometrischer Funktionen in Summen:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos\frac{2\varkappa\nu\pi}{n}\cos\frac{2\lambda\nu\pi}{n} \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin\frac{2\varkappa\nu\pi}{n}\sin\frac{2\lambda\nu\pi}{n} \end{array}\right\} \\ = \begin{cases} 0, & \text{wenn weder } \varkappa+\lambda, \quad \text{noch} \quad \varkappa-\lambda \equiv 0 \pmod n, \\ \frac{n}{2}, \text{ bezw. } \pm\frac{n}{2}, & \text{wenn } \varkappa+\lambda \equiv 0 \textit{ oder } \varkappa-\lambda \equiv 0 \pmod n, \\ n, \text{ bezw. } 0, & \text{wenn } \varkappa+\lambda \equiv 0 \textit{ und } \varkappa-\lambda \equiv 0 \pmod n, \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin\frac{2\varkappa\nu\pi}{n}\cos\frac{2\lambda\nu\pi}{n} = 0 \quad \text{in jedem Falle.} \end{array}\right.$$

3. Vorgeschichte. Das Problem, eine gegebene Funktion $y = f(t)$ in eine Reihe der Form

$$(7)\qquad y = \sum_{\mu=0} A_\mu \cos \mu t$$

zu entwickeln, behandelt schon *A. Clairaut*[8]) als Interpolationsproblem: Er setzt für t der Reihe nach die Werte

$$(8)\qquad \frac{2\pi}{m}, \ \frac{4\pi}{m}, \ \frac{6\pi}{m}, \ \ldots$$

und erhält so wegen (5) zunächst:

$$(9)\qquad A_0 = \frac{1}{m}\sum_{\nu} f\left(\frac{2\nu\pi}{m}\right).$$

Dieselbe Formel liefert ihm auch die übrigen Koeffizienten, wenn vorher in dem Produkt $f(t)\cos\mu t$ die Produkte je zweier Kosinus

8) Par. Hist. 1754 (59), art. 4, p. 545 (vom Juli 57). *Clairaut*'s Formeln sind nur richtig, wenn die Anzahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder $\leqq m$ ist. Die Schlussformeln waren für die speziellen Werte $m = 1, 2, 3$ bereits von *Euler* in etwas versteckter Form angegeben worden (sur les inégalités du mouvement de Jupiter et de Saturne, Paris 1749, § 27, p. 28; die Abhandlung gehört zum 6. oder 7. Band des Pariser recueil des pièces qui ont remporté le prix), doch ohne Beweis, sodass nicht ersichtlich ist, ob er sie direkt als Interpolationsformeln, oder als Näherungsausdrücke für die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten der unendlichen Reihe durch bestimmte Integrale (17) gefunden hat.

durch Summen ersetzt werden. Andererseits wurde *J. L. Lagrange* bei seinen ersten Untersuchungen über Saitenschwingungen auf das Problem geführt, ein System von Gleichungen der Form

$$(10) \qquad Y_\nu = \sum_{\mu=1}^{m-1} B_\mu \sin \frac{\mu \nu \pi}{m} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m-1)$$

nach den B aufzulösen[9]); er reduziert es auf die Auflösung eines rekurrierenden Systems linearer Gleichungen und erhält so nach längerer Rechnung:

$$(11) \qquad B_\mu = \frac{2}{m} \sum_{\nu=1}^{m-1} Y_\nu \sin \frac{\mu \nu \pi}{m}.$$

Doch hebt er erst an späterer Stelle[10]) ausdrücklich hervor, dass durch diese Formeln die Aufgabe gelöst ist, durch $m-1$ Punkte mit äquidistanten Abscissen eine aus $m-1$ Sinuslinien zusammengesetzte Kurve zu legen.

In allgemeinerer Weisse fasst *Lagrange* das Problem trigonometrischer Interpolation bei Gelegenheit der Frage nach der Bestimmung der Ungleichheiten der Planetenbahnen nur aus Beobachtungen, indem er hier nicht nur die Amplituden, sondern auch die Phasenkonstanten und die Perioden selbst als unbekannt ansieht[11]).

Auch *J. H. Lambert* empfiehlt den Gebrauch trigonometrischer Interpolationsformeln bei „krummen Linien, die sich schlangenweise auf- und abwärts ziehen", doch nur unter der Voraussetzung einer periodischen Wiederkehr der einzelnen „Anomalien" und ohne Angabe einer Methode zur Bestimmung der Koeffizienten[12]).

I. Erscheinungen mit einer bekannten Periode.

4. Die Begründung der trigonometrischen Interpolation für äquidistante Argumente durch Fr. W. Bessel. Das allgemeine Pro-

9) Taur. Misc. 1 (1759), Nr. 26; Oeuvres 1, p. 87.

10) ib. 3[2] (1762/65), Nr. 40; Oeuvres 1, p. 552. Dass hier wirklich nur von Interpolationsformeln und nicht, wie man aus der Bezeichnung schliessen könnte, von Entwicklung in unendliche trigonometrische Reihen die Rede ist, geht aus späteren Äusserungen *Lagrange*'s (z. B. mécanique analytique, 2e éd., Paris 1811 (also *nach Fourier*), II VI, Nr. 59; Oeuvres 11, p. 436) unzweifelhaft hervor.

11) Par. Hist. 1772[1] (75), p. 513; Oeuvres 6, p. 505. Näheres unten Nr. 21.

12) Beyträge zum Gebrauch der Mathematik 3, Berlin 1772, V § 8, p. 74. — In *Lambert*'s posthumer Pyrometrie, Berlin 1779, die zuweilen hier zitiert wird, ist nicht von trigonometrischer Interpolation die Rede, sondern von Entwicklung einer analytischen Funktion in eine unendliche trigonometrische Reihe (§ 600, p. 317). — In *Tobias Mayer*'s op. ined., Gött. 1775, die auch manchmal genannt werden, handelt es sich nur um näherungsweise Darstellung von Beobachtungen durch *eine* trigonometrische Funktion.

blem der Bestimmung der Koeffizienten in der trigonometrischen Interpolationsformel[13]):

$$Y = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} \{ A_\mu \cos \mu t + B_\mu \sin \mu t \} \tag{12}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} R_\mu \sin \mu (t - t_\mu) \tag{13}$$

aus den Funktionswerten, die zu gegebenen, von einander und von den Enden der Periode äquidistanten Argumentwerten gehören, also der Auflösung des Gleichungssystems:

$$Y_\nu = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ A_\mu \cos \frac{2\mu\nu\pi}{n} + B_\mu \sin \frac{2\mu\nu\pi}{n} \right\} \tag{14}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

nach den A_μ, B_μ, ist zuerst von *Fr. W. Bessel* gelegentlich der Untersuchung der Fehler eines geteilten Kreises erledigt worden[14]). *Bessel* fasst sofort den Fall ins Auge, dass die Anzahl n der Gleichungen grösser ist, als die Anzahl $2m + 1$ der Unbekannten. Die „wahrscheinlichsten" Werte der letzteren werden dann erhalten, wenn man die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung zum Minimum macht (I D 2, Nr. **1**, *Bauschinger*); die aus dieser Forderung entspringenden Gleichungen reduzieren sich vermöge der Relationen (6) auf[15]):

---

13) Ob (12) oder (13) vorzuziehen sei, darüber ist gestritten worden; (12) ist bequemer zu berechnen, (13) bequemer zu benutzen.

14) Königsb. Beob. 1 (1815), p. III (Ges. Abh. 2, p. 24). Ein Hinweis auf die praktische Zweckmässigkeit solcher Formeln für die Darstellung periodischer Naturerscheinungen schon in einer Rezension *Bessel*'s, Jenaische Litteraturz. 1814[4], p. 412 (Rezensionen, p. 190). Vgl. auch *Bessel*'s Brief an *Gauss* vom Dez. 1813, Briefwechsel p. 182, 187.

15) Die aus den Formeln (15) hervorgehende Eigenschaft der „wahrscheinlichsten" Werte der Koeffizienten, dass sie unabhängig sind von der Anzahl der Glieder, die man berücksichtigen will, ist von *Bessel* ausdrücklich ausgesprochen worden und z. B. den Meteorologen immer geläufig geblieben. In anderen Kreisen ist sie in Vergessenheit geraten und für den Grenzfall $n = \infty$, in dem Integrale an Stelle der Summe treten, von *G. Plarr* (Par. C. R. 44 (1857), p. 984), dann von *A. Töpler* (Wien. Akad. Anzeiger 1876, p. 205), endlich von *Kirsch* (die Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine, Leipzig 1886, Nr. 6, p. 25) von neuem entdeckt worden. Sie gilt übrigens nur, solange die Anzahl der Gleichungen nicht kleiner als die der zu bestimmenden Koeffizienten ist, was zuweilen übersehen worden ist (z. B. noch ganz neuerdings von *M. Lévy*, Théorie des marées 1 (1898), Nr. 48, p. 78). Namentlich ist, wenn aus einer geraden Anzahl von Beobachtungen $n = 2l$ eine ebenso grosse Anzahl von

$$(15)\qquad \begin{cases} nA_\mu = 2\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_\nu \cos\frac{2\mu\nu\pi}{n}, \\ nB_\mu = 2\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_\nu \sin\frac{2\mu\nu\pi}{n}. \end{cases}$$

Ein späterer Aufsatz *Bessel*'s giebt noch den folgenden Ausdruck für die Summe der Fehlerquadrate[16]):

Koeffizienten bestimmt werden soll, der letzte Koeffizient A_t nur gleich der Hälfte des unter (15) angegebenen Wertes (so richtig schon bei *Gauss* [17]), Nr. 22, p. 299; neuerdings hervorgehoben von *F. R. Helmert*, Ausgleichungsrechnung, Leipzig 1872, § 32, p. 287; *T. R. Robinson*, Lond. Trans. 165 (1876), p. 420; *K. Weihrauch*, Dorp. Schriften 5 (1890), p. 15; *P. S. Schreiber*, N. A. Leop. 58 (1892), p. 171; *H. Pipping*, Fenn. Acta 20^{11} (1895), p. 18; *J. Macé de Lépinay*, J. de phys. (3) 8 (1899), p. 141; *H. Bruns*, Grundlinien des wissensch. Rechnens, Leipzig 1903, § 83, p. 117).

16) Astr. Nachr. 6 (1828), col. 333; Ges. Abh. 2, p. 368; engl. Quarterly weather report 1870. *Bessel* selbst macht (Nr. 4) darauf aufmerksam, dass man aus dieser Formel auf die wahrscheinlichen Fehler der *Beobachtungen* nur schliessen könne „wenn anderweitig bekannt ist, wo der Ausdruck abbricht". Ob ein solcher Rückschluss unter speziellen Verhältnissen nicht doch möglich sei, darüber ist neuerdings aus Anlass der harmonischen Analyse der Töne der menschlichen Stimme diskutiert worden. Geht man von der Voraussetzung aus, dass dem einzelnen beobachteten Wert ein bestimmter wahrscheinlicher Fehler zukomme, so ergeben die I D 2, Nr. 11 (*Bauschinger*) angegebenen Formeln bestimmte Werte für die wahrscheinlichen Fehler der Koeffizienten und für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wirkliche Fehler ein bestimmtes Vielfaches des „wahrscheinlichen" übersteigt. Noch kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wirkliche Fehler des einzelnen Koeffizienten dessen wahren Wert annähernd aufhebt, ungeheuer klein die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies bei einer grösseren Anzahl von Koeffizienten gleichzeitig eintritt. Man wird also, wenn sich für die Koeffizienten von einer bestimmten Stelle an sehr kleine Werte ergeben, zu der Vermutung berechtigt sein, dass die wahren Werte dieser Koeffizienten null sind; ist diese Vermutung zutreffend, so erlaubt die Übereinstimmung der Beobachtungen mit der Rechnung nach der abgekürzten Formel den Rückschluss auf die Genauigkeit der ersteren. Die Entscheidung darüber, ob die Voraussetzungen dieser Schlüsse im einzelnen Fall erfüllt sind, ist nicht Sache der Mathematik; sie sind es jedenfalls nicht, wenn Grund zu der Annahme vorliegt, dass die höheren Koeffizienten nicht wirklich null sind. Vgl. *H. Pipping*, Zeitschr. Biol. 27 (1890), p. 273; 31 (1895), p. 550; Fenn. Acta 20^{11}, (1895), p. 19; *E. Lindelöf*, ib. p. 63; 29^{9} (1901); Arch. Physiol. 87 (1901), p. 597; *Lindelöf* und *Pipping*, ib. 85 (1901), p. 59; 91 (1902), p. 310. Andererseits *L. Hermann*, ib. 61 (1895), p. 176; 83 (1901), p. 33; 86 (1901), p. 92; 89 (1902), p. 600. — Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler der Koeffizienten aus denjenigen der Beobachtungen auch bei *R. Strachey*, Lond. Roy. Proc. 42 (1887), Nr. 5, p. 65.

$$(16)\quad \sum_{\nu=0}^{n-1}\left\{ Y_\nu - \frac{1}{2}A_0 - \sum_{\mu=1}^{m}\left(A_\mu \cos\frac{2\mu\nu\pi}{n} + B_\mu \sin\frac{2\mu\nu\pi}{n}\right)\right\}^2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} Y_\nu^2 - \frac{n}{4}A_0^2 - \frac{n}{2}\sum_{\mu=1}^{m}(A_\mu^2 + B_\mu^2).$$

Für den speziellen Fall, dass die Anzahl der Gleichungen gleich der der Unbekannten ist, sind die Formeln (15) schon vor *Bessel* von *C. Fr. Gauss*[17]) und von *J. J. Fourier*[18]) gefunden, aber nicht publiziert worden.

Sieht man die gegebenen Funktionswerte Y_ν als spezielle Werte einer für ein stetig veränderliches Argument t definierten Funktion $y = f(t)$ an, so kann man die Koeffizienten ihrer Entwicklung nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von t durch die in Artikel 9b näher zu besprechenden Integralformeln:

$$(17)\quad A_\mu^{(\infty)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\mu t\,dt, \quad B_\mu^{(\infty)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\mu t\,dt$$

darstellen. Die Gleichungen (15) ergeben sich auch, wenn man diese Integrale näherungsweise nach der Rechtecksformel berechnet. Wendet man statt dessen die Trapezformel (II A 1, Nr. 51, *Voss*) an, so erhält man Werte, die noch die Faktoren enthalten[19]):

$$(18)\quad \frac{4n^2}{\mu^2\pi^2}\sin^2\frac{\mu\pi}{2n}.$$

Zwischen den genauen Werten (17) und den angenäherten (15) (oder überhaupt zwischen den aus einer grösseren und den aus einer

---

17) Werke 3, Nr. 20, p. 295; (aus dem J. 1805, vgl. Briefwechsel mit *Olbers*, p. 281, 286). *Gauss* setzt voraus, dass das Beobachtungsintervall ein aliquoter Teil der Periode sei, aber nicht, dass eine Beobachtung auf den Anfang der Periode falle.

18) Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, Nr. 271 (Oeuvres 1, p. 287; die bez. Untersuchungen gehören nach *Fouriers*'s eigener Mitteilung Par. mém. 1821/22 (26), (Oeuvres 2 p. 94) zu seinen ältesten, fallen also vor 1807). Bei *S. D. Poisson* steht J. éc. polyt. cah. 19 (1823), Nr. 62, p. 444 und Théorie de la chaleur, Paris 1835, Nr. 101, p. 200 nur *Lagrange*'s Formel (11).

19) *Kirsch*, [15]) Nr. 7, p. 29; auch *P. Schreiber*'s näherungsweise Berechnung der Koeffizienten (N. A. Leop. 58 (1892), I B, p. 152) kommt auf die Trapezformel hinaus. — Man sieht aus der Vergleichung beider Arten von Formeln deutlich, dass man die aus n Beobachtungen berechneten Koeffizienten sicher nur soweit als zuverlässig betrachten kann, als die Faktoren (18) nicht wesentlich von 1 verschieden sind; das ist nicht immer beachtet worden, z. B. nicht in der Diskussion über den täglichen Gang der Temperatur [45]) und auch nicht in der Polemik *Hermann-Lindelöf* [16]).

kleineren Anzahl von Beobachtungen berechneten) Werten der Koeffizienten bestehen die Relationen[20]):

$$(19)\qquad \begin{cases} A_\mu = A_\mu^{(\infty)} + \sum_{s=1}^{\infty}\left(A_{\mu+sn}^{(\infty)} + A_{\mu-sn}^{(\infty)}\right) \\ B_\mu = B_\mu^{(\infty)} + \sum_{s=1}^{\infty}\left(B_{\mu+sn}^{(\infty)} - B_{\mu-sn}^{(\infty)}\right) \end{cases}$$

(aber $A_l = A_l^{(\infty)} + A_{3l}^{(\infty)} + A_{5l}^{(\infty)} + \cdots$, wenn $n = 2l$).

Dass die Formel (12) eben nur eine Interpolationsformel ist, unter die sich beliebige Beobachtungen zwingen lassen, dass also aus der Möglichkeit, eine bestimmte Beobachtungsserie mit ihr darzustellen, nicht auf eine physikalische Bedeutung ihrer einzelnen Terme und ihrer Koeffizienten geschlossen werden darf, haben schon *J. Lamont*[21]) und *Bravais*[22]) hervorgehoben; gleichwohl ist noch neuerdings öfters die entgegengesetzte Auffassung laut geworden[23]).

In komplexer Gestalt treten die trigonometrischen Interpolationsformeln bei *A. Cauchy* auf[24]).

Trigonometrische Interpolationsformeln, in denen nur ungerade Vielfache des Arguments erscheinen, geben *E. H. Dirksen*[25]), *K. Weihrauch*[26]) und *L. Gegenbauer*[27]).

5. Trigonometrische Interpolation für beliebige Argumente. Sind die gegebenen Argumente nicht äquidistant, so erhält man zunächst in Analogie mit der *Lagrange*'schen Interpolationsformel für rationale Funktionen (I D 3, Nr. 3, *Bauschinger*) die Formel:

---

20) Die Formeln für die A schon bei *Euler,* Petrop. N. Acta 11 (1793) (98), Nr. 28, p. 111 (von 1777); auch die für die B bei *Gauss* [17]), Nr. 21, p. 298; neuerdings bei *Helmert* [15]); *K. Weihrauch,* Dorp. Schriften 4 (1888), p. 33; *L. Grossmann,* Hamb. Seewarte Arch. 17[5] (1894), p. 1. (Bei *H. Bruns,* Grundlinien [15]), § 83, p. 116 die Gleichung für A_l richtig, nur die Bezeichnung anders.)

21) Münch. Abh. 3 (1843), p. 82.

22) Voyages de la commission scientifique du Nord, publiés sous *P. Gaimard,* météorologie t. 2, Paris o. J. [zwischen 1844 und 1848], p. 305.

23) *B. A. Gould,* Amer. J. of sci. 119 (1880), p. 212; *L. Grossmann* [17]) p. 3. *A. Nippoldt* jun. (Zeitschr. math. Unterr. 29 (1898), p. 401; weniger schroff Hamb. Seewarte Archiv 26 (1903), p. 3) stellt die letztere Auffassung als die „meteorologische" der ersteren als der „mathematischen" gegenüber.

24) Extrait du mém. prés. à l'acad. de Turin le 11. oct. 1831, Turin 1832 (lith.), p. 117; ital. opuscoli mat. e fis. di diversi autori 2 (1834), p. 99 des S.-A. Dann Par. C. R. 12 (1841), p. 290; Oeuvres (1) 6, p. 69.

25) Berl. Abh. 1827 (30), § 7, p. 101.

26) Dorp. Schriften 4 (1888), p. 15, 41.

27) Wien. Ber. 100[2a] (1891), § 2, p. 655.

$$(20) \qquad Y = \sum \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b)\sin \frac{1}{2}(t-c)\dots}{\sin \frac{1}{2}(a-b)\sin \frac{1}{2}(a-c)\dots} f(a),$$

deren Glieder durch Vertauschung der Termine $a, b, c, \dots$ auseinander hervorgehen[28]); ist die Anzahl der Beobachtungen ungerade, so lässt sich ihre rechte Seite nach den Funktionen der Vielfachen von t entwickeln[29]). Für eine gerade Anzahl von Beobachtungen leistet dasselbe die Formel[30]):

$$(21) \qquad Y = K \sin \tfrac{1}{2}(t-a)\sin \tfrac{1}{2}(t-b)\dots + \sum \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b)\sin \frac{1}{2}(t-c)\dots}{\sin \frac{1}{2}(a-b)\sin \frac{1}{2}(a-c)\dots} \cos \tfrac{1}{2}(t-a) f(a),$$

in der K willkürlich bleibt. Sollen nur Kosinus- oder nur Sinusglieder auftreten, so kann man

$$(22) \qquad Y = \sum \frac{(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c)\dots}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)\dots} f(a),$$

bezw.

$$(23) \qquad Y = \sum \frac{\sin t\,(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c)\dots}{\sin a\,(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)\dots} f(a)$$

benutzen[31]).

6. Trigonometrische Interpolation für sehr zahlreiche Argumente. Sollen aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen nur eine verhältnismässig kleine Anzahl von Koeffizienten berechnet werden, so kann man sich eines Interpolationsverfahren von *P. L. Tschebyscheff* bedienen[32]), das die gegebenen Funktionswerte nur durch Addition und Subtraktion verbindet und von dem *H. Bruns*[33]) gezeigt hat, dass

---

28) *A. Cauchy,* Par. C. R. 12 (1840), p. 290 (Oeuvres (1) 6, p. 69); *Gauss* [17]) Nr. 10, p. 279. — *H. Bruns* (Grundlinien [15]), § 91, p. 129) stellt die Frage, wie man durch zweckmässige Wahl der Termine $a, b, c, \dots$ den Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate herabdrücken könne.

29) Diese von *Gauss* nur postulierte Rechnung wird von *K. Weihrauch* durchgeführt, Dorp. Schriften 4 (1888), p. 2. Er behandelt auch speziell den Fall, dass man ausser einer vollständigen Serie äquidistanter Beobachtungen noch einige überzählige hat (ib. II 1, p. 33).

30) *Gauss,* Nr. 11, p. 281. Eine einfache Ableitung dieser Formel aus (20) bei *B. Baillaud,* Toulouse observ. ann. 2 B (1886), Nr. 9, p. 11.

31) *Gauss,* Nr. 16, p. 290.

32) Petersb. mém. (7) 1^5, 1859; Auszug Petersb. Bull. 16 (1858), col. 353 (Oeuvres 1, p. 385, 711). Erläuterungen und Beispiele auch bei *P. Backlund,* Petersb. Bull. 28 (1884), col. 477; *P. Harzer,* Astr. Nachr. 115 (1886), col. 337; *R. Radau,* Bull. astron. 8 (1890) (auch sep. Paris 1891), Nr. 34, p. 425.

33) Astr. Nachr. 146 (1898), col. 161; übersichtlicher Grundlinien [15]), § 93, p. 130. Dort auch § 98, p. 136 Erörterung der Frage, welchen Einfluss Fehler der Funktionswerte auf die nach (25) berechneten Koeffizienten haben (der Fehler reduziert sich erst bei Bildung von (25), nicht schon in (24)).

es sich besonders für trigonometrische Interpolation eignet. Man bilde die Summen:

$$(24)\qquad \begin{cases} U_n = \frac{1}{2n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{4\nu \cdot 2\pi}{4n}\right) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{(4\nu+2)\cdot 2\pi}{4n}\right)\right\}, \\ V_n = \frac{1}{2n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{(4\nu+1)\cdot 2\pi}{4n}\right) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{(4\nu+3)\cdot 2\pi}{4n}\right)\right\}, \end{cases}$$

und aus ihnen:

$$(25)\qquad A_\mu = \sum_k a_{2k+1} U_{(2k+1)\mu}, \quad B_\mu = \sum_k b_{2k+1} V_{(2k+1)\mu}.$$

Dabei bedeutet a_k die Zahl 0 oder $+1$ oder -1, je nachdem k durch das Quadrat einer Primzahl teilbar oder ein Produkt einer geraden oder einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfaktoren ist[34]), b_k ist $= i^{k-1}a_k$. Gehören die gegebenen Argumente nicht zu den in (24) angenommenen, so sind die Summen so zu bilden, dass die Vorzeichenwechsel möglichst nahe an den richtigen Stellen eintreten.

7. Das Verfahren von Leverrier. Die Formeln von Nr. 4 haben den Nachteil, dass man mit ihnen die ganze Rechnung noch einmal vornehmen muss, wenn es sich nachträglich als erforderlich erweist, eine grössere Anzahl von Beobachtungen zu berücksichtigen, als man ursprünglich in Aussicht genommen hatte[35]). Diese Schwierigkeit fällt nach einer Bemerkung von *U. J. Leverrier*[36]) weg, wenn man die Argumente zwar in gleichen Abständen α von einander, aber so wählt, dass α zur Periode praktisch inkommensurabel ist. *Leverrier*'s eigene Darstellung ist wenig übersichtlich; *J. F. Encke*[37]) und *G. J. Hoüel*[38]) haben sie vereinfacht. Letzterer gelangt schliesslich zu folgender Vorschrift[39]):

---

34) Also dasselbe, was in der Zahlentheorie (I C 3, *Bachmann*, Nr. 3) mit $\mu(k)$ bezeichnet wird.

35) *J. Macé de Lepinay* (J. de phys. (3) 8 (1899), p. 144) und *H. Bruns* (Grundlinien [15]), § 87, p. 122) zeigen, wie man in solchen Fällen zweckmässigerweise verfährt, um wenigstens einen Teil der Rechnung beibehalten zu können.

36) Par. observ. ann. 1 (1855), Nr. 24, p. 118 und add. 3, p. 384 (von 1843); eine Andeutung auch schon bei *A. Cauchy*, Par. C. R. 12 (1840) (Oeuvres (1) 6, p. 77). Eine ältere Veröffentlichung *Leverrier*'s „Développements sur qques. points de la théorie des perturbations des planètes" war mir nicht zugänglich; an sie knüpft *J. W. Lubbock* an, Phil. Mag. 33 (1848), p. 106.

37) Berl. astr. Jahrb. 1860, p. 313 (Ges. Abh. 1, p. 188).

38) Par. observ. mém. 8 (1865), p. 83 (Auszug Par. C. R. 53 (1861), p. 830); Prag Archiv 1 (1875) (auch sep. Paris 1875).

39) 1865, Nr. 27, p. 107; 1875, Nr. 6, p. 9 des S.-A. Für den Fall eines sehr grossen n rät *Hoüel* zu etwas anderer Anlage der Rechnung (Vertauschung der Summationsreihenfolge); 1865, Nr. 43, p. 124; 1875, Nr. 27, p. 26.

Aus den gegebenen Funktionswerten y bilde man die Kombinationen

$$V_\nu = y_1 \pm y_{-\nu} \mp y_{\nu-1} - y_{-\nu+1} \tag{26}$$

(hier und in den folgenden Formeln sind einmal überall die oberen, dann überall die unteren Zeichen zu nehmen; dann die Hülfsgrössen)[40]):

$$\pi_\mu = 2^\mu \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha}{2}\cdots\sin\frac{\mu\alpha}{2}, \quad \lambda_{\nu,h} = (-1)^{h+\nu}\frac{\pi_{2\nu-1}}{\pi_{\nu-h}\pi_{\nu+h-1}} \tag{27}$$

und aus beiden:

$$\begin{cases} \delta A_{0,\nu} = \dfrac{(-1)^\nu}{\pi_\nu^2}\left(\sum_{h=1}^{\nu-1}\lambda_{\nu,h}V_h + V_\nu\right), \\ \delta z_{\mu,\nu} = \dfrac{(-1)^{\mu+\nu}2\sin\mu\alpha}{\pi_{\nu-\mu}\pi_{\nu+\mu}}\left(\sum_{h=1}^{\nu-1}\lambda_{\nu,h}V_h + V_\nu\right), \\ z_{\nu,\nu} = \dfrac{1}{\pi_{2\nu}}\left(\sum_{h=1}^{\nu-1}\lambda_{\nu,h}V_h + V_\nu\right); \end{cases} \tag{28}$$

dann ergeben sich für die Koeffizienten die Werte:

$$\left.\begin{matrix} A_\mu \sin\frac{1}{2}\mu\alpha \\ B_\mu \cos\frac{1}{2}\mu\alpha \end{matrix}\right\} = z_{\mu,\mu} + \sum_{\nu=\mu+1}\delta z_{\mu,\nu}, \quad A_0 = \sum_{\nu=1}\delta A_{0,\nu}. \tag{29}$$

O. Callandreau[41]) bemerkt, dass man in den Gleichungen (22) und (23) statt $\cos a$, $\cos b, \ldots$ bezw. die drei ersten Dezimalstellen dieser Werte nehmen und Produkttafeln benutzen könne; das biete bei bequemerer Rechnung dieselben Vorteile wie *Leverrier*'s Verfahren.

8. Interpolation ausgefallener Beobachtungen. Für den Fall, dass aus einer Reihe sonst äquidistanter Beobachtungen einzelne ausgefallen sind und interpoliert werden sollen, kann man sich zunächst der linearen, bezw. parabolischen Interpolation bedienen. *L. Fr. Kämtz*[42]) empfiehlt, mit dem durch lineare Interpolation gefundenen Wert die Berechnung der Konstanten der *Bessel*'schen Formel vorzunehmen und aus dieser einen zweiten Näherungswert abzuleiten, der erforderlichenfalls zur Wiederholung des Verfahrens dienen kann. *Bessel* selbst giebt die Vorschrift[43]), man solle die betr. Terme in den Gleichungen (15) abtrennen, sodass sie lauten:

40) Tabelle der Logarithmen dieser Hülfsgrössen 1865, p. 146; ausführlicher 1875 auf besonderen Tafeln.

41) Ann. éc. norm. (2) 8 (1879), p. 232.

42) Lehrbuch der Meteorologie 1, Halle 1831, p. 67.

43) Astr. Nachr. 6 (1828), col. 333 (Ges. Abh. 2, Nr. 5, p. 368). Ähnlich verfährt auch *G. D. E. Weyer*, Ann. der Hydrogr. 16 (1888), p. 85. Eine Modifika-

$$(30)\quad \begin{cases} A_\mu = \frac{2}{n}\left\{\sum Y_\nu \cos\frac{2\mu\nu\pi}{n} + Y_h \cos\frac{2\mu h\pi}{n} + Y_k \cos\frac{2\mu k\pi}{n} + \cdots\right\}, \\ B_\mu = \frac{2}{n}\left\{\sum Y_\nu \sin\frac{2\mu\nu\pi}{n} + Y_h \sin\frac{2\mu h\pi}{n} + Y_k \sin\frac{2\mu k\pi}{n} + \cdots\right\}, \end{cases}$$

wo jetzt die Summen nur über die wirklich gemachten Beobachtungen zu erstrecken sind. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (14) ein, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten Gleichungen derselben Form wie (14). Nur ist zu beachten, dass in diesem Falle die Werte der Koeffizienten nicht mehr unabhängig davon sind, wie weit man mit ihrer Bestimmung gehen will. *K. Weihrauch* hat die von *Bessel* geforderte Rechnung allgemein durchgeführt[44]); es treten dabei Cirkulanten (I A 2, Nr. **16**, *Netto*) auf.

Selbstverständlich sind solche Interpolationen nur zulässig, wenn angenommen werden darf, dass während der Zeit, aus der keine Beobachtungen vorliegen, der Gang der Erscheinung denselben Gesetzen folgte, wie während der Zeit der Beobachtungen. Steht das nicht fest, oder weiss man etwa gar, dass das Gegenteil der Fall ist, so liegt nicht eine Interpolation, sondern eine unzulässige Extrapolation vor[45]).

9. Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Erscheinung. Zur Berechnung des Mittelwertes einer periodischen Erscheinung dient die erste der Formeln (12)[46]). *H. Lloyd* hat auch bereits auf den Satz aufmerksam gemacht[47]): die Behauptung, dass man das wahre

---

tion von *Bessel's* Verfahren giebt *M. Guist,* Progr. Hermannstadt 1864, p. XXXVII. Spezielle Formeln für $n = 8$ und $n = 12$ bei *A. Bravais* in einer Note zur franz. Übers. von *Kämtz'* Vorlesungen (Cours de météorologie, Paris 1843), p. 483.

44) Zeitschr. Meteorol. 20 (1885), p. 216; Dorp. Schriften 5 (1890), III 3, p. 17. *Weihrauch* empfiehlt p. 35, bei Interpolation zufällig ausgefallener Beobachtungen alle möglichen die Lücke in ihrem Innern enthaltenden Beobachtungen mit heranzuziehen, nicht bloss die mit dem konventionell festgesetzten Anfang beginnende.

45) Solche Verhältnisse liegen bei dem täglichen Gang der Temperatur vor, der wesentlich davon beeinflusst wird, ob die Sonne über oder unter dem Horizont steht. Man kann also nicht aus nur bei Tage angestellten Beobachtungen den Verlauf der Temperatur während der Nacht extrapolieren. Vgl. darüber *G. V. Schiaparelli,* Milano effem. 1867, app. Nr. 11, p. 8; *H. Wild,* Repert. Meteor. Suppl. 1 (1881) (77), p. 101; *A. Angot,* Assoc. franç. 18 (1889), p. 281. Andererseits geht *P. Schreiber,* Leop. N. A. 48 (1892), p. 206 zu weit, wenn er nur solche Interpolationen für zulässig erklärt, die linear geschehen können.

46) Man beachte, dass bei der hier benutzten Bezeichnung $\frac{1}{2}A_0$ der Mittelwert ist.

47) Dubl. Trans. 22 (1849), Nr. 3, p. 63 (Auszüge Dubl. Proc. 4 (1850), p. 80;

Mittel einer Erscheinung aus n beliebigen äquidistanten Beobachtungen erhalten könne, ist äquivalent mit der, dass sich die betr. Erscheinung durch die *Bessel*'sche Formel mit n Koeffizienten genau darstellen lasse. Doch verbietet sich die Anwendung dieses Satzes meist aus praktischen Rücksichten; man hat daher für die Berechnung des Mittelwertes aus Beobachtungen zu Terminen, die nach solchen Rücksichten gewählt sind, eine grosse Anzahl verschiedener Formeln mit mehr oder weniger einfachen Koeffizienten vorgeschlagen[48]). Zur systematischen Ableitung solcher Formeln aus der allgemeinen Interpolationsformel (20) liegt nur bei *K. Weihrauch*[49]) ein Ansatz vor.

10. Behandlung der Extrema bei trigonometrischer Interpolation. Aus der allgemeinen Formel (20) erhält man, wenn man die Argumente teilweise zusammenrücken lässt, durch Grenzübergang Formeln, die der Voraussetzung entsprechen, dass man für gewisse Argumentwerte ausser den Werten der zu bestimmenden Funktion selbst auch noch die Werte einiger ihrer niedrigsten Ableitungen kennt[50]). Von solchen Formeln würde in dem allerdings selten vor-

---

Brit. Assoc. Report. für 1848, p. 1). Ebenso *Guist* [43]), p. XIII; *P. A. Serpieri,* Meteor. ital. 1867, suppl. p. 18 (auch sep. Urbino 1866); *Ragona* (nach dem Bericht von *G. Cantoni,* ib. p. 45). *G. V. Schiaparelli* und *Celoria* bezeichnen ib. Nr. 34, p. 8 den Satz als Astronomen und Geodäten wohlbekannt und von ihnen zur Elimination der Teilungsfehler ihrer Instrumente fortwährend benutzt. *Lloyd* und *Guist* gründen auf ihn Methoden zur Interpolation ausgefallener Beobachtungen.

Umgekehrt benutzt *S. Drach,* Phil. Mag. 20 (1842), p. 477, den Satz, um aus der Übereinstimmung der auf verschiedene Art berechneten Mittelwerte auf die Möglichkeit der Darstellung der Erscheinung durch die *Bessel*'sche Formel mit bestimmter Gliederanzahl zu schliessen.

48) Zusammenstellung solcher Formeln und Vergleich ihrer Resultate mit den aus zahlreicheren Beobachtungen (manchmal allerdings aus selbst schon interpolierten!) abgeleiteten geben *L. Fr. Kämtz,* J. Chem. Phys. 47 (1826), p. 393; *H. Dove,* Berl. Abh. 1846 (48), phys. Kl., p. 102; *Ch. Dewey,* Smiths Report. 1857, p. 310; 1860, p. 413; *J. Edlund,* Stockh. meteor. Iaktt. 1 (1859), p. XII; *G. Cantoni,* Meteor. ital. 1867, suppl., p. 45; 1869, suppl., p. 86; *W. Köppen,* Repert. Meteor. 3^7 (1873); *K. Jelinek,* Wien. Denkschr. 27 (1867), Tafel V, p. 118; *H. Wild,* Repert. Meteor. Suppl. 1, 1881, Tabelle V, p. XLVII (Erläuterungen p. 151, 166); am ausführlichsten *Fr. Erk,* Münch. Abh. 14 (1883), p. 175 (Auszug Meteor. Zeitschr. 19 (1884), p. 254).

49) Dorp. Schriften 4 (1888), II 1, Nr. 4, p. 26. Bei Benutzung von *Weihrauch*'s Resultaten würde zu beachten sein, dass seine Schlüsse die genaue Darstellbarkeit der betr. Erscheinung durch die *Bessel*'sche Formel mit der betr. Gliederzahl voraussetzen; er erwähnt das hier nicht noch einmal ausdrücklich, weil er diese Voraussetzung durchgängig macht.

50) *F. G. Teixeira,* Nouv. ann. (3) 4 (1885), p. 351; *F. Diestel,* Diss. Gött. 1890.

kommenden Falle Gebrauch zu machen sein, dass man den Termin kennt, zu dem eine Erscheinung einen ihrer extremen Werte erreicht, und zugleich den Betrag dieses Extremums selbst. Kennt man nur den letzteren, aber nicht den ersteren, so scheint die allgemeine Behandlung der sich ergebenden Gleichungssysteme Schwierigkeiten zu bieten; einige spezielle Fälle sind von *K. Weihrauch* diskutiert[51]).

Für die umgekehrte Frage der Ableitung der Extrema aus der Interpolationsformel ist zu beachten: Für jede Art von Interpolationsformeln gilt, dass die Werte der Ableitung einer Funktion und insbesondere die Lagen ihrer Extrema durch die Interpolationsformel nicht mit derselben Sicherheit dargestellt werden können, als die Werte der Funktion selbst. Denn daraus, dass die Werte der Differenz zwischen wahrem und interpoliertem Funktionswert selbst sehr klein sind, kann nichts über die Grösse der Werte der Ableitung dieser Differenz geschlossen werden: die Differenz könnte ja zahlreiche kleine Oscillationen aufweisen. Speziell bei den trigonometrischen Interpolationsformeln ist das nicht nur nicht von vornherein ausgeschlossen, sondern es findet im Gegenteil in jedem Falle wirklich statt: die Funktionen des n-fachen Winkels wechseln in der Periode $2n$-mal ihr Vorzeichen. In der Rechnung kommt diese Eigenschaft der trigonometrischen Interpolationsformeln dadurch zum Ausdruck, dass ihre höheren Glieder bei der Differentiation grosse Multiplikatoren erhalten[52]). Die Verkennung dieser Verhältnisse hat namentlich in der Meteorologie vielfach zu unrichtigen Angaben über die Lage der Extrema geführt, bis *H. Wild* mit dem Unwesen aufräumte[53]).

11. Berechnung des Ganges einer periodischen Erscheinung während einer längeren Periode aus Mittelwerten für kürzere Zeiträume. Häufig sieht man sich bei der Diskussion des Ganges einer Erscheinung während einer längeren Periode (z. B. während eines Jahres) veranlasst, aus den beobachteten Werten y_ν zunächst Mittelwerte Y_ν für kürzere Zeiträume (z. B. Monate) zu bilden und aus diesen erst den Gang für den längeren Zeitraum abzuleiten. Vielfach geschieht das dadurch, dass einfach die Y durch die *Bessel*'sche Formel dargestellt werden; doch hat schon *A. Bravais*[54]) darauf aufmerksam gemacht, dass die richtige Formel vielmehr ist:

51) Dorp. Schriften 5 (1890), IV 3, p. 68. 52) *L. Grossmann* [20]), p. 3.

53) Repert. Meteor. Suppl. 1, 1881, (77), p. 96 (Auszug Meteor. Zeitschr. 13 (1878), p. 108, 129). Eine dort p. 98 zitierte Bemerkung von *Behrens* aus früherer Zeit war mir nicht zugänglich. Ähnlich *P. Schreiber*, Leop. N. A. 58 (1892), p. 206, 210; dagegen *B. A. Gould*, Amer. J. of sci. 119 (1880), p. 213.

54) Voyages [22]), p. 321, 324. Die Sache ist wiederholt in Vergessenheit

$$(31) \qquad y = \sum \frac{\mu\pi}{p \sin \frac{\mu\pi}{p}} R_\mu \sin \mu (t - t_\mu),$$

unter R_μ, t_μ die aus den Y berechneten Werte verstanden, unter p die Anzahl der in dem längeren Zeitraum enthaltenen kürzeren Zeiträume. Die Amplituden der einzelnen Komponenten werden also durch die Verwendung von (13) statt (31) um so stärker verringert, je höher ihre Ordnungszahl ist. Man kann übrigens auch die y_ν aus den Y_ν durch parabolische Interpolation ableiten; *J. D. Forbes* erhält so die Formel[55]):

$$(32) \qquad y_\nu - Y_\nu = \frac{1}{p} \left\{ Y_\nu - \frac{1}{2} (Y_{\nu-1} + Y_{\nu+1}) \right\}.$$

In der meteorologischen Litteratur ist diese Frage noch mit einer anderen verquickt: die bürgerlichen Monate sind ungleich lang, man darf also Beobachtungen, die zu ihren Mitten gehören, nicht als genau äquidistant ansehen[56]). Eine strenge Behandlung dieser Frage geben *G. Stokes*[57]) und *A. Angot*[58]); übrigens lässt sie sich auch durch parabolische Interpolation behandeln[59]), oder dadurch, dass man die Kurve während dreier aufeinander folgender Monate durch eine einfache Sinuslinie ersetzt[60]). Endlich kann man auch statt der gesuchten Funktion zuerst ihr unbestimmtes Integral entwickeln, dessen Werte für die

---

geraten und immer wieder von neuem entdeckt worden: *J. Lamont*, Münch. Sternw. Ann. Suppl. 3, 1859, § 19, p. XLII; *J. D. Everett*, Edinb. N. Philos. J. 14 (1861), p. 30, 33; Amer. J. of sci. (2) 35 (1863), p. 29; 36 (1863), p. 176; *G. V. Schiaparelli*, Milano effem. 1867, app. Nr. 39, p. 30; *A. Krüger*, Astr. Nachr. 82 (1873), col. 333; *W. Ferrel*, U. S. survey report 1874, app., Nr. 161, p. 158; *T. R. Robinson*, Lond. Trans. 165 (1875), p. 421; *K. Weihrauch*, Meteor. Zeitschr. 18 (1883), p. 24; *V. N. Nene*, Lond. Roy. Proc. 36 (1884), Nr. 27, p. 381; *R. Sresnewskij*, Repert. Meteor. 12 (1889), kleinere Mitt. p. 1; *L. Grossmann*[20]), B p. 11; *A. Schuster*, Lond. Roy. Proc. 61 (1897), p. 459.

55) Edinb. Trans. 22 (1861), Nr. 55, p. 346. Dieselbe Formel geben *E. Plantamour*, du climat de Genève, Genève 1863, § 3, p. 39 und *J. Kleiber*, Repert. Meteor. 13 (1890), kleinere Mitt. p. 2 in der Bezeichnungsweise der Differenzenrechnung.

56) Über die aus einer solchen Annahme entspringenden Fehler vgl. *K. Weihrauch*, Dorp. Ber. 8 (1889), p. 18 (vom Nov. 1885).

57) Bei *T. R. Robinson*, Lond. Trans. 165 (1875), p. 425. *Robinson* findet das Verfahren zu mühsam und begnügt sich daher mit einem angenäherten.

58) Par. Ann. météor. 1887 (1889), p. 228.

59) *Plantamour* [55]); *E. L. De Forest*, Amer. J. of sci. 91 (1866), p. 371; *Weihrauch* [51]); *Angot* [58]), p. 232. *Plantamour* stützt auf seine Formeln ein Verfahren successiver Approximation.

60) *E. L. De Forest*, Amer. J. of sci. 92 (1866), p. 154; *K. Weihrauch* [51]), p. 34 („goniometrische Interpolation").

Monatsenden sich sofort aus den unkorrigierten Monatsmitteln ergeben; aus seinem allgemeinen Ausdruck sind dann seine Werte für äquidistante Argumente zu entnehmen; deren Differenzen können als äquidistante Mittelwerte angesehen werden[61]).

12. Verwendung der trigonometrischen Interpolation zu mechanischer Quadratur. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwickelungen aus möglichst wenig Beobachtungen. Aus den Entwickelungen von Nr. 4 geht hervor, dass die Formel mechanischer Quadratur

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{2\pi}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right) \tag{33}$$

genau richtig ist, wenn in der Entwickelung der Funktion $f(t)$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von t keine Glieder mit einem niedrigeren Vielfachen von t als dem $n/2^{\text{ten}}$ vorkommen, und dass im anderen Fall der Fehler der Formel (33) durch die erste Gleichung (19) gegeben wird[62]). Doch ist damit nichts gewonnen, was über die elementaren Quadraturformeln hinausginge. Ein zu den *Gauss*'schen mechanischen Quadraturformeln (II A 2, Nr. 52, *Voss*; II A 11, *Burkhardt*) analoges Resultat hat für die trigonometrischen Entwickelungen zuerst *Br. Bronwin*[62a]), dann aus einem etwas allgemeineren Ansatz durch Spezialisierung *F. G. Mehler*[63]) abgeleitet; die Gleichung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \equiv \int_0^{\pi} f(\cos t)\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{2n}\right) \tag{34}$$

ist genau richtig, wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von nicht höherem als dem $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet. Eine einfache Ableitung dieses Resultats mit Hülfe der Identität:

$$\frac{\cos n\,(\arccos x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{n+1}\frac{d\cos n\,(\arccos x)}{dx} + (x^{-1}) \tag{35}$$

giebt *F. Tisserand*[64]). Zu derselben Formel gelangt auch *P. L. Tsche-*

61) *K. Weihrauch*, Dorp. Schriften 5 (1890), III, p. 45 (mit Tabellen der Logarithmen der auftretenden Zahlenkoeffizienten). Ein abgekürztes Verfahren zur Bestimmung der ersten Koeffizienten bei *L. Grossmann*[20]), B 3, p. 16.

62) *E. Heine*, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2, Berlin 1881, § 13, p. 24. 62a) Phil. mag. 34 (1849), p. 262.

63) J. f. Math. 63 (1864), Nr. 4, p. 156. *H. Bruns* (Grundlinien, § 81, p. 113) bemerkt, dass man bei Benutzung von (34) für eine gerade Funktion und das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ doch nur eine Ordinate weniger zu berechnen braucht, als bei Benutzung von (33) mit doppelt so grossem Wert von n.

64) Par. C. R. 68 (1869), p. 1101. *Tisserand*'s Angabe, die Formel (34) rühre

byscheff[65]), ebenfalls durch Spezialisierung eines allgemeinen Ansatzes, indem er die Frage beantwortet: wie müssen die Argumente α_ν gewählt werden, damit jedes Integral der Form (34) möglichst genau durch

$$A \sum_{\nu=1}^{n} f(\alpha_\nu) \tag{36}$$

dargestellt werde. Ausserdem zeigt er auch[66]), wie diese Argumente gewählt werden müssen, damit die Gleichung

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, x\, dx = A\left\{\sum_{\nu=1}^{m} f(\alpha_\nu) - \sum_{\nu=m+1}^{2m} f(\alpha_\nu)\right\} \tag{37}$$

möglichst genau richtig wird. Damit ist eine Formel zur Berechnung des Koeffizienten A_1 in der trigonometrischen Entwickelung von $f(\cos t)$ gewonnen; eine Andeutung *Tschebyscheff*'s[67]), wie man von hier aus auch zu Formeln für die Koeffizienten der übrigen Cosinusglieder gelangen könne, ist später von *R. Radau*[68]) näher ausgeführt worden. *C. Posse*[69]) gewinnt nach der Methode von *Tschebyscheff* noch die beiden Näherungsformeln:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} f\cos\left(\frac{\nu\pi}{n}\right), \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, f(x)\, dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \cos^2 \frac{\nu\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}\right). \end{cases} \tag{38}$$

Die Verwendung der allgemeinen Gleichungen (20) bis (23) zur Integration bespricht *B. Baillaud*[70]). Er leitet zunächst die Relation ab:

---

von *Jacobi* her, beruht wohl nur auf einem Missverständnis eines auf (35) sich beziehenden Citates bei *Mehler*. Ausführlichere Darstellung von *Tisserand*'s Schlüssen bei *Ch. Hermite*, Cours d'analyse de l'éc. polyt., Paris 1873, p. 452.

65) Assoc. franç. 2 (1873), p. 60; J. de math. (2) 19 (1874), p. 19.

66) Nr. 8, p. 29. 67) Nr. 10, p. 34.

68) Par. C. R. 90 (1880), p. 520; J. de math. (3) 6 (1880), Nr. 19, p. 319. *Radau* giebt Nr. 15, p. 316 auch einen einfachen Beweis der Formel (34), indem er für $f(\cos t)$ speziell $\cos ht$, $(h = 1, 2, \ldots, 2n-1)$ setzt.

69) Nonv. ann. (2) 14 (1875), Nr. 3, p. 55; reproduziert sur quelques applications des fractions continues, Petersburg 1886, 4^s, p. 71. — Eine ähnliche Formel für eine sehr grosse Zahl von Zwischenwerten leitet *G. Bauer*, Hab.-Schr. München 1857, p. 47, durch Grenzübergang aus der *Gauss*'schen Quadraturformel ab.

70) Toulouse observ. ann. 2 (1886), B, Nr. 8, p. 9.

$$(39)\qquad \int_0^{2\pi} \prod_{\nu=1}^{2n} \sin\frac{t-\alpha_\nu}{2}\,dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \sum_{(s_p)} \cos\left(\frac{s}{2} - s_p\right),$$

in der s die Summe aller α_ν, s_p die Summe von irgend p unter ihnen bezeichnet und die Summation über alle möglichen Kombinationen der α_ν zu erstrecken ist. Die Anwendung auf das Quadraturproblem giebt zunächst nur die elementarste Quadraturformel. Wird verlangt, die Zwischenwerte bei vorgeschriebener Anzahl derselben so zu wählen, dass der Fehler möglichst klein wird, so ergiebt sich, dass sie jedenfalls äquidistant gewählt werden müssen. Dann fallen nämlich die n ersten Vielfachen weg, wenn man die Differenz zwischen dem wahren und dem angenäherten Funktionswert, geteilt durch das in (39) auftretende Produkt, nach den ungeraden Vielfachen von $t/2$ entwickelt. Geht man von (23) aus, so kommt man auf die *Gauss*sche Quadraturformel[71]); geht man von (22) aus, auf das Resultat von *Mehler*[68]). *Baillaud* findet übrigens, dass bei der gebräuchlichen Wahl $\alpha_\nu = \nu\pi/n$ das erste Korrektionsglied abgesehen vom Vorzeichen merklich denselben Wert hat, wie bei *Mehler*'s Formel[72]).

Begnügt man sich mit einem um zwei Einheiten geringeren „Genauigkeitsgrad", so erhält man, wie *R. Radau*[73]) zeigt, die Formeln:

$$(40)\qquad \int_0^{\pi} f(\cos t)\,dt = \frac{\pi}{n}\left\{\frac{1}{2}f(1) + \sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{\nu\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}f(-1)\right\}$$

und:

$$(41)\qquad \int_0^{\pi} f(\cos t)\cos t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos\frac{(2\nu+1)\pi}{2n+1}\left\{f\left(\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{2n+1}\right) - f\left(\cos\frac{(2n+2\nu+2)\pi}{2n+1}\right)\right\}.$$

Entsprechende Formeln, die nur die eine Endordinate enthalten, finden sich bei *A. Markoff*[74]).

A. Dawidoff[75]) gelangt noch durch einen anderen Ansatz zu Formel (38): Ist $f(x)$ eine rationale ganze Funktion vom Grade $2n$ und wird

$$(42)\qquad f(x) = f_1(x)\cos(n \arccos x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu x^\nu$$

71) Nr. 27, p. 34. 72) Nr. 28, p. 35.

73) J. de math. (3) 6 (1880), Nr. 16, p. 317; Nr. 17, p. 318.

74) Differenzenrechnung (Petersb. 1891), deutsch von *Friesendorff* und *Prümm*, § 22, p. 94, Leipzig 1896.

75) J. de math. (3) 8 (1882), Nr. 11, p. 407.

gesetzt, so ergiebt sich zunächst:

$$(43)\quad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} f_1(\cos t)\cos nt\,dt + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \int \cos^\nu t \cos nt\,dt,$$

und da in der Summe rechts alle einzelnen Integrale null sind, so ist damit ebenfalls die Integration eines $(2n+1)$-gliedrigen Ausdrucks auf die eines $(n+1)$-gliedrigen zurückgeführt.

13. Trigonometrische Interpolation von Funktionen zweier Argumente geschieht durch wiederholte Anwendung der für Funktionen eines Argumentes geltenden Formeln („doppelte mechanische Quadratur" bei den Astronomen). Sie ist schon von *Bessel*[76]) gestreift, dann von *Hansen* empfohlen[77]) und in ausgedehntem Umfang angewendet worden[78]). Auch *Cauchy*[79]) und *Leverrier*[80]) haben sich mit ihr beschäftigt; *Jacobi* verhält sich ablehnend gegen sie[81]).

Sollen nur einzelne Terme oder Gruppen von Termen in einer solchen Entwicklung bestimmt werden, etwa die zu einem bestimmten Argument $j\zeta - j_1\zeta_1$ (j, j_1 relativ prim) und seinen Vielfachen gehörenden, so kann man mit *Liouville*[81a]) neue Variable:

$$j\zeta - j_1\zeta_1 = \theta,\quad \zeta = j_1\sigma$$

einführen und damit die zu entwickelnde Funktion auf die Form bringen:

$$F(\zeta, \zeta_1) = A_0 + \sum A_\mu e^{\mu\theta i} + \varphi,$$

in der φ die Gesamtheit der von σ nicht freien Glieder bezeichnet. Wird F zunächst nach Vielfachen von σ entwickelt:

$$F = \sum C_\varrho(\theta) e^{\varrho\sigma i},$$

so ergiebt sich:

$$A_0 + \sum A_\mu e^{\mu\theta i} = C_0(\theta).$$

76) Berl. Abh. 1820/21, p. 55; Astr. Nachr. 6 (1828), col. 346 (Ges. Abh. 2, p. 362, 371).

77) Astr. Nachr. 7 (1829), Nr. 25, col. 473.

78) Über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns, Preisschr. Berl. 1831, Nr. 13, p. 49. *Hansen* bemerkt, dass es sich unter Umständen empfiehlt, nicht direkt nach den Vielfachen der beiden gegebenen Argumente, sondern nach denjenigen geeigneter linearer Verbindungen von ihnen zu entwickeln.

79) Turiner Mém. [24]), § 3, Gl. (61) ff., p. 122; Par. C. R. 20 (1845), p. 825 (Oeuvres (1) 9, p. 141.)

80) Par. Observ. ann. 1 (1855), Nr. 23, p. 117; Nr. 38, p. 147.

81) Nachlass (von 1843?); Werke 7, p. 288.

81a) J. de math. 1 (1836), Nr. 5, p. 201.

Man kann auch noch weitere Glieder nach diesem Verfahren berechnen[81b]); ist:

$$\lambda = m\theta + n\zeta + n_1\zeta_1$$

irgend ein weiteres Argument und wird

$$\varphi = \sum B_\mu e^{(\lambda+\mu\theta)i} + \chi$$

gesetzt, wo jetzt χ die Gesamtheit derjenigen Glieder bezeichnet, deren Argumente sich weder auf die Form $\mu\theta$, noch auf die Form $\lambda + \mu\theta$ bringen lassen, so erhält man

$$\sum B_\mu e^{(\lambda+\mu\theta)i} = e^{-(mj_1+n)\frac{\theta}{j_1}i} C_{n_1 j - n j_1}(\theta).$$

Für jeden bestimmten Wert von θ können die C nach einer der besprochenen Methoden berechnet werden; variiert man θ, so kann man die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der A und der B erhalten. Bedient man sich dabei der Methode von *Leverrier* (Nr. 7), so kann man es so einrichten[81c]), dass man für alle verschiedenen θ immer dieselben Werte der ursprünglichen Variabeln, nur in anderer Reihenfolge, zu benutzen hat.

II. Separation mehrerer bekannter Perioden.

14. Vorbemerkungen, insbesondere über theoretische und praktische Kommensurabilität. Für die Auffassung einer grossen Klasse von Erscheinungen ist ein Satz fundamental, den zuerst *P. S. de Laplace* bei seinen Untersuchungen über Ebbe und Flut[82]) ausgesprochen zu haben scheint: Die durch eine periodisch wirkende Kraft erzwungenen Schwingungen eines Systems haben dieselbe Periode wie die Kraft selbst; nur ihre Amplitude und ihre Phase hängen von Nebeneinflüssen (Dämpfung) ab. Andererseits besagt ein Superpositionsprinzip, das, soviel ich sehe, zuerst von *J. M. C. Duhamel*[83]) allgemein formuliert worden ist: Die Wirkungen zweier verschiedener Kräfte, die von den Koordinaten unabhängig sind, addieren sich einfach, wenigstens solange nur kleine Schwingungen in Betracht kommen. Auf Grund dieser beiden Prinzipien lassen sich eine grosse Klasse

---

81b) *H. Durrande,* Thèse Paris 1864, Nr. 4, p. 56; vgl. auch die Darstellung bei *J. Hoüel,* Prag Archiv 1 (1875), § 3, p. 30 des S.-A.

81c) *Durrande,* Nr. 8, p. 63.

82) Par. Hist. 1775 (77), p. 89; 1776 (78), p. 177, 525 (Oeuvres 9, p. 88, 185, 281); bestimmter Mécanique céleste 2, Paris 1800, livre IV, Nr. 16 (Oeuvres 2, p. 230).

83) J. éc. polyt. cah. 23, 1834 (vom Apr. 1832), p. 4.

von Erscheinungen durch Superposition von periodischen Termen verschiedener Perioden darstellen.

Hat man nur mit zwei Komponenten von den Perioden a, b zu thun, so sind theoretisch zwei Fälle zu unterscheiden: Sind a und b zu einander kommensurabel, d. h. ist ihr Verhältnis gleich dem von zwei ganzen Zahlen m, n, so haben sie auch ein gemeinsames Vielfaches

$$\omega = na = mb;$$

eine Erscheinung, die sich aus zwei solchen Komponenten superponiert, kann dann einfach als Erscheinung von der Periode ω angesehen und nach den bisher besprochenen Methoden behandelt werden. Sind aber a, b zu einander inkommensurabel, so giebt es kein solches ω, die zusammengesetzte Erscheinung ist dann gar nicht periodisch im strengen Sinne des Wortes.

Praktisch stellt sich diese Unterscheidung etwas anders. Lässt sich das Verhältnis von a zu b nur durch zwei *grosse* ganze Zahlen ausdrücken, so wird ω ein sehr langer Zeitraum; infolge dessen werden meistens gar nicht Beobachtungen über eine volle Periode ω zur Verfügung stehen. Man wird dann praktisch auf die noch zu besprechenden Methoden angewiesen sein. In solchen Fällen könnte man von praktischer Inkommensurabilität der beiden Perioden a und b sprechen[84]).

Für eine grössere Anzahl von zu superponierenden Perioden gilt natürlich entsprechendes.

15. Elimination von säkularen Störungen. Der einfachste hier in Betracht kommende Fall ist der, dass a und b so sehr von einander verschieden sind, dass man den Einfluss der längeren Periode während der Dauer der kürzeren als *säkular* behandeln, d. h. durch eine lineare Funktion der Zeit darstellen kann. Das trifft z. B. zu, wenn die Darstellung des täglichen Ganges eines meteorologischen Elements von dem Einfluss des jährlichen Ganges befreit werden soll. Ist y_ν der um ν Uhr beobachtete Wert, so wird y_{24} nicht mit y_0 übereinstimmen. Das Nächstliegende würde nun sein, dass man die Zunahme $y_{24} - y_0$ gleichmässig auf die 24 Tagesstunden verteilte, also y_ν durch

$$y_\nu - \frac{\nu}{24}(y_{24} - y_0) \tag{45}$$

ersetzte. Das geschieht auch vielfach[85]). Doch hat schon *A. Bravais*[86])

84) In der geophysikalischen und kosmophysikalischen Litteratur findet sich diese Unterscheidung zwischen theoretischer und praktischer Inkommensurabilität nicht; vgl. aber etwa *F. Klein*, Anwendung der Diff.- u. Int.-R., Leipzig 1902, p. 22.

85) Z. B. bei *G. V. Schiaparelli*, Mil. effem. 1868, app. (mir nur durch *M. Rajna*,

darauf aufmerksam gemacht, dass bei diesem Verfahren auch das Tagesmittel geändert wird; berechnet man dieses, wie *Bravais* es thut, nach der Formel:

$$(46) \qquad \tfrac{1}{24}\{\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{23} + \tfrac{1}{2}y_{24}\},$$

so ist y_ν durch

$$(47) \qquad y_\nu + \frac{12-\nu}{24}(y_{24} - y_0)$$

zu ersetzen, wenn der jährliche Gang aus dem täglichen eliminiert werden und dabei zugleich das Tagesmittel ungeändert bleiben soll. Das von *J. Lamont* vorgeschlagene und vielfach nach ihm benannte Verfahren[87]) unterscheidet sich von dem *Bravais*'schen nur dadurch, dass *Lamont* das Tagesmittel nach der Formel

$$(48) \qquad \tfrac{1}{24}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{23} + y_{24})$$

berechnet; infolge dessen tritt bei ihm nicht $(12-\nu)\ (y_{24} - y_0)$, sondern $(12{,}5-\nu)\ (y_{25} - y_1)$ als Faktor in der Formel (47) auf. Würde man das Tagesmittel, wie in der harmonischen Analyse der Gezeiten zuweilen geschieht, nach der Formel:

$$(49) \qquad \tfrac{1}{25}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{23} + y_{24})$$

berechnen, so würde $12-\nu$ im Zähler und 25 im Nenner als Faktor auftreten. Genauer als das *Bravais-Lamont*'sche Verfahren, das zur Bestimmung des Einflusses des jährlichen Ganges nur die erste und letzte der täglichen Beobachtungen benutzt, würde die Berechnung einer den Beobachtungen sich möglichst anschliessenden linearen Funktion unter Benutzung sämtlicher Beobachtungen sein[88]).

R. Strachey[89]) giebt auch entsprechende Korrektionen für die

---

Mil. osserv. pubbl. 26 (1884), p. 15 bekannt). *Schiaparelli* und *G. Celoria* berichten Meteor. Ital. 1 (1867), suppl. Nr. 8, p. 2 des S.-A., dass sich solche Korrektionen in nachgelassenen Rechnungen von *Fr. Carlini* finden.

86) Voyages [22]), p. 325 („préparation préliminaire des moyennes horaires").

87) Münch. Sternw. Ann. Suppl. 6 (1868), § 4, p. VII. 11,5 bei *Lamont* statt 12,5 ist ein Versehen; es würde richtig sein, wenn man nach

$$(48a) \qquad \tfrac{1}{24}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{22} + y_{23})$$

rechnen wollte. In der meteorologischen Litteratur wird übrigens häufig *Lamont* citiert, dabei aber nach *Bravais* gerechnet.

88) *R. Wolf*, Astr. Mitt. 2 (1856), p. 17 benutzt für das analoge Problem der Elimination des elfjährigen Ganges der Sonnenflecken aus dem jährlichen die Methode der kleinsten Quadrate. In den zahlreichen Fällen, in welchen die Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials die Anwendung dieser Methode weder gestattet noch fordert, würde vielleicht die Benutzung der *Cauchy*'schen Interpolationsmethode (vgl. I D 3, Nr. **11**, *Bauschinger*, sowie II A 11, *Burkhardt*) zu empfehlen sein.

89) Lond. Roy. Proc. 42 (1887), Nr. 7, p. 67; Hourly readings from the self-

Berechnung der übrigen Koeffizienten der den täglichen Gang darstellenden *Bessel*'schen Formel.

Ein Verfahren, das zur Elimination nicht nur säkularer, sondern auch beliebiger anderer Störungen aus einer bekannten Periode dienen soll, giebt *N. Ekholm*[90]: Wären keine Störungen vorhanden, so wären bei der graphischen Darstellung von $y = f(t)$ die Verbindungslinien von Punkten derselben Phase in aufeinander folgenden Perioden alle zur Abscissenaxe parallel; infolge der Störungen ist das nicht der Fall. *Ekholm* dreht daher alle diese Verbindungslinien der Reihe nach um ihre Mittelpunkte, bis sie zur Axe parallel werden; dabei lässt er jedesmal die zwischenliegenden Ordinaten der Bewegung folgen, sodass sie ihrem Abstand vom Drehpunkt proportional verlängert oder verkürzt werden. Die rechnerische Durchführung dieser Idee wäre sehr mühsam. *Ekholm* benutzt daher ein abgekürztes Verfahren, bei dem einfach jeder Ordinate diejenige Zahl als Gewicht beigelegt wird[91], die angiebt, wie oft sie bei dem ersten abgeändert werden müsste. Später[92] modifiziert er dieses Verfahren noch etwas, indem er die Beobachtungen auf verschiedene Art zu Gruppen zusammenfasst.

16. Separation zweier Perioden von gleicher Grössenordnung. Setzt sich der Ausdruck einer Funktion:

$$(50) \quad f(t) = A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t + A_2 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t$$

aus zwei einfach periodischen Gliedern zusammen, deren Perioden von der gleichen Grössenordnung sind, so kann man eine von einem Ausschuss der British Association for the advancement of sciences zur harmonischen Analyse der Gezeiten[93] entwickelte Methode verwenden. Man kann nämlich den Ausdruck (50) auch ersetzen durch[94]:

---

recording instruments of the four stations under the meteor. council 1884, London 1887, appendix.

90) Meteor. Zeitschr. 20 (1885), p. 81. 91) p. 83.

92) ib. 23 (1888), Nr. 2, p. 54; Anwendungen dieser Methode zusammen mit *Sv. Arrhenius,* Stockh. Handl. Bihang 19^8 (1894), p. 19.

93) Von den verschiedenen Berichten dieses Ausschusses giebt der erste, von *W. Thomson* redigierte (Brit. Ass. report for 1868, p. 489) nur eine knappe Darstellung der angewandten Rechnungsmethoden; in einem folgenden, von *E. Roberts* redigierten, wird sie mit einigen Abänderungen wiederholt, die sich inzwischen als zweckmässig herausgestellt hatten (ib. for 1872, p. 355). Ausführlicher, aber immer noch knapp ist ein von *G. H. Darwin* redigierter Bericht eines späteren Ausschusses (ib. for 1883, p. 49; Berichtigungen ib. for 1884, p. 35); man wird daher die Erläuterungen von *C. Börgen* (Ann. der Hydrogr. 12, 1884; auch sep. Berlin 1885), von *Ph. Hatt* (ann. hydrogr. 1893; auch sep. Paris 1893), von *R. Harris,* U. S. coast survey report f. 1897, app. 9, Kap. V, p. 537 oder von *M. Lévy,* Théorie des marées 1, Paris 1898, chap. 4, p. 68 mit Vorteil zuziehen.

$$(51) \qquad \{A_1 + A_2 \cos(n_1 - n_2)t - B_2 \sin(n_1 - n_2)t\} \cos n_1 t + \{B_1 + A_2 \sin(n_1 - n_2)t + B_2 \cos(n_1 - n_2)t\} \sin n_1 t,$$

m. a. W. man kann ihn ansehen als äquivalent einer einfachen Schwingung von der Schwingungszahl n_1 mit langsam veränderlicher Amplitude und Phase. Man braucht also, um A_1 und B_1 zu finden, nur von einer grossen Anzahl Perioden $2\pi/n_1$ die Amplituden und Phasen zu berechnen und Mittelwerte zu nehmen; man erhält so genaue Resultate, wenn der Beobachtungszeitraum ein ganzes Vielfaches von $2\pi/(n_1 - n_2)$ ist, wenigstens annähernd richtige, wenn er nur überhaupt gross ist[95]).

Um dieses Verfahren zur Ermittelung einer bestimmten Komponente anzuwenden, verfährt man am bequemsten so, dass man die Beobachtungen zunächst nach der Periode dieser Komponente ordnet; d. h. man nimmt alle diejenigen Beobachtungen zusammen, deren Termine von einer bestimmten Phase $\nu\pi/n$ der zu untersuchenden Periode um weniger als $\pi/2n$ nach der einen oder anderen Seite hin abstehen[96]).

Während bei der Gezeitenanalyse von jeder Periode hauptsächlich nur der „Grundton" und der erste „Oberton" in Betracht kommen, die übrigen Obertöne nur eine untergeordnete Rolle spielen, fasst eine Untersuchung von *Ch.* und *F. Chambers* auch die Bestimmung der letzteren ins Auge, für den Fall von nur zwei von einander unabhängigen Perioden. Sind die Perioden kommensurabel, so kann man

Darwin's neuer Bericht für 1896, sein Artikel im Manual of scientific inquiry der britischen Admiralität und *A. W. Baird*'s Manual for tidal observations, Lond. 1886, waren mir nicht zugänglich.

94) *Darwin*, p. 96; vgl. *Börgen*, § 8, p. 563, sowie die entsprechenden Bemerkungen von *Ad. Schmidt*, Wien. Ber. 96^2 (1887), p. 997. Genauere Vorschriften zur zweckmässigen Wahl des Beobachtungszeitraums bei *Darwin* im Bericht for 1885, Nr. 3 p. 37; 1886, p. 41, sowie bei *Ferrel*, U. S. coast survey report for 1878, app. 11, Nr. 15, p. 14 (reproduciert von *Harris*, ib. for 1897, Nr. 59, p. 545) und bei *Lévy* [93]), Nr. 45, p. 75.

95) Korrektionen für den letzteren Fall bei *Hatt*, § 30, p. 59.

96) Diese Anordnung wird durch die Benutzung von Schemata erleichtert, in denen man bestimmte Felder entweder überspringen oder doppelt besetzen muss, wenn die zu untersuchende Periode annähernd, aber nicht genau ein Vielfaches des Intervalls zwischen zwei aufeinander folgenden Beobachtungsterminen ist (*Darwin* § 9, p. 92; *Börgen* § 8, p. 508; *Hatt* § 29, p. 56 des S.-A.). *Darwin* trägt, wenn ein Feld doppelt zu besetzen wäre, nur die eine Beobachtung ein und überspringt die andere ganz; *Börgen* und *Hatt* ziehen die Doppelbesetzung vor. Der Umstand, dass durch dieses Verfahren nicht Terminbeobachtungen, sondern Mittelwerte benutzt werden, ist in der in Gl. (51) angegebenen Weise zu berücksichtigen.

natürlich gewisse Partialschwingungen sowohl als Obertöne der einen wie der anderen auffassen[97]).

Die periodischen Schwankungen der Polarlichter weisen eine Periode gleich dem synodischen Mondmonat auf, die aber wohl nur durch die verschiedenen Beleuchtungsverhältnisse bedingt ist. Man hat bald angenommen, dass dieser Einfluss sich einfach zu den übrigen Einflüssen superponiert[98]), bald dass er sich mit ihnen multiplikativ zusammensetzt[99]); die eine Annahme ist so wenig wie die andere mathematisch oder physikalisch begründet.

Ein von *N. Ekholm* und *Sv. Arrhenius*[100]) angegebenes Verfahren zur Trennung zweier sehr nahe gleicher Perioden S (z. B. synodischer Mondmonat) und T (tropischer Mondmonat) beruht auf der Einführung einer dritten Periode, die mit den beiden ersten durch die Relation:

$$T^{-1} - S^{-1} = S^{-1} - U^{-1} \tag{52}$$

verbunden ist. S übt auf die Berechnung der Schwankung nach der Periode U denselben Einfluss aus, wie auf die nach der Periode U; enthält die zu untersuchende Erscheinung keine wirkliche Komponente mit der Periode U, so erhält man durch die Rechnung diesen Einfluss, der dann auf T reduziert werden kann.

17. Verfahren in komplizierteren Fällen. Die harmonische Analyse der Gezeiten. Auch wenn mehr als zwei Komponenten neben einander vorkommen, kann man sich des eben geschilderten Verfahrens bedienen; das geschieht z. B. in der harmonischen Analyse der Gezeiten für alle diejenigen Komponenten, deren Periode nahezu gleich einem Sonnentag oder einem Bruchteil desselben ist[101]). Ausserdem treten dort noch eine Anzahl von Komponenten auf, deren Perioden von der Grössenordnung eines ganzen oder halben Monats sind. Diese werden zusammen berechnet; und zwar braucht man dazu nicht alle einzelnen Beobachtungen zu benutzen, sondern es genügt die Berücksichtigung der Tagesmittel. Dazu müssen aber diese letzteren erst vom Einfluss der zuerst genannten Komponenten befreit werden;

97) Lond. Trans. 165 (1875), p. 361; Auszug Lond. Roy. Proc. 21 (1873), p. 384.

98) *J. Liznar*, Wien. Ber. 97^{2a} (1888), p. 1104.

99) *N. Ekholm* und *Sv. Arrhenius*, Stockh. Handl. 31^{2} (1898), p. 7.

100) ib. p. 8.

101) Von einer grossen Anzahl von Umständen, die bei der Gezeitenberechnung zu berücksichtigen sind, ist im Text keine Notiz genommen, weil sie dem Gegenstand dieses Artikels fremd sind; namentlich ist von der bekannten Abhängigkeit der Amplituden und Phasen von langsam veränderlichen astronomischen Argumenten abstrahiert.

das geschieht, indem für jede solche Komponente $R\cos(nt - \xi)$ von dem berechneten Mittelwert eine Korrektion („clearance of the daily mean") abgezogen wird, die einen der vier Werte

$$(53) \qquad \frac{R}{24}\frac{\sin 12n}{\sin \frac{1}{2}n}\cos\left(\xi + \frac{23}{2}n\right),$$

$$(54) \qquad \frac{R}{24}\frac{\sin 12n}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}n}\cos(\xi + 12n),$$

$$(55) \qquad \frac{R}{25}\frac{\sin \frac{25}{2}n}{\sin \frac{1}{2}n}\cos(\xi + 12n),$$

$$(56) \qquad R\frac{\sin 12n}{12n}\cos(\xi + 12n)$$

hat, je nachdem das Tagesmittel nach (48a), nach (46), nach (49) berechnet oder aus Aufzeichnungen von Registrierapparaten mit Hülfe des Planimeters gewonnen ist[102]). Ebenso wird die aus sämtlichen Beobachtungen abgeleitete Höhe des Mittelwassers subtrahiert; der übrig bleibende Rest wird der Summe der Wirkungen sämtlicher langperiodischer Komponenten gleichgesetzt und die so entstehenden Gleichungen werden nach den allgemeinen Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate (I D 2, Nr. **11**, *Bauschinger*) aufgelöst; das geschieht hier bequem durch successive Approximationen, indem in den Normalgleichungen die Koeffizienten der Diagonalglieder alle übrigen stark überwiegen[103]).

18. Bestimmung der Komponenten aus Beobachtungen der Extrema allein. Der Fall, dass nicht fortlaufende stündliche Be-

102) *Roberts* 1872, Nr. 26, p. 371; *Darwin* § 10, p. 102; *Börgen* § 9, p. 564; *Hatt* § 32, p. 63. *Darwin* zieht (48a) als für die Praxis bequemste Formel vor, ebenso *Börgen*, der aber auch den Gebrauch des Planimeters empfiehlt; *Hatt* findet (46) rationeller. Dass der durch (48a) gewonnene Mittelwert sich auf $11^h 30^m$ bezieht, bemerkt schon *Roberts*.

103) Die nach dieser Methode zu bildenden Normalgleichungen sind für einen bestimmten Beobachtungsort schon in einem Supplement von *E. Roberts* zu *Thomson*'s erstem Bericht (1868, Nr. 28, p. 505), allgemein in *Roberts* Bericht für 1872, Nr. 26, p. 371 angegeben, ihre Ableitung scheint aber zunächst als Geheimnis behandelt worden zu sein und wird erst von *Darwin* (1883, § 10, p. 102) mitgeteilt. *J. C. Adams* (bei *Darwin* 1883, § 11, p. 110) empfiehlt die Benutzung stark abgerundeter Multiplikatoren bei der Bildung der Normalgleichungen; das Extrem dieses Gedankens würde die Benutzung der *Cauchy*'schen Interpolationsmethode [88]) sein. Die „clearance" kann auch erst an den zur Bildung der Normalgleichung dienenden Summen angebracht werden (*Darwin* p. 107; *Börgen* p. 618; *Hatt* § 34, p. 68). Einige Andeutungen über einen Fall, in welchem es nicht ohne weiteres möglich war, die Normalgleichungen durch successive Approximationen aufzulösen, im Bericht für 1870, Nr. 48, p. 122. Vgl. übrigens auch *Lévy* [93]), Nr. 52, p. 86.

obachtungen vorliegen, sondern nur solche der Extrema (Hoch- und Niedrigwasser) nach Eintrittszeit und Höhe, ist namentlich von amerikanischen Schriftstellern behandelt worden, da man dort noch an diesem System der Gezeitenbeobachtungen festhielt, als man in England bereits zu stündlichen Beobachtungen und der darauf sich stützenden harmonischen Analyse übergegangen war. *W. Ferrel*[104]) entwickelt zu diesem Zweck das Potential der gezeitenerzeugenden Kräfte nur soweit, dass in den Amplituden und Phasenkonstanten der einzelnen Terme noch Funktionen der Zeit mit einer Periode von einem halben oder einem ganzen Monat stehen bleiben (während die Engländer soweit entwickeln, dass die Ungleichheiten der Amplituden und Phasen nur noch Perioden von einem oder mehreren Jahren haben). Dann berechnet er aus den vier Beobachtungen jedes Tages die Höhe des Mittelwassers und die Amplituden und Phasenkonstanten der ganz- und der halbtägigen Komponente für diesen Tag[105]); die so erhaltenen Werte entwickelt er als Funktionen der längerperiodischen Argumente durch Gruppenbildung. Dabei empfiehlt er[106]), von vornherein die gefundenen Werte nach zwei Argumenten zugleich in eine Tafel mit doppeltem Eingang anzuordnen.

Später hat auch *G. Darwin* Untersuchungen über diese Frage angestellt[107]).

Sind nur zwei Komponenten vorhanden, so kann man aus der beobachteten Höhe (50) und der Bedingung für den Eintritt eines Extremums:

$$(57)\quad 0 = -n_1 A_1 \sin n_1 t + n_1 B_1 \cos n_1 t - n_2 A_2 \sin n_2 t + n_2 B_2 \cos n_2 t$$

zunächst Gleichungen der Form:

$$(58)\quad h \cos nt = A_1 + A_2 F + B_2 G, \quad h \sin n_1 t = B_1 + A_2 f + B_2 g$$

ableiten, in denen F, G, f, g bekannte (langsam veränderliche) Funktionen der Zeit sind. Man kann es meistens so einrichten, dass die

104) U. S. coast survey report f. 1868 [71], app. 5, Nr. 3, p. 75; f. 1874, separater Appendix, Nr. 10, p. 27.

105) 1868, Nr. 22, p. 57; 1874, Nr. 164, p. 161. 1868, Nr. 24, p. 58 nimmt er noch einen weiteren Oberton mit, unter der Voraussetzung, dass zwischen den verschiedenen Amplituden die von einer [unvollständigen] Theorie gelieferten Beziehungen bestehen.

106) 1874, Nr. 167, p. 165; 1875, Nr. 3, p. 2 des S. A. Im Report f. 1878 schliesst sich *Ferrel* schon vielfach an die Engländer an. Vgl. übrigens auch die Darstellung bei *R. Harris*, U. S. coast survey report f. 1894 [95], app. 7, Kap. 3, p. 169 und f. 1897 [98], app. 8, Nr. 58, p. 375. Interpolation von stündlichen Beobachtungen aus solchen der Extrema allein ib. app. 9, Nr. 71, p. 565.

107) Loud. Roy. Proc. 48 (1890), § 3, p. 280; vgl. *Lévy* [93]), Nr. 55, p. 96.

Mittelwerte dieser Funktionen für einen längeren Zeitraum vernachlässigt werden können; dann kann man aus den Gleichungen (58) durch Summation über einen solchen Zeitraum A_1 und B_1 erhalten. Für eine grössere Anzahl von Komponenten verhält sich die Sache im wesentlichen ebenso; nur wird man event. successive Approximationen benutzen müssen, indem man bei der Berechnung einer Komponente einen genäherten Wert einer anderen benutzt und mit dem so gefundenen Wert der ersteren dann den der letzteren korrigiert[108]). Manchmal bedarf es auch der Zerlegung des Beobachtungszeitraums in Unterabschnitte[109]).

Sind n_1, n_2 wenig von einander verschieden, so kann man auch

$$n_2 = n_1 + \nu \tag{59}$$

setzen und ν/n_1 vernachlässigen; man erhält dann Gleichungen der Form[110]):

$$\begin{cases} h \cos n_1 t = R_1 \cos \xi_1 + R_2 \cos (\nu t - \xi_2), \\ h \sin n_2 t = R_1 \sin \xi_1 - R_2 \sin (\nu t - \xi_2). \end{cases} \tag{60}$$

Summiert man hier von $t = 0$ bis $t = \pi/\nu$ und von da bis $t = 2\pi/\nu$, so erhält man vier Gleichungen zur Berechnung von R_1, R_2, ξ_1, ξ_2. Will man mehr als zwei Komponenten so behandeln, so hat man m in eine grössere Anzahl von Teilintervallen zu zerlegen[111]).

Die umgekehrte Frage, wie man aus den gefundenen Gezeitenformeln Höhe und Eintrittszeit der Extrema zweckmässigerweise berechnet, behandelt *Ferrel* zunächst[112]) nur für den Fall, dass die halbtägige Komponente so stark überwiegt, dass man mit Differentialformeln auskommt. Später[113]) empfiehlt er successive Approximationen. Neuerdings ist die Frage ausführlich von *Darwin*[114]) und von *R. Harris*[115]) behandelt worden.

---

108) Lond. Roy. Proc. 48, p. 295.

109) ib. p. 289, 295. Nähere Anweisung zu dieser „partition" § 10, p. 300 und App. E, p. 308. 110) p. 281.

111) ib. 52 (1893), § 2, p. 350.

112) U. S. coast survey report f. 1868, Nr. 22, p. 57; für harmonische Komponenten auch schon *A. Kunzek*, Studien aus der höheren Physik, Wien 1856, § 11, p. 38.

113) ib. f. 1874, separater Appendix, Nr. 90, p. 84; 1878, app. 11, Nr. 37, p. 35.

114) Lond. Trans. 182 A (1892), p. 159; Auszug Lond. Roy. Proc. 49 (1891), p. 130; teilweise auch schon Brit. ass. rep. f. 1886, § 5, p. 50. Die Abhängigkeit der Amplituden und Phasenkonstanten von langsam veränderlichen astronomischen Argumenten spielt hier eine wesentliche Rolle.

115) U. S. coast survey report f. 1894 [95], Nr. 1, p. 131. Er findet:

$$A + \frac{1}{4A a^2} (b^2 B^2 + c^2 C^2 + \cdots)$$

19. Abgekürztes Verfahren. Für den Fall, dass stündliche Beobachtungen vorliegen, giebt *Darwin* noch ein abgekürztes, allerdings weniger genaues Verfahren, bei dem auch alle Komponenten, deren Periode nahezu ein Tag oder ein aliquoter Teil eines solchen ist, zusammen berechnet werden. Ist eine solche:

$$R\cos\left(\frac{q\pi}{12}t-\beta t-\xi\right), \tag{61}$$

unter q eine ganze Zahl, unter β eine kleine Grösse, unter ξ die Phasenkonstante verstanden, so giebt Summation der Beobachtungen einer bestimmten Stunde für n auf einander folgende Tage:

$$R\frac{\sin 12n\beta}{\sin 12\beta}\cos\left\{\frac{q\pi}{12}t-\beta t-\xi-(12n-1)\beta\right\}. \tag{62}$$

Wird das in

$$\sum\{A_\mu\cos\mu t+B_\mu\sin\mu t\}$$

entwickelt, so haben die Koeffizienten die Werte:

$$\left.\begin{matrix}A_\mu\\B_\mu\end{matrix}\right\}=R\frac{\sin 12n\beta}{24n}\left\{\begin{matrix}-\cos\\+\sin\end{matrix}\right\}\frac{\left[(q+\mu)\frac{\pi}{24}+\xi+(12n-\frac{1}{2})\beta\right]}{\sin\left[(q+\mu)\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\beta\right]}+\left\{\begin{matrix}-\cos\\-\sin\end{matrix}\right\}\frac{\left[(q-\mu)\frac{\pi}{24}+\xi+(12n-\frac{1}{2})\beta\right]}{\sin\left[(q-\mu)\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\beta\right]}\Bigg\}, \tag{63}$$

also für hinlänglich grosse Werte von n nahezu:

$$R\frac{\sin 12n\beta}{24\sin\frac{1}{2}\beta}\left\{\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\right\}[\xi+(12n-\tfrac{1}{2})\beta]. \tag{64}$$

Indem *Darwin* diese Rechnung für jeden von 12 Normalmonaten zu 30 Tagen ausführt, erhält er für jedes A_μ und B_μ die Summe einer kleinen Anzahl von Ausdrücken der Form (64), mit ξ je gleich einer linearen Funktion der Ordnungsnummer τ des Monats. Durch abermalige Entwickelung nach den Vielfachen von τ werden die einzelnen Glieder von einander getrennt und man erhält so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der verschiedenen Amplituden R erforderlich sind[116]).

Eine andere Vereinfachung der Berechnung der nahezu ganz-

als Mittelwert der Extrema eines Ausdrucks der Form

$$A\cos(at+\alpha)+B\cos(bt+\beta)+C\cos(ct+\gamma)+\cdots,$$

vorausgesetzt, dass die Zusatzglieder gegen das erste klein sind. Vgl. übrigens auch [219]).

116) Lond. Roy. Proc. 52 (1893), p. 355.

und halbtägigen Komponenten wird erreicht, wenn man die Beobachtungen, die zu vollen Stunden Sonnenzeit vor, resp. nach Mittag gemacht sind, so behandelt, als würden sie zu der entsprechenden Stunde „Spezialzeit" vor, resp. nach Mittag gemacht; im Durchschnitt einer längeren Beobachtungsdauer hat das denselben Effekt, wie wenn man die Amplitude mit einem wenig von 1 verschiedenen Faktor multipliziert und die Epoche um einen kleinen Winkel verschoben hätte[117]).

Auch für den Fall, dass aus Beobachtungen, die nur etwa einen halben oder ganzen Monat umfassen, wenigstens die einflussreichsten Komponenten bestimmt werden sollen, giebt *Darwin* Vorschriften[118]).

20. Zusammenfassung mehrerer periodischer Terme zu einem einzigen von veränderlicher Amplitude und Phase. Eine Summe von Gliedern der Form

$$\sum R_\nu \cos(\lambda_\nu t + b_\nu) \tag{65}$$

lässt sich immer zu einem einzigen Glied

$$R \cos(\lambda_1 t + U) \tag{66}$$

zusammenfassen, wenn dabei R und U Funktionen von t werden dürfen[119]). Aber diese Zusammenfassung ist nicht immer in der Weise möglich, dass dabei U eine stetige Funktion wird und zugleich beständig zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt. Schon *J. L. Lagrange* zeigt, dass das bei einer nur zweigliedrigen Summe stets möglich ist, wenn:

$$|R_1| > |R_2| \tag{67}$$

ist[120]); auch giebt er an, der allgemeine Fall lasse sich ebenso behandeln, wenn eine der Teilamplituden absolut grösser ist, als die Summe der übrigen[121]). Diese Angabe ist erst von *H. Gyldén* bestätigt worden[122]). *Gyldén* glaubte ursprünglich, dasselbe gelte auch

117) ib. § 6, p. 367. Zum Schluss bespricht *Darwin* den Einfluss einer Abrundung der Daten auf die Resultate (§ 9, p. 376). Vgl. auch die entsprechenden Sätze bei *Ch. u. F. Chambers*[97]), Nr. 12, p. 371, sowie die Formeln (92) von *Schuster*. 118) Brit. ass. rep. f. 1886, p. 40.

119) Vgl. Gl. (15), sowie die physiologische Diskussion zwischen *L. Hermann*, Arch. Physiol. 47 (1890), p. 360; 48 (1890), p. 189; 56 (1894), p. 479 und *H. Pipping*, Zeitschr. Biol. 27 (1890), p. 436. — Wegen der umgekehrten Aufgabe vgl. [135]).

120) Berl. Nouv. mém. 1782 (84), Nr. 44; Oeuvres 5, p. 283.

121) Nr. 45, p. 284.

122) Traité analytique des orbites absolues 1, Stockh. 1893, Nr. 6, p. 23. An einer späteren Stelle (Nr. 34, p. 112) modifiziert *Gyldén* den Ansatz noch insofern, als er nicht mehr annimmt, dass die Periode des resultierenden Terms (66) mit der Periode einer der Komponenten (65) identisch sei; er giebt für diesen

in allen anderen Fällen, den allein ausgenommen, dass eine Amplitude der Summe aller übrigen gleich ist, er setzt nämlich:

$$(68)\qquad \begin{cases} (\lambda_\nu - \lambda_1)t + b_\nu - b_1 = L_\nu, \\ 1 + R_1^{-1} \sum_{\nu=2} R_\nu \cos L_\nu = X, \\ R_1^{-1} \sum_{\nu=2} R_\nu \sin L_\nu = Y, \\ (1+X)^2 + Y^2 = \vartheta^2 \end{cases}$$

und beruft sich darauf, dass das Minimum von ϑ nur in dem genannten Ausnahmefalle null sein könne[123]). Später erkennt er, dass auch in anderen Fällen diese Funktion zwar nicht null werden, aber der Null beliebig nahe kommen kann[124]); er bedient sich daher jetzt — für den Fall von 3 Komponenten — des folgenden Verfahrens zur Bestimmung der „mittleren Bewegung" der Grösse U: Er bringt zunächst X und Y auf die Form:

$$(69)\qquad \begin{cases} R_1 X = -R_2 \cos A + R_3 \cos(\mu A + E_n), \quad A = L_2 - (2n+1)\pi, \\ R_1 Y = -R_2 \sin A + R_3 \sin(\mu A + E_n), \quad \mu = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{cases}$$

Wenn dann E_n in einer gewissen Umgebung von π liegt, werden je zwei Nullstellen von $1 + X$ durch eine Nullstelle von Y getrennt werden, und zwar wird diese Umgebung begrenzt sein durch diejenigen Werte $E^{(0)}$ und $2\pi - E^{(0)}$ von E_n, für die $1 + X$ und Y zugleich null werden können. Gehört E_n dieser Umgebung an, so wächst U um 2π, wenn A von $-\pi$ bis $+\pi$ wächst; andernfalls kehrt U dabei zu seinem Ausgangswert zurück, ohne einen vollen Umlauf ausgeführt zu haben.

Giebt man dem n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, so fallen schliesslich auf gleiche Stücke der Kreisperipherie gleich viele Werte von E_n; die gesuchte mittlere Bewegung von U beträgt also[125]):

$$(70)\qquad \bar{\mu} = \frac{\pi - E^{(0)}}{\mu}.$$

Fall auch Formeln zur Berechnung von U, die durch geeignete Wahl der Periode so eingerichtet werden können, dass Säkularglieder aus ihnen wegfallen.

123) p. 28.

124) Stockh. astr. Iaktt. 5, 1895; Auszug Petersb. Bull. (5) 1 (1894), p. 379.

125) Nr. 22, p. 71. *Gyldén* giebt auch eine analytische Definition der mittleren Bewegung durch das Integral

$$\bar{\mu} = \int_0^\alpha \frac{dU}{dL_2}\, dL_2$$

und Anweisung zu numerischer Berechnung desselben, durch Abspaltung der

Gyldén glaubt, dass auch der Fall einer grösseren Anzahl von Komponenten keine wesentlich anderen Resultate geben werde, solange $|R_1| + |R_2| + |R_3|$ grösser sei als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Komponenten; nur könne dann event. das Wachsen von U durch ganze retrograde Umläufe unterbrochen werden.

Verwandt mit der hier behandelten Frage, aber nicht so scharf zu formulieren ist die von *R. Harris*[126]), unter welchen Umständen man von einem Ausdruck der Form (65) die erste Komponente als „prädominierend" ansehen könne, so dass man die Extrema des ganzen Ausdrucks aus denjenigen des ersten Gliedes durch Differentialformeln ableiten könne. *Harris* findet, dazu sei

$$Aa > Bb + Cc + \cdots \tag{71}$$

eine notwendige, diese Ungleichung zusammen mit

$$Aa^2 > Bb^2 + Cc^2 + \cdots \tag{72}$$

eine hinreichende Bedingung.

III. Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

21. Die Methode von Lagrange. In den bisher besprochenen Untersuchungen war stets angenommen, dass die Perioden der einzelnen Komponenten einer zusammengesetzten Erscheinung bekannt und nur noch ihre Amplituden und Phasen aus den Beobachtungen zu bestimmen seien. Anders liegt die Frage, wenn man zwar weiss oder wenigstens Grund zu der Annahme zu haben glaubt, dass sich die beobachtete Erscheinung durch eine Summe von periodischen Gliedern darstellen lassen müsse, wenn aber auch die Perioden der einzelnen Glieder unbekannt sind. Die Untersuchung dieses Falles stützt *J. L. Lagrange*[127]) auf den Satz, dass man jede Reihe, deren allgemeines (m^{tes}) Glied die Form hat

Umgebung kritischer Punkte und Entwicklung der übrigen Bestandteile nach geeigneten Hülfsvariabeln (Nr. 17, p. 56 ff.). Die Konvergenz dieser Entwicklungen hält er selbst nicht in allen Fällen für bewiesen, doch könne Divergenz nur in „unendlich unwahrscheinlichen" Fällen eintreten.

126) U. S. coast survey report f. 1894 [95], App. 7, Nr. 10, p. 137.

127) Par. Hist. 1772[2] (75); Oeuvres 6, p. 505. *Lagrange* knüpft seine Untersuchung an das Problem der Bestimmung der Ungleichheiten der Planetenbahnen direkt aus den Beobachtungen; er setzt auseinander, dass sowohl die alten Vorstellungen von Bewegungen in exzentrischen Kreisen und Epicykeln, als auch die neueren auf den Ansatz (73) führen. Dass *Lagrange*'s Verfahren keine praktische Anwendung fand, liegt wohl an den raschen Fortschritten der *deduktiven Störungstheorie* in jenen Jahren. — An späterer Stelle (Berl. astr. Jahrb. 1783 [80], Nr. 12; Oeuvres 7, p. 548) stellt *Lagrange* sein Verfahren noch einmal dar, in-

$$(73) \qquad x^m\{R_1 \sin(mn_1 + \xi_1) + R_2 \sin(mn_2 + \xi_2) + \cdots\}$$

(die R, n und ξ von m unabhängig) als eine rekurrente Reihe betrachten, und dass man von jeder solchen Reihe zu dem Bruch, dessen Entwicklung sie erzeugt, durch eine Art von Kettenbruchverfahren zurückgelangen kann. Sind Zähler und Nenner des erzeugenden Bruches je ein reziprokes Polynom, so kann man die Reihe (73) durch die Substitution

$$(74) \qquad z = \frac{x}{1 + x^2}$$

in eine andere rekurrente Reihe von nur halb so hoher Ordnungszahl überführen[128]; dieselbe Vereinfachung kann man auch dadurch erreichen, dass man bei jedem Schritt des Kettenbruchverfahrens die Division bis zu den Gliedern mit x^2 fortsetzt[129]). Soll das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe speziell die Form (73) haben, so muss der Nenner des sie erzeugenden Bruches das Produkt

$$(75) \qquad (1 - 2x\cos n_1 + x^2)(1 - 2x\cos n_2 + x^2)\ldots$$

sein; jeder von den Partialbrüchen mit quadratischem Nenner, in die ein derartiger Bruch sich zerlegen lässt, liefert einen der Summanden des allgemeinen Reihengliedes (73)[130]). Aus diesen Sätzen entwickelt *Lagrange* schliesslich das folgende Verfahren[131]). Seien:

$$(76) \qquad \ldots Y_{-2},\ Y_{-1},\ Y_0,\ Y_1,\ Y_2 \ldots.$$

die beobachteten Funktionswerte; man bilde die beiden Potenzreihen:

$$(77) \qquad f_1(x) = y_0 + \sum(y_\nu + y_{-\nu})x^\nu, \quad f_2(x) = \sum(y_\nu - y_{-\nu})x^\nu$$

und entwickle die Quotienten

$$(78) \qquad \frac{1 - x^2}{f_1(x)}, \quad \frac{1}{f_2(x)}$$

in Kettenbrüche, indem man dabei jede einzelne Division bis zu Gliedern zweiten Grades fortsetzt. Die Kettenbrüche breche man an geeigneter Stelle ab, reduziere sie zu gewöhnlichen Brüchen und führe z durch (74) ein; man wird bezw. Ausdrücke der Form erhalten:

$$(79) \qquad \frac{1 - x}{1 + x^2}\frac{V_1}{Y}, \quad \frac{1 - x}{1 + x^2}\frac{V_2}{Y},$$

unter Y, V_1, V_2 rationale ganze Funktionen von z verstanden. Endlich zerlege man V_1/Y und V_2/Y in Partialbrüche:

---

dem er das Wort Kettenbruch als den Astronomen ungewohnt vermeidet und nur von der Auflösung linearer Gleichungen redet.

128) Nr. 27, p. 559. 129) Nr. 30, p. 565. 130) Nr. 35, p. 573.

131) Nr. 37, p. 580. *Lagrange* behandelt auch den Fall gerader Gliederzahl, Nr. 40, p. 587.

$$(80) \qquad \frac{V_1}{Y} = \sum \frac{F_\mu}{1 - c_\mu z}, \qquad \frac{V_2}{Y} = \sum \frac{G_\mu}{1 - c_\mu z};$$

dann sind die gesuchten Perioden, Amplituden und Phasenkonstanten gegeben durch[132]):

$$(81) \qquad \cos n_\mu = \frac{1}{2} c_\mu, \quad \operatorname{tg} \xi_\mu = \frac{2 F_\mu}{G_\mu} \sin n_\mu, \quad R_\mu = \sqrt{F_\mu + \frac{G_\mu}{4 \sin^2 n_\mu}}.$$

Später[133]) giebt *Lagrange* noch den Satz: Bildet man aus der gegebenen Reihe von Funktionswerten zunächst deren Differenzenreihen, so bilden deren mittelste Glieder zwei rekurrente Reihen:

$$(82) \qquad Y_0, \ \Delta^2 Y_0, \ \Delta^4 Y_0, \ldots$$

und

$$(83) \qquad \Delta Y_0, \ \Delta^3 Y_0, \ \Delta^5 Y_0, \ldots$$

deren Rekursionsskalen nur reelle Koeffizienten haben, die sich also im Fortschreiten mehr und mehr geometrischen Reihen nähern. Das ermöglicht die Bestimmung zunächst derjenigen Teilperiode, die am nächsten an $1/2$ liegt; eine Modifikation des Verfahrens giebt auch die übrigen[134]).

22. Die Sätze von Nervander und Buys-Ballot. In zahlreichen Fällen ist man erst durch den Anblick der Tabelle oder noch besser der Kurve, die den Verlauf einer Erscheinung darstellen, auf eine dieser Erscheinung innewohnende Periodizität aufmerksam gemacht und zu dem Versuch veranlasst worden, diese Periodizität auch quantitativ zu bestimmen. Dabei nahm man zunächst den Abstand zweier gleichnamigen Extrema, bezw. hervorragenden Extrema, als Länge der Periode. Da die Eintrittszeiten der Extrema sich nicht immer ganz scharf bestimmen lassen, dividierte man den Abstand zweier

132) Die Frage, wie weit man mit diesem Verfahren bei Beobachtungen von begrenzter Genauigkeit vernünftigerweise gehen darf, erörtert *Lagrange* selbst, Nr. 45, p. 620. Ausgedehnten Beobachtungsreihen gegenüber liesse es sich in der vorliegenden Gestalt sicher nicht anwenden; aber vielleicht ist es noch verbesserungsfähig. Ausser dem von *Lagrange* selbst durchgerechneten Beispiel der Zeitgleichung (Nr. 41, p. 588) scheint kein Fall praktischer Anwendung vorzuliegen. Die Diss. von *Hallström*, Åbo 1802, aus deren Titel man vielleicht schliessen darf, dass *Lagrange*'s Untersuchungen in ihr weitergeführt sind, war mir nicht zugänglich.

133) Berl. astr. Jahrb. 1783 [80], Nr. 8; Oeuvres 7, p. 544.

134) Nr. 11, p. 547. Die von *Lagrange* in Aussicht gestellte Anwendung dieses Verfahrens auf Fehler in *Halley*'s Jupiter- und Saturntafeln ist nicht erschienen. Auch sonst scheint es weder von ihm selbst, noch von andern je praktisch erprobt worden zu sein; in den meisten Fällen werden die Fehler der Beobachtungen in den Differenzen sich zu sehr häufen.

möglichst weit von einander entfernten Extrema durch die Anzahl der dazwischen liegenden Perioden; die letztere kann — als ganze Zahl — aus einem nur näherungsweisen Wert der Periode bestimmt werden, auch wenn nicht alle zwischenliegenden Extrema deutlich ausgeprägt gewesen und beobachtet worden sind[135]).

Die Mängel dieses Verfahrens — Nichtberücksichtigung möglicher Verschiebungen der Extrema durch den Einfluss sekundärer Komponenten; Ausnutzung nur eines kleinen Teiles der Beobachtungen; Unmöglichkeit, die Perioden der sekundären Komponenten unabhängig von dem bei Bestimmung der Hauptkomponenten begangenen Fehler zu erhalten — liegen auf der Hand.

Zu besseren Methoden legt *C. H. D. Buys-Ballot*[136]) den Grund durch die folgenden Sätze:

1) Hat man eine Reihe von Zahlen, die erst zu-, dann abnehmen, und sich nach je n Termen periodisch wiederholen, und ordnet man sie so, dass die $(n+1)^{\text{te}}$ unter die erste, die $(n+2)^{\text{te}}$ unter die zweite u. s. w. zu stehen kommen, so bilden die Kolonnensummen eine Folge derselben Art.

2) Ordnet man sie aber so, dass erst die $(n+2)^{\text{te}}$ oder die $(n+3)^{\text{te}}$ ... unter die erste zu stehen kommen, so verwischt sich in

135) In der im Text angegebenen Weise hat man z. B. seit lange die Perioden des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne bestimmt; auch zu genaueren Bestimmungen der Umlaufszeiten der Himmelskörper hat man kein anderes Verfahren. Die komplizierteren Verhältnisse, die bei einigen veränderlichen Sternen vorliegen, scheinen der harmonischen Analyse noch nicht unterworfen worden zu sein; die Ansätze von *A. Argelander*, Bonn Astr. Beob. 7, 1869 gehen nach anderer Richtung (Darstellung der Eintrittszeiten der Extrema durch parabolische (z. B. p. 342) oder trigonometrische Interpolation p. (340)). Durch ähnliche Interpolationsformeln hat *S. C. Chandler* auch die Polschwankungen zunächst dargestellt (Astr. J. 12 (1893), p. 21); später setzt er an die Stelle der eingliedrigen Formel mit variabeln Koeffizienten eine zweigliedrige mit konstanten, ib. p. 97), noch später bestimmt er auch von den Koeffizienten dieser letzteren wieder „Ungleichheiten" (ib. p. 14 (1895), p. 73). Eine prinzipielle Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen eine eingliedrige Formel mit variablen Koeffizienten durch eine mehrgliedrige mit konstanten Koeffizienten ersetzt werden kann — also die Umkehrung der unter Nr. 20 besprochenen Fragestellung — wäre sehr wünschenswert.

136) Les changements périodiques de température, Utrecht 1847, § 11, p. 34 (vorl. Mitteilung Ann. Phys. Chem. 68 (1846), p. 205). Weniger scharf formuliert treten die zu diesen Sätzen führenden Überlegungen kurz vorher bei *J. J. Nervander* auf, Petersb. Bull. 3 (1845), col. 2; Ann. Phys. Chem. 68 (1846), p. 193. Im wesentlichen übereinstimmend auch *R. Wolf*, Astr. Mitt. 18 (1865), p. 249. — Formeln zur quantitativen Bestimmung dieser Änderung von Amplitude und Phase giebt *J. P. van der Stok*, Natuurk. Tijdschrift voor Nederl. Indië 48 (1889), p. 168.

den Kolonnensummen das Periodizitätsgesetz; und zwar um so mehr, je grösser die Zahl der benutzten Perioden ist, und je mehr man sich über die Länge der Periode getäuscht hat.

3) Sind die der Rechnung unterworfenen Zahlen durch Superposition verschiedener Perioden entstanden, so erscheint in den Kolonnensummen nur eine dieser Perioden.

4) Hat man die Periode zu klein (zu gross) genommen, so rückt das Maximum der Kolonnensummen bei successiver Addition immer neuer Zeilen immer weiter nach rechts (nach links), und zwar um so rascher, je mehr man sich in der Länge der Periode getäuscht hat.

Weiter ausgebildet ist das auf diese Sätze sich stützende Verfahren von *L. Hornstein*[137]: Man kann den Wert der sich aus der Rechnung ergebenden Amplitude als Funktion der angenommenen Periodenlänge durch eine ganze Funktion zweiten Grades interpolatorisch darstellen und dann denjenigen Wert der Periodenlänge, der diese Funktion zu einem Maximum macht, als den wahrscheinlichsten Wert der Periode ansehen.

Andererseits kann man auch Periodenlänge und Phasenkonstante zusammen aus den beobachteten Epochen der Extrema nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen[138].

23. Pulling und pushing. Die grosse Mühe der Bestimmung der Amplituden zu einer grösseren Anzahl angenommener Perioden lässt sich nach einem von *B. Stewart* und *W. Dodgson*[139] auf Veranlassung des Ausschusses der British Association für Sonnenphysik ausgearbeiteten Verfahren vermindern. Sie addieren nämlich nicht sämtliche nach der zuerst angenommenen Periode T kongruenten Beobachtungen, sondern nur die je einem bestimmten grösseren Zeitraum J angehörenden, so dass sie p Reihen von je n Mittelwerten er-

137) Wien. Ber. 64^2 (1861), p. 69. *Hornstein* bestimmt auch die zugehörige Phasenkonstante durch eine entsprechende Interpolation.

138) *Spörer,* Astr. Nachr. 98 (1880), col. 96; ebenso neuerdings *S. Newcomb,* Astroph. J. 13 (1901), p. 5. *Newcomb* benutzt ausser den Extremen auch noch Mittelphasen, deren Eintrittszeiten sich häufiger genauer bestimmen lassen, als die der Extrema. Vgl. übrigens [88]).

139) Lond. Roy. Proc. 29 (1879), Nr. 9, p. 111; ib. p. 307, Nr. 6 bestimmen sie auch eine Phasendifferenz zwischen den Beobachtungen derselben Grösse an zwei verschiedenen Orten durch solches pulling und pushing. — Übrigens ist die Idee, auf der das pulling und pushing beruht, schon in dem Verfahren enthalten, dessen sich *L. Ferrel* (U. S. coast survey, separater Appendix zum Report f. 1874, Nr. 176, p. 178) bedient, um die Gezeitenbeobachtungen bei Berechnung von Komponenten nahe gleicher Periode nicht jedesmal ganz neu ordnen zu müssen.

halten. In dem so entstehenden Schema rücken sie cyklisch jede Zeile um je eine Einheit weiter nach links („pulling things to the left"); wird dann jede Kolonne summiert, so geben die Summen den mittleren Gang der Erscheinung für eine angenommene Periodenlänge

$$T\left(1+\frac{1}{n}\frac{T}{J}\right). \tag{84}$$

Es wird dann sowohl dieser Prozess, als auch der umgekehrte („pushing things to the right") noch öfter wiederholt; natürlich häufen sich die Fehler allmählich. Will man nur um ein halbes Beobachtungsintervall verschieben, so kann man die dazu nötigen Zwischenwerte graphisch interpolieren[140]).

Als Weiterbildung dieser Methode kann das Verfahren von *J. P. van der Stok*[141]) angesehen werden. Er teilt die ihm zur Verfügung stehenden 7740 Beobachtungen in 10 Tafeln, jede zu 30 Zeilen und 26 Kolonnen; um die Amplitude für eine Periode von 25,8 Beobachtungsintervallen zu bekommen, lässt er in der 14. Kolonne die 3., 8., 13., ... Zeile frei. Ist $2\pi/n$ die wahre Periode, so wird die Summe der Zahlen der x^{ten} Kolonne der p^{ten} Tafel (vgl. [62]):

$$R\frac{\sin 30\cdot 12{,}9n}{\sin 12{,}9n}\sin\left\{\frac{25{,}8}{26}nx+\xi+29\cdot 12{,}9n+30(p-1)\cdot 25{,}8n\right\}. \tag{85}$$

Werden dann die Phasen der Summen in der p^{ten} Tafel um $(p-1)\varrho\alpha$ verschoben, so wird die Summe der x^{ten} Kolonnen aller p Tafeln:

$$R\frac{\sin 30\cdot 12{,}9n}{\sin 12{,}9n}\frac{\sin 10(30\cdot 12{,}9n+0{,}5\varrho\alpha)}{\sin(30\cdot 12{,}9n+0{,}5\varrho\alpha)} \cdot\sin\left\{\frac{25{,}8}{26}nx+\xi+299\cdot 12{,}9n+4{,}5\varrho\alpha\right\} \tag{86}$$

entsprechend einer Gruppierung der Beobachtungen nach einer Periode:

$$25{,}8+\frac{\varrho\alpha}{30n}. \tag{87}$$

Van der Stok nimmt $\alpha=0{,}3\pi/26$, $\varrho=-4,-3,\ldots,+5,+6$; die sich ergebende Phasenverschiebung jeder Summenreihe gegen die vorhergehende müsste dann etwa $18^0\,42'$ betragen; das giebt eine gewisse Kontrolle dafür, wie weit die Voraussetzungen erfüllt sind. Mit einigen Abkürzungen nehmen die 11 so erhaltenen Gleichungen zwischen den aus der Formel und den aus den Beobachtungen sich ergebenden Amplituden die Form an:

$$m_\varrho = X\frac{\sin 10(387\xi+0{,}5\varrho\alpha)}{\sin(387\xi+0{,}5\varrho\alpha)}. \tag{88}$$

140) Nr. 10, p. 114.

141) Natuurk. Tijdschr. voor Nederl. Indië 48 (1889), p. 166; populärere Darstellung ib. p. 227. Auch Batavia Observ. 10, App. 1.

Andererseits kann man auch die berechneten Amplituden durch eine Interpolationsformel der Gestalt[142]):

$$m_\varrho = A + B\varrho + C\varrho^2 + \cdots \tag{89}$$

darstellen; die Vergleichung des aus dieser Formel sich ergebenden Wertes von ϱ, für den m_ϱ Maximum wird, mit dem aus (88) folgenden:

$$\varrho = -\frac{387\,\xi}{0{,}5\,\varrho\,\alpha} \tag{90}$$

giebt den Wert von ξ und damit den von n. Eventuell wird auch eine Entwickelung nach Potenzen einer anderen kleinen Grösse zweckmässig sein[143]).

Formeln, die auf derselben Idee wie das pulling und pushing beruhen, aber grössere Genauigkeit geben, teilt *A. Schuster*[144]) mit. Ist näherungsweise:

$$pT_1 \sim snT, \tag{91}$$

so ist auch:

$$\frac{2}{pT_1}\int_0^{pT_1} f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{2\pi t}{T_1}\,dt \sim \frac{nT}{pT_1}\sum_{m=1}^{s}\int_{(m-1/nT)}^{mnT} f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_m\right)dt \tag{92}$$

mit:

$$\alpha_m = (2m-1)n\pi(TT_1^{-1}). \tag{93}$$

24. Andere neuere Ansätze. Im Anschluss an die Untersuchung von *Stewart* und *Dodgson*[139]) bemerkt *G. Stokes*[145]): Enthält der Ausdruck einer Funktion $f(t)$ einen Summanden:

$$R\sin(mt+\xi), \tag{94}$$

so enthalten die unbestimmten Integrale:

$$\int f(t)\sin nt\,dt, \quad \int f(t)\cos nt\,dt \tag{95}$$

bezw. die Summanden:

$$\frac{R}{2(m-n)}\sin(mt-nt+\xi), \quad \frac{R}{2(m-n)}\cos(mt-nt+\xi), \tag{96}$$

also, wenn n von m wenig verschieden ist, grosse langperiodische Ungleichheiten. Indem man diese Ungleichheiten der durch einen harmonischen Analysator gelieferten Aufzeichnung jener Integrale entnimmt, kann man die Differenz $m-n$ bis auf das Vorzeichen bestimmen; das Vorzeichen ergiebt sich daraus, dass für $m>n$ das Sinusintegral, für $m<n$ das Kosinusintegral gegen das andere um eine Viertelperiode zurück ist.

142) p. 175. *Van der Stok* bedient sich hier der Methode der kleinsten Quadrate; vgl. dazu Fussn. [88]).

143) Nr. 3, p. 178. 144) Cambr. Trans. 18 (1900), p. 128.

145) Lond. Roy. Proc. 29 (1879), p. 122.

Vinayek Narayen Nene[146]) schliesst aus der Identität (4): Werden aus je m aufeinander folgenden Gliedern der Folge

$$(97)\quad \sum_\nu R_\nu \sin \xi_\nu,\quad \sum_\nu R_\nu \sin (b_\nu + \xi_\nu), \ldots \quad \sum_\nu R_\nu \sin (nb_\nu + \xi_\nu)$$

die Mittelwerte gebildet, so wird das allgemeine (μ^{te}) Glied der so entstehenden „ersten Mittelwertreihe“:

$$(98)\qquad \sum_\nu \frac{R_\nu}{q_\nu} \sin\left(\frac{m+2\mu-1}{2} b_\nu + \xi_\nu\right),\quad q_\nu = \frac{m \sin \frac{b_\nu}{2}}{\sin \frac{mb_\nu}{2}}.$$

Ist m ungerade, so kommen hier dieselben Argumente vor wie in (97); *Nene* bildet dann aus den Differenzen: Beobachtung — erster Mittelwert die „erste Restreihe“, deren allgemeines Glied ist:

$$(99)\qquad \sum_\nu \left(1 - \frac{1}{q_\nu}\right) R_\nu \sin\left(\frac{m+2\mu-1}{2} b_\nu + \xi_\nu\right).$$

Aus diesen Resten bildet er zweite Mittelwerte und zweite Reste u. s. f.; schliesslich ist das $(n-(m-1)r)^{\text{te}}$ Glied der r^{ten} Restreihe[147]):

$$(100)\qquad \sum_\nu \left(1 - \frac{1}{q_\nu}\right)^r R_\nu \sin\left(\frac{2n - mr + r - 2}{2} b_\nu + \xi_\nu\right).$$

Sind nun die Winkel $mb_1, mb_2, \ldots$ alle kleiner als 2π, so konvergieren die Summen (100) mit wachsendem r gegen Null; ist aber $2\pi \leqq mb_1 < 4\pi$, $mb_2 < 2\pi$, $mb_3 < 2\pi, \ldots$, so reduzieren sich diese Summen mit wachsendem r merklich auf ihre ersten Glieder. Damit kann man die Frage entscheiden, ob in dem Ausdruck einer vorgelegten Beobachtungsreihe ein Glied von einer Periode zwischen mc und $2mc$ enthalten ist, wenn c das Beobachtungsintervall bedeutet[148]). Dabei kann m noch so gewählt werden, dass $-q_1$ möglichst gross wird. Sind mehrere solche Komponenten vorhanden, so liefert das Verfahren nur diejenige mit der längsten Periode.

25. Kritik vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inwiefern kann überhaupt durch Rechnungen der in den letzten Nummern besprochenen Art das Vorhandensein einer Komponente mit der angenommenen Periode in dem mathematischen Ausdruck der beobach-

146) ib. 36 (1884), p. 361; mit „suggestions“ von *Ch. Chambers*. *Nene* behandelt auch den Fall eines geraden m; dabei fasst er je zwei Glieder der ersten Mittelwertreihe zu einer zweiten zusammen.

147) Nr. 13, p. 371.

148) Nr. 22, p. 378. Kurze Perioden von merklicher Amplitude müssen eventuell vor Anwendung des Verfahrens durch Ausgleichen (smoothing) entfernt werden (Nr. 26, p. 380; vgl. aber die gegenteilige Bemerkung von *A. Schuster*[158]).

teten Erscheinung als bewiesen angesehen werden? Diese Frage bespricht für die elementare Methode, bei der aus einem deutlichen Gang der Mittelwerte

$$(101) \qquad M_\nu = \frac{1}{r}\sum_{q=0}^{r-1} f\left(qT + \frac{\nu T}{n}\right) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

auf die Existenz einer Komponente der Periode T geschlossen wird, bereits *R. Strachey*[149]). Er bildet die durchschnittlichen Abweichungen:

$$(102) \qquad E_\nu = \frac{1}{r}\sum_{q=0}^{r-1} \left| M_\nu - f\left(qT + \frac{\nu T}{n}\right)\right|$$

und aus ihnen das Hauptmittel:

$$E = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu;$$

fällt dieses nicht wesentlich kleiner aus, als das Mittel aus allen $|M - f|$,[150]) unter M das Gesamtmittel aus allen f verstanden, so erklärt er das Resultat für illusorisch. Nachträglich präzisiert er noch genauer: liegt keine Periodizität der angenommenen Art vor, so wird der „wahrscheinlichste" Wert (I D 2, Nr. 9, *Bauschinger*) der Differenz $|M - f|$ proportional zu $E/\sqrt{r}$ sein, also das Produkt $\sqrt{r}\,\Sigma|M - f|$ mit wachsendem r gegen nE konvergieren; liegt aber Periodizität der gesuchten Art vor, so konvergiert $\Sigma|M - f|$ selbst gegen eine von Null verschiedene Grenze[151]).

Die entsprechende Kritik des *Hornstein*'schen Verfahrens[137]) liefert *A. Schuster*[152]). Er ordnet die vorliegenden $p = nr$ Beobachtungen in n Kolumnen zu je r, bildet die Kolumnensummen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ und stellt sie durch die *Bessel*'sche Formel dar. Ist nur der jedesmalige Eintritt eines bestimmten Ereignisses notiert, so gehen die Gleichungen (15) über in:

$$(104) \qquad B_0 = A_0 = p, \quad nA_1 = 2\Sigma\cos kt_\nu, \quad nB_1 = 2\Sigma\sin kt_\nu;$$

dabei bedeuten die t_ν die Zeiten des Eintritts des Ereignisses, $T = 2\pi/k$ die angenommene Periode[153]). Aus einem von Lord *Rayleigh* bei

149) Lond. Roy. Proc. 26 (1877), p. 249.

150) „Mean departure from mean of whole" nach der Terminologie von *Stewart* u. *Dodgson*, Manch. mem. (3) 8 (1884), Nr. 9, p. 62. Sie ist gleich $2/\pi$ mal der Amplitude.

151) Lond. Roy. Proc. 26 (1877), p. 259.

152) Terr. Magnetism 3 (1898), p. 13; Auszug Lond. Roy. Proc. 61 (1897), p. 455. Populäre Darstellung in *Schuster*'s presidential address, Nature 66 (1902), p. 614.

153) Nr. 2, p. 14. Zeigen die Ereignisse eine gewisse Tendenz zu gruppen-

optischen Untersuchungen gefundenen Satze ergiebt sich dann: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass, bei ganz willkürlichen t_ν, R_1/R_0 grösser als

$$2\sqrt{\frac{k}{p}} \tag{105}$$

ausfällt, beträgt e^{-k}. Man kann also nur dann mit einiger Wahrscheinlichkeit auf das wirkliche Vorhandensein einer Komponente mit der Periode T schliessen, wenn man ein beträchtliches Beobachtungsmaterial zur Verfügung hat. Für den Fall, dass nicht der Eintritt eines Ereignisses, sondern der Wert einer veränderlichen Grösse beobachtet ist, gelten analoge Resultate[154]).

Ferner bildet *Schuster* aus den beiden Integralen:

$$a = \int_\tau^{\tau+nT} f(t)\cos kt\,dt, \quad b = \int_\tau^{\tau+nT} f(t)\sin kt\,dt, \quad \left(k = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{106}$$

den Wert

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{107}$$

und aus den Werten, die dieses R bei festgehaltenem k und n als Funktion von τ annimmt, den Mittelwert U.[155]) Die graphische Darstellung dieses Mittelwerts als Funktion der Periode T nennt er das Periodogramm der Erscheinung. Ist T keine wahre Periode, so wächst U mit wachsendem n wie $\sqrt{n}$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einzelner Wert von R grösser als λU ausfällt, beträgt $e^{-\frac{\pi\lambda^2}{4}}$; ist aber T eine wahre Periode, so wächst U wie n selbst. Daraus ergiebt sich die Regel[156]): Liefert die Diskussion von n Beobachtungen ein Periodogramm von der durchschnittlichen Höhe a, so braucht man mindestens $16\,n\,a^2 b^{-2}$ Beobachtungen, um mit Sicherheit auf die Existenz einer Periode von der Amplitude b schliessen zu können. Besonders ist übrigens die Möglichkeit des Auftretens von „spurious periodicities" zu beachten[157]): wird z. B. von $\cos qt$ die zur Periode $2\pi/k$ gehörende Komponente bestimmt und umfasst der Beobachtungs-

weisem Auftreten, so sind die Schlüsse noch etwas zu modifizieren (Nr. 4, p. 19; Nr. 6, p. 22). 154) Nr. 5, p. 20.

155) Nr. 7, p. 23. *Schuster* bemerkt die Analogie seines Periodogramms zu dem Spektrum einer Lichtquelle: Vergrösserung des Beobachtungszeitraums habe denselben Effekt, wie Wahl eines Spektralapparates von grösserer auflösender Kraft. — Neuerdings (Cambr. Proc. 18 (1900), p. 106) zieht es *Schuster* übrigens vor, nicht die Amplitude, sondern ihr Quadrat (die Intensität) als Ordinate seines Periodogramms aufzutragen.

156) Terr. Magn. 3, Nr. 9, p. 25.

157) Nr. 12, p. 30; vgl. auch die anders geführte Rechnung Cambr. Trans. 18, p. 109.

zeitraum n dieser Perioden, so findet man für deren Amplitude den Wert:

$$\frac{2}{q+k}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\sqrt{q^2\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha}\,,\quad \alpha = \frac{n\pi(q-k)}{k}, \tag{108}$$

der sehr klein ist, ausser wenn q und k wenig von einander verschieden sind. Im letzteren Falle sind seine Maxima nahezu durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha \tag{109}$$

bestimmt; diese Maxima können in einem solchen Falle thatsächlich nicht vorhandene Periodizitäten vortäuschen. Man erkennt sie aber daran, dass sie mit der Dauer des Beobachtungszeitraums ihre Lage ändern.

Die vielfach geübte Ausgleichung der Beobachtungen vor der Aufsuchung der Perioden findet *Schuster* nur gerechtfertigt, wenn man durch sie erreicht, dass vorher versteckte Periodizitäten augenfällig werden; andernfalls werden durch sie (vgl. die Formeln (23) und (38)) die zu verschiedenen Perioden gehörenden Amplituden so stark und so verschiedenartig geändert, dass die Auswahl der maximalen dadurch gestört werden kann[158]).

Die ablehnende Haltung, die *Fr. H. Bigelow*[159]) *Schuster*'s Resultaten gegenüber einnimmt, beruht hauptsächlich darauf, dass *Bigelow* überhaupt nicht an die Darstellbarkeit der in Frage kommenden Erscheinungen durch die Formel (65), mit konstanten λ_ν glaubt; er sieht es vielmehr — wie übrigens früher schon *D. J. Korteweg*[159a]) unter Zustimmung von *R. Wolf*[160]) — für wahrscheinlich an, dass man die Perioden selbst als veränderlich ansehen müsse[135]). Solche veränderliche Perioden würden aber durch die Summation über einen längeren Beobachtungszeitraum verwischt werden.

Die Frage der Polschwankungen[135]) lässt entsprechende Untersuchungen für die simultane Darstellung mehrerer willkürlicher Funktionen wünschen.

IV. Hülfsmittel zur Ausführung der Rechnungen.

26. Rechenschemata für spezielle Werte der Anzahl der Beobachtungen. Für die wirkliche Ausführung der Beobachtungen dienen in erster Linie die Formeln von Nr. 4. Für spezielle Werte der An-

158) Terr. Magn. Nr. 13, p. 32; Lond. Roy. Proc. Nr. 3, p. 458.
159) Wash. philos. Bull. 14 (1903), p. 222.
159a) Wien. Ber. 88 (1883), p. 1017.
160) Astr. Mitt. 66 (1886), p. 224.

zahl der Beobachtungen — praktisch kommen fast nur gerade, eigentlich nur durch vier teilbare in Betracht — lassen sich die Rechnungen noch mannigfach abkürzen und schematisieren. Ausgearbeitete Vorschriften zu diesem Zwecke geben:

für $n = 2$, $n = 3$ *H. Fritsche*[161]);

für $n = 4$ *J. U. Le Verrier*[162]), *M. Dechevrens*[163]), *Fritsche*[161]);

für $n = 6$ *Dechevrens*[163]), *Fritsche*[161]);

für $n = 8$ *A. Bravais*[41]), *M. Koller*[164]), *Le Verrier*[161]), *A. Smith*[165]), *J. J. Åstrand*[166]), *Dechevrens*[162]), *A. Nippoldt* jun.[167]), *Fritsche*[161]);

für $n = 9$ *E. B. Wedmore*[168]), *Fritsche*[161]);

für $n = 10$ *Dechevrens*[163]), *Fritsche*[161]);

für $n = 12$ *C. F. Gauss*[169]), *Fr. Carlini*[170]), *J. C. E. Schmidt*[171]), *Bravais*[41]), *Koller*[164]), *A. Kunzek*[172]), *J. D. Everett*[173]), *F. Jenkin* und *J. A. Ewing*[174]), *H. Schneebeli*[175]), *L. Grossmann*[176]), *Dechevrens*[163]), *C. Runge*[177]), *Fritsche*[161]);

für $n = 16$ *Le Verrier*[162]), *J. Macé de Lépinay*[178]);

für $n = 18$ *Fritsche*[161]);

für $n = 24$ *Koller*[164]), *Kunzek*[171]), *T. R. Robinson*[179]), *Schneebeli*[175]), *Ferrel*[179a]), *J. Lahr*[180]), *Kirsch*[181]), *R. Strachey*[182]), *Grossmann*[176]), *Wedmore*[183]), *Dechevrens*[163]), *C. Kassner*[184]), *Fritsche*[161]);

---

161) Atlas des Erdmagnetismus, Riga 1903, p. 22.

162) Par. Observ. ann. 1 (1855), Nr. 35, p. 137; Nr. 36, p. 143.

163) Linc. Pontif. mem. 16 (1899), p. 165; Erläuterungen ib. 17, 1900.

164) Wien. Denkschr. 1 (1850), Nr. 14, p. 65.

165) Manual of scientific inquiry der britischen Admiralität (mir nicht zugänglich).

166) Stockh. Oefv. 32^9 (1875), p. 49; Ann. der Hydrogr. 3 (1875), p. 474.

167) Ann. der Hydrogr. 1899, p. 62.

168) J. inst. electr. engineers 25 (1896), p. 235 (für den Fall, dass von vorneherein bekannt ist, dass nur ungerade Obertöne auftreten). Vgl. [183]).

169) Werke 3, Nr. 28, p. 308. Die von *Gauss* gegebene Anweisung zur Zerlegung in Gruppen, für den Fall, dass n eine zusammengesetzte Zahl ist, scheint bei den Praktikern wenig bekannt zu sein und selten angewendet zu werden.

170) Sulla legge delle variazioni orarie del barometro, Modena 1820 [?] (auch Mem. Soc. Ital. 20 (1828), p. 198); mir nicht zugänglich.

171) Lehrbuch der math. und physik. Geographie, 2, Gött. 1830, § 168, p. 279.

172) Studien aus der höheren Physik, Wien 1856, § 8, p. 33.

173) Amer. J. of sci. (2) 35 (1863), p. 25.

174) Edinb. Trans. 28 (1879), p. 751.

175) Genève arch. (3) 1 (1879), p. 151.

176) Hamburg Seewarte Arch. 17^5 (1894), p. 5.

177) Zeitschr. Math. Phys. 48 (1902), p. 443.

178) J. de phys. (3) 8 (1899), p. 139.

179) Lond. Trans. 165 (1876), p. 419.

für $n = 30$ *Kunzek*[171]);
für $n = 32$ *P. A. Hansen*[185]), *G. D. E. Weyer*[186]);
für $n = 36$ *Gauss*[187]), *Dechevrens*[163]), *Runge*[177]), *Fritsche*[161]);
für $n = 40$ *L. Hermann*[188]);
für $n = 52$ *Fritsche*[161]);
für $n = 64$ *Hansen*[189]);
für $n = 72$ *Strachey*[190]);
für $n = 73$ *Strachey*[191]), *Fritsche*[161]);
für $n = 4m$ allgemein *Bruns*[192]).

Will man nur wenige Koeffizienten berechnen, so kann man, wie *W. Ferrel*[193]) bemerkt, auch Gleichungen zu ihrer Bestimmung be-

179*) U. S. coast survey rep. f. 1878, app. 11, Nr. 16, p. 16.

180) Ann. Phys. Chem. N. F. 27 (1886), p. 107; vgl. aber die Berichtigungen von *H. Pipping*, Zeitschr. Biol. 27 (1893), p. 8 und Fenn. Acta 20^{11} (1895), p. 18.

181) Die Bewegung der Wärme [18]), Nr. 10, p. 37.

182) Lond. Roy. Proc. 42 (1887), p. 61, 75; Hourly readings from the self-recording instruments at the 4 observatories under the meteorol. council, Lond. 1887, appendix.

183) J. inst. electr. engineers 25 (1896), p. 234. *Wedmore* bedient sich nicht der Formeln von Nr. 4, sondern eines Verfahrens, das auf demselben Gedanken beruht, wie die in Nr. 22 besprochenen Methoden: ist n eine zusammengesetzte Zahl, $= rs$, und bildet man die Summen

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} y_{\sigma+\varrho s}, \qquad \sigma = 0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

so fallen aus diesen Summen alle Komponenten heraus, deren Ordnungszahl nicht durch s teilbar ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes erhält man den Gang der einzelnen Komponenten getrennt; die Amplitude einer jeden berechnet *Wedmore* aus dem Mittelwert der absoluten Beträge ihren Ordinaten, die Phasenkonstante dann einfach aus einer einzelnen Ordinate. Das Verfahren setzt voraus, dass man beträchtlich mehr Beobachtungen zur Verfügung hat, als Komponenten merklich sind; ist das der Fall und ist andererseits die Zahl der Beobachtungen nicht so gross, dass das Verfahren von *Tschebyscheff* (Nr. 6) in Frage kommen kann, so ist es allen andern vorzuziehen.

184) Meteor. Zeitschr. 36 (1901), p. 81.

185) Über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns, Preisschr. Berlin 1831, Nr. 13, p. 49. 186) Ann. der Hydrogr. 16 (1888), p. 91.

187) Werke 3, Nr. 41, p. 325. Vgl. [169]).

188) Arch. Physiol. 47 (1890), p. 44.

189) Astr. Nachr. 12 (1835), Nr. 47, col. 339; Par. C. R. Suppl. 1, 1856 (Pariser Preisschrift von 1846), Nr. 67, p. 238; Nr. 75, p. 254.

190) Lond. Roy. Proc. 42 (1887), Nr. 9, p. 72.

191) ib. und Hourly readings [162]), app. p. [4].

192) Grundlinien [15]), § 86, p. 119.

193) U. S. coast survey, separater Appendix zum Report f. 1874, Nr. 161, p. 159. Die Methode von *Wedmore* [183]) beruht auf einem ähnlichen Gedanken.

kommen, wenn man nicht über die ganze Periode, sondern von verschiedenen Anfangspunkten aus nur über ihre Hälfte summiert.

Die Frage, wie gross man n zu nehmen hat, um in einem gegebenen Fall eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, lässt sich mathematisch nur beantworten, wenn ein anderweitiger analytischer Ausdruck der interpolatorisch darzustellenden Funktion vorliegt. Für diesen Fall ist sie schon von *Hansen*[194]) gestreift, dann von *Cauchy*[195]) und seinen Kommentatoren *Berger*[196]), *Puiseux*[197]), *Tisserand*[198]), neuerdings noch von *C. V. L. Charlier*[199]) und *C. A. Schultz-Steinthal*[200]) behandelt worden.

Anweisungen zur Kontrolle der Rechnung finden sich bei *Hansen*[201]) und bei *Fritsche*[161]).

Formeln zur zweckmässigen Berechnung einzelner Funktionswerte mit Hülfe der abgeleiteten Interpolationsformeln giebt allgemein *K. Weihrauch*[202]); für die beobachteten Argumente *R. Harris*[203]); für diese und für bestimmte zwischen ihnen gelegene *Dechevrens*[204]); für den speziellen Fall der „Interpolation in die Mitte“ *G. D. E. Weyer*[205]) und *R. Radau*[206]).

27. Graphische Methoden, Tabellen, Schablonen. Graphische Methoden für die Auswertung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen finden sich bei *Kirsch*[207]) und bei *Schreiber*[208]); bei ersterem auch für die Berechnung der Funktionswerte mit Hülfe der Formel. Auch das Verfahren von *Wedmore*[183]) ist ursprünglich graphisch gedacht. Aber auch die Integralformeln (17) lassen sich graphisch bewältigen: trägt man die Kurve $y = f(t)$ so auf einem Cylinder vom Radius $1/m$ auf, dass sie m-mal um ihn herumläuft, so geben, wie

194) Berl. Preisschr. [185]), p. 862.

195) 5. Note zum Bericht über *Le Verrier,* Par. C. R. 20 (1845), p. 8 (Oeuvres (1) 9, p. 148).

196) Thèse Toulouse 1863, § 7, p. 47.

197) Par. Observ. mém. 7 (1863), Nr. 10, p. 183.

198) Traité de mécanique céleste 4 (1896), Nr. 132, p. 294.

199) Stockh. Handl. 22^2 (1887), Nr. 23, p. 40.

200) Stockh. Öfv. 56 (1899), p. 273.

201) Preisschrift [185]), p. 58.

202) Dorp. Schriften 5 (1890), III 2, p. 13.

203) U. S. coast survey report f. 1897, App. 9, Nr. 71, p. 565.

204) Linc. Pontif. mem. 16 (1899), § 5, p. 157; Tafeln p. 168; Erläuterungen ib. 17 (1900), p. 16 des S.-A.

205) Astr. Nachr. 117 (1887), col. 312.

206) Bull. astron. 4 (1887), p. 492, 515.

207) Die Bewegung ... [16]), Nr. 8, p. 29.

208) Leop. N. A. 58 (1892), p. 211.

W. K. Clifford[209]) bemerkt, die Flächen ihrer Projektionen auf die tz- und die ty-Ebene die π-fachen Werte dieser Koeffizienten.

Andererseits werden die Rechnungen erleichtert durch eine Tabelle der Vielfachen der immer wieder vorkommenden trigonometrischen Funktionen. Für $n = 24$ hat eine solche *Fr. Kämtz* berechnet[210]).

Eine andere Erleichterung der Rechnung wird durch Schablonen gewährt. Die auftretenden trigonometrischen Funktionen haben, abgesehen vom Vorzeichen, nur eine geringe Anzahl verschiedener Werte; trägt man die Produkte dieser Werte mit den Beobachtungen in ein rechteckiges Schema ein und legt auf dieses Schema eine Schablone, die nur die gerade in Betracht kommenden Produkte freilässt, die übrigen verdeckt, so hat man nur noch zu addieren und zu subtrahieren. Solche Schablonen hat für $n = 40$ *L. Hermann*[211]) konstruieren lassen. Auf derselben Idee beruht der „Interpolateur à cadran" von *M. Dechevrens*[212]); er besteht aus zwei gegen einander beweglichen Kreisen, von denen der eine die Ordnungszahlen der Beobachtungen, der andere die trigonometrischen Multiplikatoren trägt.

28. Instrumentelle Hülfsmittel zum Rechnen mit den Formeln. Einen Rechenschieber zur Berechnung von R und ξ aus $R\cos\xi$ und $R\sin\xi$ hat *R. Strachey*[213]) konstruiert. Einen Apparat zur Zusammensetzung von harmonischen Komponenten verschiedener Periode giebt schon *Bashforth*[214]) an; er stellt dabei die beiden Veränderlichen durch

209) Lond. Math. Proc. 5 (1873), p. 11 (Papers, p. 201); *J. Perry* (Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 128; Auszug Nature 49 (1893/94), p. 617; vgl. auch *Perry* und *Hunt*, Phil. Mag. (5) 40 (1895), p. 506) und *S. Finsterwalder* (Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 85) vermeiden das Zeichnen auf einem Cylinder durch Benutzung der Methoden der darstellenden Geometrie.

210) Repert. Meteorol. 1 (1860), p. 107 mit Gebrauchsanweisung; die Tafel allein auch in der von *Kämtz* vorbereiteten, von *A. v. Öttingen* herausgegebenen Tafelsammlung, Dorpat 1868, als Tafel IV, p. 35, sowie in *Jelinek*'s Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen, 2, 4. Aufl. Leipzig 1895, Anhang; auf vier Stellen hourly readings [182]), p. [33].

211) Arch. Physiol. 47 (1890), p. 44; 86 (1901), p. 100.

212) Linc. Pontif. mem. 16 (1899), p. 148.

213) Katalog mathematischer Modelle, herausg. von *W. Dyck*, München 1892, p. 144; Beschreibung, Abbildung und Gebrauchsanweisung Lond. Trans. 184 A, 1893, p. 619, sowie Harmonic analysis of hourly observations, publ. by ... the meteorol. council, London 1891, p. IV.

214) Brit. ass. rep. f. 1845, p. 3; die nach Angabe von *H. S. Hele-Shaw*, ib 1892, p. 415, 1822[?] in Cambridge erschienene ausführlichere Beschreibung war mir nicht zugänglich. *Bashforth* hatte hauptsächlich eine Verwendung des Apparats zur Auflösung algebraischer Gleichungen im Auge. Weiter ausgeführt sind *Bashforth*'s Ideen von *W. H. L. Russell*, Lond. Roy. Proc. 18 (1896/70), p. 72.

Polarkoordinaten dar. In rechtwinkligen Koordinaten leistet dasselbe der Apparat von *A. E. Donkin*[215]), die einzelnen Komponenten zeichnet der von *R. Strachey*[216]).

Die Zusammensetzung beliebiger (auch unharmonischer) Komponenten von gegebener Periode, Amplitude und Phasenkonstante besorgt *W. Thomson*'s „tide-predicter"[217]). Er besteht aus einer Anzahl Rollen, deren Centra die vorgeschriebenen harmonischen Bewegungen ausführen; um die sämtlichen Rollen ist ein Faden gelegt, der an seinem andern Ende ein Gewicht trägt; die Bewegungen dieses Gewichtes stellen die Summen der einzelnen Bewegungen der Rollen dar. *W. Ferrel*[218]) hat den Apparat so umgeändert, dass er direkt die Extrema der resultierenden Bewegung giebt, indem er sich der Umformung (66) bedient und den Moment beobachtet, in welchem ein die Variabele repräsentierender Zeiger seine Nulllage passiert. Eine dritte Abänderung von *R. Harris*[219]) soll den von *Thomson* und den von *Ferrel* verfolgten Zweck zugleich erreichen. In dem Apparat von *A. A. Michelson* und *S. W. Stratton*[220]) werden die einzelnen komponierenden Bewegungen durch Gestänge, in denen die Länge je eines Gliedes abgeändert werden kann, mit vorgeschriebenen Amplituden auf Federn übertragen, diese greifen sämtlich an einem Hebel an, an dem andererseits eine grosse Feder als Gegenkraft wirkt.

29. Harmonische Analysatoren (vgl. auch II A 2, Nr. 60, *Voss*). Die erste Idee zu einem harmonischen Analysator, d. h. zu einem Instrument zur mechanischen Auswertung der Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung einer graphisch gegebenen Funktion, rührt von *J. Amsler*[221]) her; doch scheint sie damals nicht ausgeführt wor-

215) Lond. Roy. Proc. 22 (1874), p. 196; Auszug Brit. ass. rep. f. 1873, p. 45 (nur für zwei Komponenten).

216) Katalog [215]), p. 136, 213. Ich habe keine ausführlichere Beschreibung gesehen.

217) *W. Thomson* u. *P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy 1, App. B 1, p. 479 (zuerst in der Ausgabe von 1879; vgl. auch Nr. 58, p. 40). Proc. inst. civil engineers war mir nicht zugänglich.

218) U. S. coast survey report f. 1883, App. 10, p. 253.

219) ib. f. 1894, Nr. 59, p. 181. Die für später versprochene Beschreibung der fertigen Maschine habe ich nicht gesehen. Nr. 61, p. 183 und Nr. 66, p. 186 giebt *Harris* an, wie man mit einfacheren Mitteln dasselbe erreichen könne, wenn man auf grosse Genauigkeit verzichte.

220) Amer. J. of sci. (4) 5 (1898), p. 1; fast ganz derselbe Text, aber zum Teil andere Figuren Phil. Mag. (5) 45 (1898), p. 85.

221) Zürich Vierteljahrschr. 1 (1856), Nr. 21, p. 107 (auch sep. Schaffhausen 1856).

den zu sein. *Amsler* führt ein Planimeterrädchen so, dass seine Axe mit einer festen Richtung in jedem Augenblick einen Winkel einschliesst, der zur Abscisse proportional ist. *W. Thomson*[222]), der der Genauigkeit der Planimeterrädchen — wohl mit Unrecht — misstraute, benutzt die von *J. Thomson* erfundene Übertragung der Bewegung von einer Scheibe auf einen Cylinder durch Vermittlung einer beide berührenden Kugel; ist der Berührungspunkt zwischen Scheibe und Kugel vom Scheibenmittelpunkt um $\varphi(x)$ entfernt und dreht sich die Scheibe um einen Winkel $\psi(x)\,dx$, so dreht sich der Cylinder um einen Winkel $\varphi(x)\,\psi(x)\,dx$. Ist $\varphi(x) = \cos nx$ oder $\sin nx$, so kann die erforderliche Bewegung der Scheibe durch einen Kurbelmechanismus erzielt werden. Bei dem Apparat von *A. Sommerfeld* und *E. Wiechert*[223]) wird die Kurve $y = f(x)$ [wie bei *Clifford*[209])] auf einem Cylinder („Walze") aufgezeichnet, und zwar mit Hülfe des hierfür besonders eingerichteten Apparates selbst. Diese Walze dreht sich sowohl um ihre eigene Axe, als auch, und zwar mit n-facher Winkelgeschwindigkeit, um eine vertikale Axe, so dass der Berührungspunkt einer festen Tangentialebene der Walze mit der aufgezeichneten Kurve von einer festen Gerade dieser Ebene in jedem Augenblick den Abstand $y = \cos nx$ hat. Die so entstehende Kurve kann planimetriert werden, ohne dass sie gezeichnet zu werden braucht. Auf der Idee von *Clifford*[209]) beruht auch der erste harmonische Analysator von *O. Henrici*[224]). Später zieht *Henrici* noch die Umformung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} y \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \sin nx\,dy \tag{110}$$

herbei; es kommt also nur darauf an, ein Planimeterrädchen längs der Kurve $y = f(x)$ so zu führen, dass seine Ebene immer einen Winkel nx mit der y-Axe einschliesst. Das wird erreicht, indem die Bewegung des Cylinders durch Reibungsräder auf eine Axe übertragen wird, die wie bei *Amsler* die Planimeterrädchen trägt[225]). Dieser zweite Ent-

222) Erste Mitteilung Lond. Roy. Proc. 24 (1876), p. 266; arbeitsfähiges Modell Lond. Roy. Proc. 27 (1878), p. 371 (Treatise 1, App. B′ VII, p. 505; Beschreibung und Abbildung der ausgeführten Maschine Engineering 30 (1880), p. 561, sowie in einem Bericht von *R. H. Scott* und *H. Curtis* über mit ihr erzielte Resultate, Lond. Roy. Proc. 40 (1886), p. 382.

223) Königsberg Schriften 32 (1891), p. 28; Kat. [213]), p. 214.

224) Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 113; Auszüge Gött. Nachr. 1894, p. 30; Nature 49 (1893/94), p. 521; vgl. auch Kat. [213]), p. 129. *J. Perry*, Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 128 hat von diesem ersten Instrument *Henrici*'s eine bessere Meinung als *Henrici* selbst.

225) Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 115; Kat. [213]), p. 131, 213.

wurf *Henrici*'s ist von *A. Sharp*[226]) weiter durchgeführt und von *G. Coradi*[227]) ausgeführt worden. *Sharp* schlägt auch noch eine Modifikation dieses Instruments vor, die direkt Amplitude und Phasenkonstante jeder einzelnen Komponente giebt[228]).

Vor- und Nachteile der bis jetzt genannten Apparate stellt *Henrici*[229]) einander gegenüber.

Ein Apparat von *G. U. Yule*[230]) benutzt einen Kreis, der sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt auf $y = f(x)$ bleibt und dass er ohne zu gleiten auf einer Geraden parallel der x-Axe rollt, die sich nur in Richtung der y-Axe bewegen kann.

Soll der Apparat von *Michelson* und *Stratton*[220]) als harmonischer Analysator dienen, so muss bei ihm die Amplitude der n^{ten} Komponente gleich dem Wert der zu analysierenden Funktion für das n^{te} Argument genommen werden; er giebt dann den μ^{ten} Koeffizienten der Summenformel (12) als stetige Funktion von μ.

30. Hülfsmittel zur Trennung verschiedener Perioden und zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten. Zur Ausführung von Rechnungen der unter Nr. 22 besprochenen Art hat sich schon *Buys-Ballot*[231]) eines Systems cylindrischer Scheiben bedient, die auf eine gemeinsame Axe aufgesteckt und beliebig gegen einander gedreht werden konnten. Auf einem ähnlichen Gedanken scheint die „Periodenrechenmaschine" von *E. Lamprecht*[232]) zu beruhen. *G. H. Darwin*[233]) hat die Idee einer maschinellen Einrichtung als zu kostspielig wieder fallen lassen und sich mit einer Einrichtung zur Ersparung des wiederholten Abschreibens der Beobachtungen begnügt. Vollständiger wird dieser letztere Zweck erreicht durch die von *Börgen*[234]) und von

226) Kat. [213]), p. 134 und Nachtrag, 1894, p. 35; Nature 49 (1893/94), p. 521; vgl. auch *Henrici*, Phil. Mag. (5) 38 (1894), § 5, p. 115.

227) Der harmonische Analysator, Zürich 1894. Das Absolutglied muss bei diesen Instrumenten besonders mittelst eines gewöhnlichen Planimeters bestimmt werden. Die Übertragung auf die Registrierrädchen geschieht bei *Coradi* nach einem von *M. Küntzel* zu anderen Zwecken gemachten Vorschlag durch eine gläserne Kugel. Ausführliche Diskussion der Fehlerquellen des Apparates bei *L. Grabowski* (auf Anregung von *H. Seeliger*), Wien. Ber. 110[2a] (1901), p. 717. *Bervy*, Mosk. Observ. Ann. 1896 war mir nicht zugänglich. Vgl. die Figur am Schluss des Artikels.

228) Phil. Mag. (5) 38 (1884), p. 121; Nature 49 (1893/94), p. 617.

229) Kat. [213]), p. 222.

230) Phil. Mag. (5) 39 (1895), p. 367.

231) Ann. Phys. Chem. 84 (1851), p. 538.

232) Progr. Bautzen 1897, p. 27; leider ohne Abbildung oder detaillierte Beschreibung.

233) Lond. Roy. Proc. 52 (1892), p. 345.

234) bei *Darwin*, ib. p. 350.

L. P. Shidy[235]) vorgeschlagenen Schablonen („stencils"). Auch für die Summation der „*A*-Summen" nach „*B*-Stunden" giebt *F. M. Little*[236]) Schablonen an. *R. Harris*[237]) entwickelt die Idee einer Maschine, die die jedesmal erforderliche Anordnung der Beobachtungen und ihre Addition selbstthätig besorgen soll.

Der Apparat von *Michelson* und *Stratton*[220]) liesse sich jedenfalls so einrichten, dass er direkt das Periodogramm[155]) liefern würde.

Zur successiven Auffindung der Perioden verschiedener Komponenten ist auch das von *A. Sommerfeld*[238]) gegebene Verfahren bequem; nur ist zu beachten, dass es die Amplituden modifiziert.

---

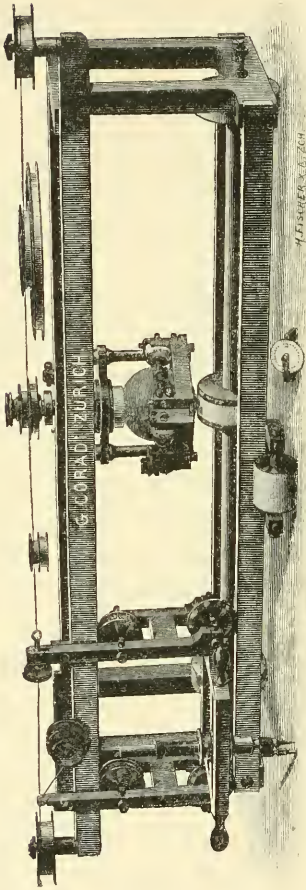
235) Bei *R. Harris*, U. S. coast survey report f. 1897, Nr. 53, p. 539.

236) ib. Nr. 66. p. 557.

237) ib. Nr. 55, p. 540.

238) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1903, VIII, § 6, p. 679. In der dort gegebenen Anwendung auf die Polschwankungen ist der Vergrösserungsfaktor für die in erster Linie in Betracht kommenden Perioden vermöge des speziellen Wertes ihres Verhältnisses nahezu gleich 1.

(Abgeschlossen im April 1904.)



Harmonischer Analysator.

QA
36
E62
Bd.2
T.1
Hfte.1

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY